SZERKESZTETLEN KÉZIRAT



A FELADATGYŰJTEMÉNY MEGOLDÁSAI

SZERKESZETETLEN KÉZIRAT

1-2. FEJEZETEK

OKTATÁSKUTATÓ ÉS FEJLESZTŐ INTÉZET, BUDAPEST

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Tartalom

Ebben a kéziratban található megoldások oldalszáma (a feladatgyűjteményben)---a kéziratban

1. **Kinematika – Mozgástan (dr. Fülöp Ferenc) .....13.....3**
2. **Dinamika – Erőtan (Csajági Sándor) ..... 31.....39**
3. **Munka, energia (Csajági Sándor, dr. Fülöp Ferenc).....69**
4. **Folyadékok és gázok mechanikája (Csajági Sándor, dr. Fülöp Ferenc) .... 87.**

Az alábbi fejezetek megoldásai további kötetben találhatók.

5. **Hőtani folyamatok (Póda László ..... (99)**
6. **Termodinamika (Póda László) .....(115)**
7. **Elektrosztatika (Urbán János).....(135)**
8. **Az elektromos áram (Urbán János).....(149)**
9. **Rezgések és hullámok (Simon Péter).....(161)**

Az alábbi fejezetek megoldásai további kötetben találhatók.

10. **Elektromágneses jelenségek (Dégen Csaba) 79**
11. **Optika (Simon Péter) 197**
12. **Atomfizika (Elblinger Ferenc) 217**
13. **Magfizika (Elblinger Ferenc) 233**
14. **Csillagászat (Dégen Csaba) 249**

Szerzők: CSAJÁGI SÁNDOR, DÉGEN CSABA, ELBLINGER FERENC, DR. FÜLÖP FERENC, PÓDA LÁSZLÓ, SIMON PÉTER, URBÁN JÁNOS

Alkotószerkesztő és lektor: DR. HONYEK GYULA

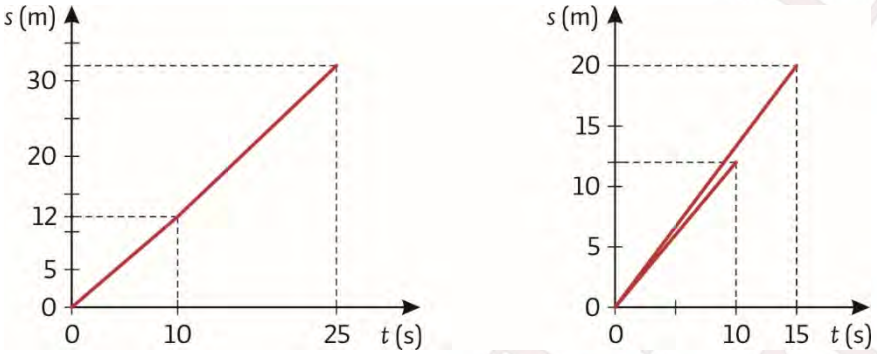
KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

1. Kinematika – mozgástan

Mechanikai mozgás. Egyenes vonalú egyenletes mozgás, változó mozgások

M1.1: A meredekebb egyeneshez tartozik a nagyobb sebesség, vagyis a második esetben mentünk gyorsabban. M1_1. ábra



M1.2: Adatok: $s = 8{,}58\ km, t = 90\ perc = 1{,}5\ óra$

a: $v_{átlag} = \frac{s}{t} = \frac{8{,}58km}{1{,}5\ óra} = 5{,}72\ \frac{km}{óra}$

b: Ez az adat azt jellemzi, hogy a játékos sokat vagy keveset mozgott a pályán, de nem jellemezi a játékos mozgásának részleteit. Lehet, hogy volt sok gyors elfutása és lőtt két gólt, de lehet, hogy csak végigsétálta a mérkőzést.

M1.3:

a: Mindhárom test egyenes vonalú mozgást végez.

b: Az (1) és a (3) ábra szerint mozgó test állandó sebességgel mozog.

c: A (2) ábra szerint mozgó test végez gyorsuló vagy lassuló mozgást végez. Az ábrából nem állapítható meg, hogy melyik irányba halad.

M1.4: Adatok: $s = 400\ m, t = 6\ perc = 360\ s, t_1 = ? \rightarrow\ s_1 = 100m$

a: Minden percben ugyanakkora utat teszünk meg, ez megegyezik a sebesség m/perc egységben kifejezett számértékével. $v = \frac{s}{t} = \frac{400m}{6perc} = 66{,}7\ \frac{m}{perc}$, vagyis a 4. percben is 66,7m utat tettünk meg.

b: A 100 m a teljes út negyede, ennek megtételéhez a teljes idő negyede szükséges.

$t_1 = \frac{t}{4} = \frac{360s}{4} = 90s,\ \ t_1 = 1\ min\ 30\ s$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M1.5: Adatok: $v_{gep} = 86\,{}^{km}/_{h} = 23{,}9\,{}^{m}/_{s}$, $t_{gep} = 40s$, $v_{ant} = 75\,{}^{km}/_{h} = 20{,}8\,{}^{m}/_{s}$, $t_{ant} = 50s$. $s_{gep} = ?$, $s_{ant} = ?$

$s_{gep} = v_{gep} \cdot t_{gep} = 956\ m$

$s_{ant} = v_{ant} \cdot t_{ant} = 1040\ m$

Az antilop hozzávetőlegesen $1040m - 956m = 84\ m$-rel több utat tett meg. A megadott adatokat fizikai értelemben nem tekinthetjük abszolút pontosaknak. A két állat közel azonos távot tett meg, az antilop 80-90 méterrel többet. Ennél pontosabban fizikailag nincs értelme megadni a végeredményt. Mindkét állat útját meglehetősen nagy pontossággal ki tudjuk számítani, azonban a különbség százalékos bizonytalansága igen nagy lesz.

M1.6: Adatok: $s_1 = 46m, t_1 = 5{,}9s$, $s_2 = 82m, t_2 = 10{,}2s$

$v_1 = {}^{s_1}/_{t_1} = {}^{46m}/_{5{,}9s} = 7{,}80\,{}^{m}/_{s}$, $v_2 = {}^{s_2}/_{t_2} = 8{,}04\,{}^{m}/_{s}$. Tehát a második gyerek a gyorsabb.

M1.7: Adatok: $v = 4{,}5\,{}^{km}/_{h} = 1{,}25\,{}^{m}/_{s}$, $t = 5\ min = 300\ s$

Az összes megtett út: $s = v \cdot t = 375$ m. Mivel a 2-4 perc intervallum a teljes mozgás $\frac{3}{5}$ része, ezért $\frac{3}{5} \cdot 375\ m = 225\ m$ -t teszünk meg a kérdéses időintervallumban.

M1.8: A feladatot megoldhatnánk a szokásos egyenletek felírásával, de mivel most a megadott számértékek kedvezőek, egyszerű arányossággal oldhatjuk meg a feladatot. Bálint egy óra alatt tenne meg $36km$-t, így mivel most egyharmad óráig (20 perc) tekert, így a $36km$-nek is csak a harmadát kerekezi, vagyis $12km$-t. Hasonló gondolatmenettel mondhatjuk, hogy Lilla, mivel fél órát biciklizett, $13km$-t tett meg. Lilla egy kilométerrel többet kerekezett.

M1.9:

a: Az első szakaszon 30 cm utat 2 s alatt tett meg az alkatrész, tehát a sebessége $v_1 = {}^{30cm}/_{2s} = 15\,{}^{cm}/_{s}$. A második szakaszon 15 cm utat 4s alatt tett meg, tehát a sebessége $v_2 = {}^{15cm}/_{4s} = 3{,}75\,{}^{cm}/_{s}$.

b: A megtett út két részből áll. Az elsőben két másodpercig haladt és a grafikonról leolvashatóan 30cm-t tett meg. A második szakaszon szintén két másodpercig haladt, és egyszerű arányossággal megállapítható, hogy a mozgás 4. másodpercének végén az összes megtett út 37,5cm.

Grafikon nélkül is kiszámolható a megtett út. Az első szakaszon: $s_1 = v_1 \cdot 2s$ = 30 cm, a második szakaszon $s_2 = v_2 \cdot 2s$ = 7,5 cm, tehát az összes út $37{,}5cm$.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Megjegyzés: Érdemes elidőzni egy kicsit a grafikon A pontjánál. A második másodperc végéhez közeledve a test sebessége még 15 $^{cm}/_{s}$, a harmadik másodperc kezdetére pedig már 3,75 $^{cm}/_{s}$-ra csökkent. Vagyis végtelenül kis idő alatt következett be véges sebességváltozás, ami végtelen nagy lassulást jelent. Ez a valóságban nem fordulhat elő. A feladatok megfogalmazásánál bizonyos egyszerűsítéseket kell tenni, hogy a túl körülményes és aprólékos leírás ne vonja el a figyelmet a tartalmi résztől.

M1.10: A szükséges 22 másodperc előnyből már 6 s megvan, tehát még 16 s-ra van szüksége. Ezt $\frac{16s}{1{,}7\frac{s}{kör}} = 9{,}4$ kör alatt tudja megszerezni, vagyis 10 kör után tud kiállni kerékcserére.

M1.11: Adatok: $v_k = 54\frac{km}{h} = 15\frac{m}{s}, v_m = 36\frac{km}{h} = 10\frac{m}{s}, s_1 = 20m, \ \ s_2 = 15m$
A kérdést úgy fogalmazhatjuk át, hogy mekkora idő alatt érné utol a kutya a macskát, ha a macska nem tudna beugrani a kertbe. Legyen t az üldözés kezdetétől az utolérésig számított idő, ekkor: $v_k \cdot t = s_1 + v_m \cdot t$.
Behelyettesítve kapjuk, hogy $t = 4\ s$. Mivel a macska $t_1 = \frac{15m}{10\frac{m}{s}} = 1{,}5\ s$ alatt eléri védelmet nyújtó kaput, ezért megmenekül.

M1.12: Akkor lesz nulla az elmozdulásunk, ha a kiindulási helyünkre érünk vissza. Ezt nyilván sokféle úton, különböző háztömbök megkerülésével is megtehetjük, de a nyilvánvaló megoldás, amihez az adatok is rendelkezésünkre állnak, az, hogy azon az úton megyünk vissza, ahol jöttünk. Mivel kétszer annyi idő áll rendelkezésünkre a visszaútra, feleakkora nagyságú és ellentétes irányú sebességgel kell haladnunk, mint ahogy a sarokra értünk.

M1.13:
a: $s_1 = 6\frac{m}{s} \cdot 10s = 60m, s_2 = 8\frac{m}{s} \cdot 15s = 120m. s_{ö} = 180m.\ t_{ö} = 30s,\ v_{átlag} = \frac{s_{ö}}{t_{ö}} = \frac{180m}{30s} = 6\frac{m}{s}$,
b: $v_{15s} = \frac{60m}{15s} = 4\frac{m}{s}$.
c: Az első $10s$ alatt éppen a teljes útra számított átlagsebességgel futott.

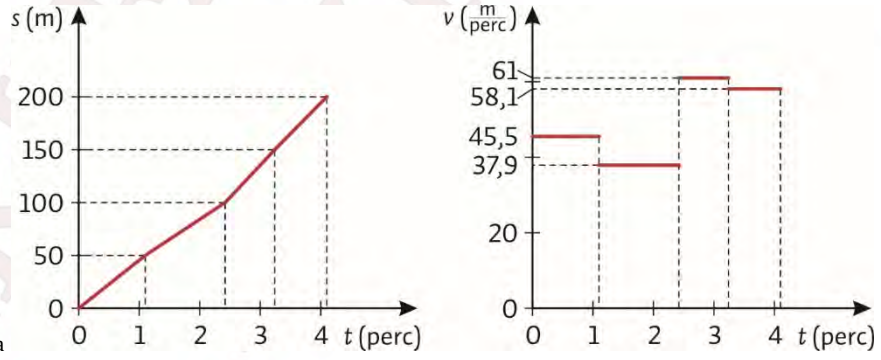
KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M1.14: Adatok: $t = 12\ perc = 0{,}2\ óra = 720\ másodperc$, $s = 2{,}817km = 2817m$.
Az átlagsebesség: $v_{átl} = \frac{s}{t} = \frac{2{,}817km}{0{,}2óra} = 14{,}1\ \frac{km}{h}$ $v_{átl} = \frac{s}{t} = \frac{2817m}{720s} = 3{,}91\ \frac{m}{s}$ $v_{átl} = \frac{2817m}{12perc} = 235\ \frac{m}{perc}$

M1.15: Adatok: $s = 786m, v = 4{,}68\frac{km}{h} = 1{,}3\frac{m}{s}$.
Az út megtételéhez szükséges idő: $t = \frac{s}{v} = \frac{786m}{1{,}3\frac{m}{s}} = 605s = 10perc\ 5másodperc$.
Tehát 7: 32: 05-re érünk a megállóba.

M1.16: Adatok: $v = 4{,}5\,{}^{km}/_{h} = 1{,}25\,{}^{m}/_{s}$, $s = 1180\ m$ $t = 8{:}00 - 7{:}48 = 12\ perc = 720\ másodperc$
A megoldáshoz megfogalmazhatunk egy másik kérdést: „Mennyi utat teszünk meg 12 perc alatt?” $s' = v \cdot t = 1{,}25\,{}^{m}/_{s} \cdot 720s = 900m$. Ez kevesebb, mint az iskola távolsága, tehát nem érünk be.
A szükséges minimális sebesség, hogy beérjünk: $v' = {}^{1180m}/_{720s} = 1{,}64\,{}^{m}/_{s} = 5{,}9\,{}^{km}/_{h}$.



M1.17: M1_17 ábra
Az út-idő grafikon akkor ilyen, ha feltesszük, hogy az egyes 50 m-es szakaszokon állandó sebességgel mentünk.

M1.18: Adatok: $s = 2400\ m,\ v_1 = 5\,{}^{km}/_{h} = 1{,}39\,{}^{m}/_{s}$, $v_2 = 6\,{}^{km}/_{h} = 1{,}67\,{}^{m}/_{s}$.
$t = ?$, $v_{átlag} = ?$
A szükséges idő: $t = \frac{\frac{s}{3}}{v_1} + \frac{\frac{2\cdot s}{3}}{v_2} = 576\ s + 960\ s = 1536\ \ s = 25\ perc$ 36 s.
Az átlagsebesség: $v_{átlag} = \frac{s}{t} = \frac{2400m}{1536s} = 1{,}56\frac{m}{s} = 5{,}625\ \frac{km}{h}$.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Megjegyzés: Ha számításaink közben kerekítünk, akkor kissé eltérő végeredményekre juthatunk, melyek ugyanolyan helyesek, mint a kerekítések nélküli számítás. Ennek oka az, hogy minden fizikai jelenség esetén a megadott mennyiségeknek mérési hibája (mérési bizonytalansága) van.

M1.19: Adatok: $v_f = 2\frac{km}{h}$, v_{cs} =?
Folyásirányban a parthoz viszonyított sebességünk a folyó (parthoz viszonyított) és a csónakunk folyóhoz viszonyított sebességének összege. A 24 km-t három óra alatt $v = \frac{24km}{3óra} = 8\ \frac{km}{óra}$ sebességgel tudjuk megtenni. Ezért nekünk $v_{cs} = v - v_f = 6\frac{km}{h}$ (átlag)sebességgel kell eveznünk.

M1.20: Adatok: A két felhajtó távolsága: $s = 74km - 47km = 27km$
A két kocsi felhajtási idejének a különbsége:$\Delta t = 13{:}40 - 13{:}10 = 30perc$. A gyorsabb autó sebessége: $v_1 = 160\frac{km}{h}$, lassabbé $v_2 = 108\ \frac{km}{h}$. Először számítsuk ki, hogy mekkora lesz a távolság a két autó között, amikor a második felhajt az autópályára! Fél óra alatt a lassabb autó $s_1 = 108\frac{km}{h} \cdot 0{,}5h = 54km$ utat tesz meg, vagyis a két autó között a távolság: $s_2 = s + s_1 = 81km$ lesz. Annyi idő alatt éri utol a gyorsabb kocsi a lassabbat, amennyi idő alatt ő 81km-rel többet tesz meg, mint a lassabb: $v_1 \cdot t = v_2 \cdot t + 81km$ Ebből $t = 1{,}56h = 1h\ 34min$. Ennyi idő alatt a gyorsabb autó $s_3 = v_1 \cdot t = 249{,}6\ km - t$ tesz meg, tehát az autópálya 296 km-es és 297 km-es szelvénye között éri utol a lassabbat. (Kerekítések miatt, illetve a természetes bizonytalanságok miatt nem lehet ennél pontosabban meghatározni az utolérés helyét.)

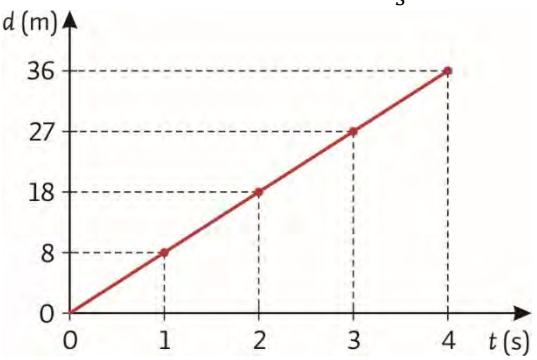
M1.21: Adatok: $t_1 = 10perc = 600s$, $t_2 = 6min = 360s$, v_1=$4\frac{m}{s}$, $v_2 = 6\frac{m}{s}$.
A teljes távolság két részből adódik össze: $s_1 = v_1 \cdot t_1 = 2400\ m$, $s_2 = v_2 \cdot t_2 = 2160\ m$. Tehát összesen $s_1 + s_2 = 4560\ m$-t futott, ami 4,56 km.

M1.22: Adatok: $v_1 = 4\frac{m}{s}$ $v_2 = 5\frac{m}{s}$.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

A közöttük levő távolság az általuk megtett utak összege. Tehát a távolság: $d = v_1 \cdot t + v_2 \cdot t = (v_1 + v_2) \cdot t = 9\frac{m}{s} \cdot t$. M1_22. ábra.



M1.23: Adatok: $v_1 = 15\frac{mm}{s}, s_1 = 45cm, v_2 = 12\frac{mm}{s}, s_2 = 30cm.\ d = ?$

a: P1 pók $t_1 = \frac{s_1}{v_1} = \frac{450mm}{15\frac{mm}{s}} = 30s$, P2 pók $t_2 = \frac{s_2}{v_2} = \frac{300mm}{12\frac{mm}{s}} = 25s$ alatt ér a zsákmányhoz., tehát a második pók érkezik oda előbb. 8 másodperc alatt P1 $s_3 = 12cm$-t, P2 pedig $s_4 = 9{,}6cm$-t tesz meg.

b: A közöttük levő távolság: $d = \sqrt{(s_1 - s_3)^3 + (s_2 - s_4)^4} = 38{,}8\ cm.$

M1.24: Adatok: $s = 50\ m, d = 480\ m, t = 1\ perc\ 8\ másodperc, v = 1\frac{m}{s}$.

Ha végig tudunk menni a villamoson, ameddig az elér a következő megállóig, akkor azt a t_1 időt nyerjük meg, amennyi idő alatt elértünk az első ajtóig. $t_1 = \frac{s}{v} = \frac{50m}{1\frac{m}{s}} = 50\ s$. Ez az idő kisebb a menetidőnél, tehát 50 s-ot nyertünk. Ha maradtunk volna az utolsó ajtónál, akkor a megállóban kellett volna 50 m -t gyalogolni, vagyis távolságban nem nyertünk semmit.

M1.25: Adatok: $v_{csiga} = 1{,}4\frac{mm}{s}, t = 3\ min = 180\ s, s = 18\ cm = 180\ mm.$

A csiga három perc alatt $s_{csiga} = v_{csiga} \cdot t = 1{,}4\frac{mm}{s} \cdot 180\ s = 252\ mm = 25{,}2\ cm$

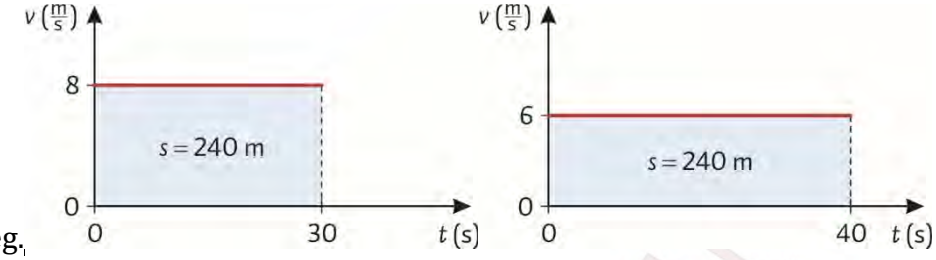
Mivel ez a távolság nagyobb, mit a lapulevél távolsága, még a vihar előtt oda fog érni.

M1.26: Ábrázoljuk a Zsófi által megtett utat (M_1.26a. ábra)! A grafikonról leolvasható ennek értéke: 240 m. Ildikó sebesség-idő grafikonján (M1_26b. ábra) egy olyan téglalapot kell rajzolnunk, aminek a területe 240 m, ezt a t = 40s-nál húzott

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

oldallal tudjuk elérni, vagyis Ildikónak 40 s-ig kell kerékpározni, hogy 240 m-t tegyen meg.



M1.27: A tengelyeken nem összeillő mértékegységeket találunk, tehát a megtett út kiszámításánál nem szorozhatjuk össze a tengelyekről leolvasott értékeket. Azonban most csak az utak egymáshoz viszonyított nagyságára vagyunk kíváncsiak, és ezt helyesen adja meg a tengelyekről leolvasott értékek szorzata. A nagyobb sebességű test útja: $s_1 = 15\frac{km}{h} \cdot 15perc = 225\frac{km \cdot perc}{h}$, a kissebbé: $s_2 = 5\frac{km}{h} \cdot 35perc = 175\frac{km \cdot perc}{h}$. Tehát a nagyobb sebességű mozgáshoz nagyobb megtett út tartozik. A két út aránya: 225/175 = 9/7, vagyis a nagyobb út 9/7-szer hosszabb, mint a kisebb.

M1.28:

Δt_1	$2{,}89s$	v_1	$6{,}92\frac{m}{s}$
Δt_2	$1{,}75s$	v_2	$11{,}43\frac{m}{s}$
Δt_3	$1{,}67$	v_3	$11{,}98\frac{m}{s}$
Δt_4	$1{,}66s$	v_4	$12{,}05\frac{m}{s}$
Δt_5	$1{,}61s$	v_5	$12{,}42\frac{m}{s}$
		$v_{átlag\ teljes}$	$10{,}44\frac{m}{s}$

Az átlagsebesség végig nőtt, de a $40m - 80m$ közötti szakaszon jó közelítéssel állandó „utazósebességgel” haladt.

M1.29: Adatok: $v_1 = 4\frac{m}{s}$, $v_2 = 10\frac{m}{s}$, $s = 600\,m$. $s_1 = ?$, $t = ?$, $v_{átlag} = ?$

a: Váltsunk sebességet a v_1 sebességgel megtett s_1 út végén. Az idők azonosságát felírhatjuk a két szakaszra: $\frac{s_1}{v_1} = \frac{s - s_1}{v_2}$

ebből $s_1 = \frac{s}{1 + \frac{v_2}{v_1}}$, adatainkat behelyettesítve kapjuk: $s_1 = 171{,}4m$. Ha v_2 sebességgel indulunk, akkor $s - s_1 = 428{,}6m$ után kell sebességet váltani.

b: A teljes menetidő: $t = 2 \cdot \frac{s_1}{v_1} = 85{,}7s$.

c: Az átlagsebesség: $v_{átlag} = \frac{s}{t} = 7\frac{m}{s}$.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Megjegyzés: Ez éppen a sebességek átlaga! Ez nem csak az adatok véletlen alakulása miatt van így, nézzük meg, hogy ilyen mozgás esetén az átlagsebesség mindig a sebességek átlaga lesz!

$$v_{átlag} = \frac{s}{t} = \frac{s}{\frac{2 \cdot s_1}{v_1}} = \frac{s \cdot v_1}{2 \cdot \frac{s}{1 + \frac{v_2}{v_1}}} = \frac{s \cdot v_1 (v_1 + v_2)}{2 \cdot s \cdot v_1} = \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

M1.30: Az első sebessége: $v = \frac{24m}{5s} = 4{,}8\ \frac{m}{s}$, a másodiké: $v = \frac{500m}{120s} = 4{,}17\ \frac{m}{s}$, a harmadiké: $v = \frac{3m}{2s} = 1{,}5\ \frac{m}{s}$. Tehát az első mozgás sebessége a legnagyobb.

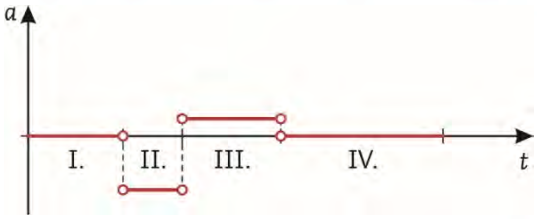
Egyenes vonalú, egyenletesen változó mozgás. Kezdősebességgel rendelkező egyenletesen változó mozgás

M1.31: Az első szakaszon időben lineárisan nő a megtett út, tehát állandó a sebesség, a második szakaszon négyzetesen nő a megtett út, ezért itt a sebesség lineárisan nő, a test állandó gyorsulással mozog. A harmadik szakaszon az addig megtett út nem változik, tehát áll a test, sebessége nulla, a negyedik szakaszon az elsőnél nagyobb állandó sebességgel, az eredeti iránnyal ellentétesen halad.
Megjegyzés: A valóságban a test nem képes a grafikonnak megfelelően mozogni, mert fizikailag nem lehetséges, hogy bizonyos időpillanatokban a sebességnek ugrása legyen, más szóval nem lehetséges, hogy ugyanabban a pillanatban a test sebességének két értéke legyen. A sebesség a hely-idő grafikonon a görbe meredekségével feleltethető meg ($\Delta s/\Delta t$), és ahol töréspontok vannak a grafikonon, ott a bal és a jobb oldali érintők meredeksége különbözik, vagyis a sebesség ugrik. A valóságban ezek a töréspontok lekerekítettek, azonban ezektől gyakran eltekintünk az egyszerűség kedvéért.

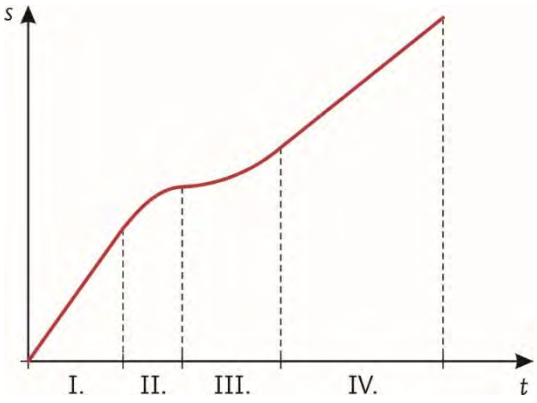
M1.32: Van kezdősebessége, az első szakaszon a sebesség időben lineárisan nő, vagyis állandó gyorsulással halad a test, a második szakaszon állandó a sebesség, gyorsulás nincs, a harmadikon a test sebessége nullára csökken, gyorsulása negatív, a negyedik szakaszon áll a test, sebessége és gyorsulása nulla.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

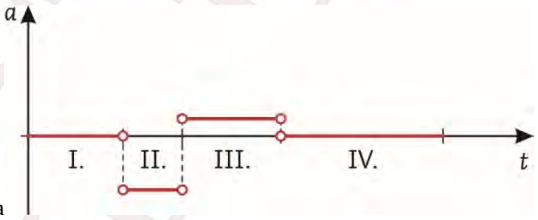
SZERKESZTETLEN KÉZIRAT



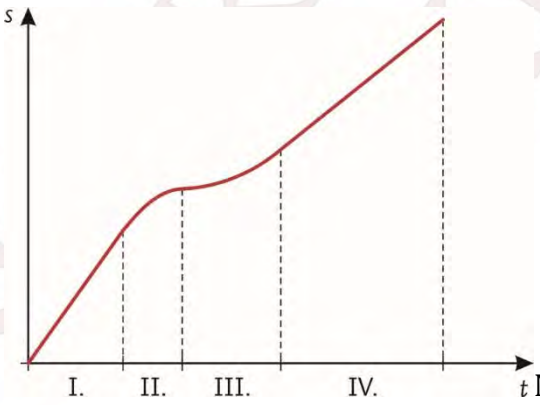
M1.33: 14, 15. ábra



Megjegyzés: A valóságban a sebesség nem vehet fel egy időpillanatban két különböző értéket, ezért a 14. ábrán látható lépcsős függvény egyes szakaszait folytonos vonal köti össze. Ennek megfelelően a gyorsulás sem lehet minden időben nulla, hanem a „sebességugrások" esetén rövid időre igen nagy gyorsulás értékek lépnek fel. Ha megtartjuk a 14. ábrán látható idealizált grafikont, akkor a 15. ábrán az egyes szakaszok közé üres pontokat kell rajzolnunk, ami azt jelenti, hogy ott a gyorsulás nem értelmezhető.



M1.34. M1_34a és M1_34b ábra



M1.35. Adatok: $t = 3{,}2\ s, v = 100\ \frac{km}{h} = 27{,}78\ \frac{m}{s}$.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Feltételezzük, hogy az autó egyenletesen gyorsul: $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{27{,}78\,\frac{m}{s}}{3{,}2\,s} = 8{,}68\ \frac{m}{s^2}$. A megtett út: $s = \frac{a}{2}t^2 = \frac{8.68\frac{m}{s^2}}{2}(3{,}2s)^2 = 44{,}4\ m$.

M1.36. Adatok: $v_0 = 36\frac{km}{h} = 10\frac{m}{s}, t = 6\ s, s = 100\ m$.
Kezdősebességgel, állandó gyorsulással halad az autó: $s = v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2$, ebből: $a = \frac{(s - v_0 \cdot t) \cdot 2}{t^2}$. Adatainkkal: $a = 2.22\,\frac{m}{s^2}$. A kocsi sebessége a lámpa alatt: $v = v_0 + a \cdot t = 10\,\frac{m}{s} + 2{,}22\,\frac{m}{s^2} \cdot 6s = 23{,}32\,\frac{m}{s} = 84\,\frac{km}{h}$, ami jelentősen nagyobb, mint a lakott területen megengedett maximális sebesség!

M1.37: Adatok: $a_F = 6{,}2\,\frac{m}{s^2}\,t_F = 7s,\ a_P = 6{,}1\,\frac{m}{s^2}.\,t_P$ =?
a: A Ferrsche $7s$ alatt elért sebessége: $v_F = a_F \cdot t_F = 6{,}2\,\frac{m}{s^2} \cdot 7s = 43{,}4\,\frac{m}{s}$ = 156,2 km/h. Ezt a sebességet a Porrari $t_P = \frac{v_F}{a_P} = \frac{43{,}4\frac{m}{s}}{6{,}1\frac{m}{s^2}} = 7{,}11s$ éri el.
b: A Ferrsche 7 s-ig (43,4 m/s)/2 = 21,7 m/s átlagsebességgel haladt, tehát (21,7 m/s)·(7 s) = 151,9 métert tett meg, majd még 0,11 s-ig 43,4 m/s-mal haladt, ami 4,8 méteres elmozdulást jelent, vagyis a Ferrsche teljes útja 156,7 m. Ezalatt a Porrari mindvégig 21,7 m/s átlagsebességgel mozgott, vagyis a teljes útja: (21,7 m/s)·(7,11 s) = 154,3 méter. Tehát a kérdéses pillanatban a Ferrsche 2,4 méterrel volt előrébb, ami nagyjából egy fél autóhossz.

M1.38. Adatok: $t = 6\ s, v = 15\,\frac{m}{s}$.
a: A gyorsulás: $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = 2{,}5\ \frac{m}{s^2}$.
b: A megtett út $s = \frac{a}{2} \cdot t^2 = 45m$. Az első hat másodpercben 45 m-t, további, $t' = 25s - 6s = 19\ s$-ban állandó sebességgel halad és megtesz $s' = 15\,\frac{m}{s} \cdot 19\ s = 285\ m$-t. Vagyis összesen: $s + s' = 45\ m + 285\ m = 330\ m$-t tesz meg.
Megjegyezzük, hogy Marcsi veszélyesen nagy, 54 km/h sebességgel mozgott a lejtőn.

M1.39: Az állandó gyorsulással mozgó test sebessége időben lineárisan változik. Az ábráról leolvasható, hogy az átlagsebesség és az idő szorzata a test által megtett utat adja meg.

M1.40: Adatok: $v = 130\,\frac{km}{h}, a_1 = 8\,\frac{m}{s^2}, a_2 = 7\,\frac{m}{s^2}, t_{reak} = 1{,}5s$.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Az elől haladó kocsi $s_1 = \frac{v^2}{2 \cdot a_1} = \frac{\left(36{,}11 \frac{m}{s}\right)^2}{2 \cdot 8 \frac{m}{s^2}} = 81{,}5\ m$ távolságon áll meg. A hátsó autónak $s_2 = v \cdot t_{reak} + \frac{v^2}{2 \cdot a_2} = 36{,}11 \frac{m}{s} \cdot 1{,}5s + \frac{\left(36{,}11 \frac{m}{s}\right)^2}{2 \cdot 7 \frac{m}{s^2}} = 54{,}16m + 93{,}14\ m = 147{,}3\ m$. Mivel a kezdeti távolság és az első kocsi fékútja nagyobb, mint a második kocsi féktávolsága, ezért a második autó időben meg tud állni. Az elől haladó autó $v/a_1 = 4{,}5$ s alatt áll meg, míg a hátsó $t_{reak} + v/a_2 = 1{,}5$ s + 5,2 s = 6,7 s alatt, tehát az elől haladó $\Delta t = 2{,}2$ s-mal hamarabb áll meg.

Megjegyzés: Amikor az elől haladó megáll, akkor a hátsónak még $a_2 \Delta t = 15{,}4$ m/s = 55,4 km/h a sebessége, és a közöttük lévő távolság már csak 31 méter. Izgalmas ilyenkor az utolsó pár másodperc!

Szabadesés, hajítások

M1.41: Kezdődjön ez a szakasz az indulást követő t másodpercben. Az eddig megtett útja: $h_t = \frac{g}{2} \cdot t^2$, egy másodperccel később az addig megtett teljes út: $h_{t+1} = \frac{g}{2} \cdot (t+1)^2$. A két út különbsége a megadott $d = 20m$. Tehát: $d = h_{t+1} - h_t = \frac{g}{2} \cdot (t+1)^2 - \frac{g}{2} \cdot t^2$. Ebből $t = 1{,}5s$. Ennyi idő alatt a szabadon eső test $h_{1{,}5s} = 11{,}25m$-t tesz meg. Tehát a test mozgásának az $1{,}5s - 2{,}5s$ közötti időintervallumában, útjának a $11{,}25m - 31{,}25m$ közötti szakaszán tesz meg egy másodperc alatt $20m$-t.

M1.42: Adatok: $h = 4\ m,\ g = 9{,}81\ \frac{m}{s^2}$

A leeső körte kezdősebessége nulla és szabadon esik, ezért alkalmazható a $h = \frac{g}{2} \cdot t^2$ összefüggés, amiből $t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} = 0{,}9s$. A földet érés sebessége a $v = g \cdot t$ összefüggés alapján $v = 8{,}9 \frac{m}{s}$.

M1.43: Adatok: $H = 3{,}1\ m,\ h = 1{,}7\ m,\ g = 9{,}81\ \frac{m}{s^2}$.

A vízcsepp $\Delta h = H - h = 1{,}4m$-t esik. Alkalmazzuk a $v = \sqrt{2g\Delta h}$ összefüggést, amiből v = 5,24 m/s.

M1.44: Adatok: $\Delta h = 20m, t_1 = 2s$
a: A megfigyelt szakasz kezdő- és végpontjára felírhatjuk a szabadesés összefüggéseit: $h = \frac{g}{2} t^2, h + 30m = \frac{g}{2}(t + t_1)^2$ Az egyenletrendszer megoldása: $t = \frac{(30\ \mathrm{m}) - (2\ \mathrm{s}^2)g}{(2\ \mathrm{s})g} = \frac{15\ \mathrm{m/s}}{g} - 1\ \mathrm{s} = 1{,}53\ \mathrm{s} - 1\ \mathrm{s} = 0{,}53\ \mathrm{s}$. A megfigyelés kezdetéig a

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

test $h = \frac{g}{2}t^2 = 1{,}37$ métert tesz meg, a megfigyelés végéig pedig 30 méterrel többet: $h + 30\ \text{m} = \frac{g}{2}(t + 2\ \text{s})^2 = 31{,}37$ métert.

b: A megfigyelés kezdetének a pillanatában a test sebessége: $v = gt = 5{,}19\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

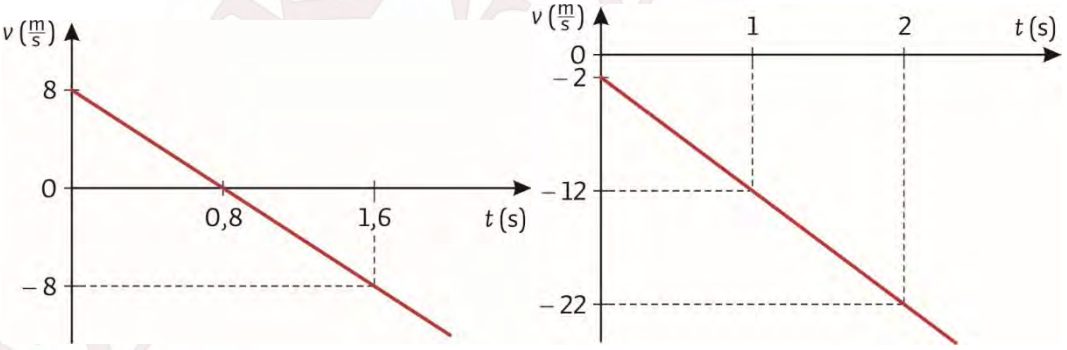
M1.45: A függőleges hajítás sebességét leíró összefüggés: $v = v_0 - g \cdot t$ alapján $t = \frac{v_0 - \frac{v_0}{2}}{g} = \frac{v_0}{2 \cdot g}$ idő múlva feleződik a sebessége. Ekkor a kő $h = v_0 \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2 = \frac{3 \cdot v_0^2}{8 \cdot g}$ magasságban lesz. Mivel a kő $h_{max} = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{4v_0^2}{8g}$ magasságot ér el, így láthatjuk, hogy akkor lesz a sebessége a kezdősebesség fele, amikor a kő $h = \frac{3}{4}h_{max}$ magasságba kerül. A kezdősebesség másik felének „elvesztése” a teljes magasság utolsó negyedében történik. Azt is észrevehetjük, hogy a sebesség első felének „elvesztése” ugyanannyi ideig tart, mint a második felének, azonban az első szakaszon $3v_0/2$ a test átlagsebessége, a második szakaszon csak $v_0/2$, tehát harmad annyi, ezért a két részmagasság aránya 3:1.

M1.46: Adatok: $v_0 = 15\frac{m}{s}, t_1 = 2s. h = ?, v_{t_1} = ?$

a: Az emelkedési idő: $t_{em} = \frac{v_0}{g} \approx 1{,}5s$, vagyis a feldobás után két másodperccel a labda már lefelé esik. A függőleges hajítás pillanatnyi magasságát leíró egyenlet szerint: $h = v_0 \cdot t_1 - \frac{g}{2} \cdot t_1^2\ ,\ h \approx 10m.$

b: A függőleges hajítás sebességét leíró összefüggést alkalmazva: $v_{t_1} = v_0 - g \cdot t_1\ ,$ $v_{t_1} \approx -5\frac{m}{s}$, tehát a labda már visszafelé esik.

M1.47: A mozgást leíró egyenlet: $v(t) \approx -2\frac{m}{s} - 10\frac{m}{s^2} \cdot t$. M1_47. ábra.



M1.48: A mozgást leíró függvény: $v(t) \approx 8\frac{m}{s} - 10\frac{m}{s^2} \cdot t$. M1_48. ábra.

M1.49: Adatok: $h = 8\ m, h_0 = 1\ m.$

a: A kezdősebesség legyen v_0, az emelkedés ideje t_{em}. Akkor a legkönnyebb elkapni a labdát, ha mozgásának tetőpontja éppen $8m$ magasságban van, mert ennek közelében nagyon lassan mozog, a tetőponton egy pillanatra meg is áll. A

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

függőleges hajítást leíró összefüggéseket alkalmazva: $h - h_0 = \frac{v_0^2}{2 \cdot g}$, $v_0 = \sqrt{2 \cdot g \cdot (h - h_0)} = 11{,}7 \frac{m}{s}$.

b: Az emelkedés ideje: $t_{em} = \frac{v_0}{g} = 1{,}19$ s

M1.50: Adatok: $H = 62m, \Delta t = 1s$.

A kezdősebesség nélkül leejtett kavics H magasságból $t = \sqrt{\frac{2 \cdot H}{g}} = 3{,}56s$ alatt esik le. Az utána dobott kavicsnak ezért $t_1 = t - \Delta t = 2{,}56\ s$ alatt kell leérnie: $H = v_0 \cdot t_1 + \frac{g}{2} \cdot t_1^2$. Ebből $v_0 = \frac{H - \frac{g}{2} t_1^2}{t_1} = 11{,}7\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 12 \frac{m}{s}$. Tehát a második kavicsot nagyjából $12 \frac{m}{s}$ sebességgel kell ledobni.

M1.51: Adatok: $t = 5s, v_0 = 4 \frac{m}{s}$.

a: Az elejtés pillanatában a telefonnak $v_0 = 4 \frac{m}{s}$ függőlegesen felfelé mutató sebessége volt. Ezzel még $t_{em} = \frac{v_0}{g} \approx 0{,}4s$ ideig emelkedik. Ebből következik, hogy a telefon $t_{esés} \approx 4{,}6\ s$-ig fog szabadon esni. Ennyi idő alatt $v = g \cdot t_{esés} \approx 46 \frac{m}{s}$ sebességre gyorsul fel.

b: Ha a függőlegesen felfelé mutató irányt tekintjük pozitívnak, akkor a telefon kezdősebessége $v_0 = 4$ m/s, végsebessége pedig $v = -46$ m/s volt, vagyis az átlagsebessége: $v_{átlag} = -21$ m/s. Ezzel az átlagsebességgel 5 s-ig mozgott a telefon, tehát az elmozdulása: $y = v_{átlag} \cdot t \approx -105$ m lett. Nagyjából tehát 105 méter magasan volt a léggömb, amikor kiesett a telefon.

M1.52: Adatok: $H = 62m, h = 3{,}5m$.

Az első kavics $t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot H}{g}} = 3{,}56\ s$ idő alatt ér a földre, a második $t_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot (H - h)}{g}} = 3{,}45$ s idő alatt, tehát a második kavicsot 0,11 s-mal később kell indítani.

M1.53: Adatok: $v_1 = 8 \frac{m}{s}$, $v_2 = 6 \frac{m}{s}$.

Az első hógolyó teljes repülési ideje: $t_1 = \frac{2 \cdot v_1}{g} \approx 1{,}6s$, a másodiké $t_2 = \frac{2 \cdot v_2}{g} \approx 1{,}2s$.

A második hógolyó az első indulásától számítva $2{,}2s$ múlva ér vissza, tehát az első $0{,}6\ s$-mal előbb érkezik vissza az eldobás magasságába.

M1.54: Adatok $v_1 = 15 \frac{m}{s}$, $v_2 = 10 \frac{m}{s}$, $\Delta t = 0{,}5s$.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Gábor labdájának repülési ideje: $t_G = \frac{2 \cdot v_1}{g} \approx 3s$, Dávidé: $t_D = \frac{2 \cdot v_1}{g} \approx 2s$. Tehát Dávidnak fél másodperccel Gábor után kell feldobni a labdát.

Egyenletes körmozgás kinematikai leírása, centripetális gyorsulás (alapozó feladatok)

M.1.55.
Adatok:
r = 1,2 m
T = 4 s
f=?
w=?
v=?

A keringési ideje 4 s. A fordulatszám

$$f = 1/T = 0{,}25\ 1/s.$$

A szögsebesség

$$w = 2\pi/T = 1{,}57\ 1/s.$$

A kerületi sebesség

$$v = wr = 1{,}9\ m/s.$$

A körhintán ülő gyermek fordulatszáma 0,25 1/s, szögsebessége 1,57 1/s, kerületi sebessége 1,9 m/s.
Megjegyzés: A kerületi sebesség kiszámításakor feltettük, hogy a gyermek a körhinta szélén ül. Mivel a gyermek nem tömegpont, ezért a kerületi sebességére vonatkozó kérdést csak úgy értelmezhetjük, hogy mekkora a tömegközéppontjának a sebessége. Ekkor viszont a gyermek tömegközéppontja kerül a körhinta szélére, vagyis a gyermek testének fele túllóg a körhinta szélén, ami veszélyes és szigorúan tilos. Ezért a gyermek kerületi sebessége nagy valószínűséggel kisebb 1,9 m/s-nál.

M.1.56.
Adatok:
v = 18 km/h
r = 0,35 m
w = ?
f = ?

A kerékpár kerekének kerületi sebessége v = 18km/h = 5 m/s.
A szögsebesség a v=wr összefüggésből

$$w = 14{,}28\ 1/s.$$

A fordulatszám:

$$f = w/2\pi = 2{,}27\ 1/s.$$

A kerékpár kerekének szögsebessége 14,28 1/s, a fordulatszáma 2,27 1/s.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.1.57.

Adatok:

r = 0,115 m

f = 6000 ford/min = 100 1/s

a. v = ?
b. T = ?

a. A külső pont sebessége a korong külső pontjának kerületi sebessége:

$$v = r\,w = 2\pi fr = 72{,}3 \text{ m/s}.$$

b. A periódusidő az f = 1/T összefüggésből számítható.

$$T = 0{,}01 \text{ s}.$$

A korong külső pontjának kerületi sebessége 72,3 m/s, a periódusideje 0,01 s.

M.1.58.

Adatok:

r = 1,5 m

t = 5 s

n = 20

a. f= ?, T= ?
b. v = ?

a. Egy fordulat megtételéhez szükséges idő a periódusidő:

$$T = 5/20 = 0{,}25 \text{ s}.$$

A fordulatszám a periódusidő repicroka:

$$f = 1/T = 4 \text{ 1/s}.$$

A körmozgást végző test fordulatszáma 4 1/s, periódusideje 0,25 s.

b. A kerületi sebesség:

$$v = 2r\pi/T = 37{,}7 \text{ m/s}.$$

A körmozgást végző test sebessége 37,7 m/s.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.1.59.
Adatok:
r = 384 400 km = 3,844 10^8 m
T = 27,3 nap= 2,359 · 10^6 s
v=?

A Hold pályáját körpályájával írjuk le, így a kerületi sebességét a $v=2r\pi/T$ összefüggésből számoljuk.

$$v= 2r\pi/T = 1{,}02 \cdot 10^3 \text{ m/s} \approx 1 \text{ km/s}.$$

A Hold Föld körüli keringésének kerületi sebessége nagyjából 1 km/s. A Hold a Földdel együtt kering a Nap körül átlagosan hozzávetőlegesen 30 km/s sebességgel. Ez azt jelenti, hogy a Naphoz képest a Hold sebessége durván 29 km/s és 31 km/s között ingadozik.

M.1.60.
Adatok:
45. szélességi kör
T = 24 h = 86 400 s
R = 6370 km = 6,37 10^6 m
v= ?

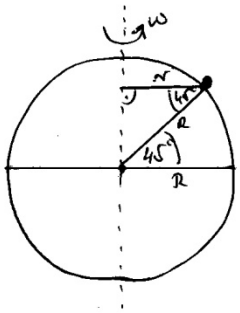
A Föld szögsebessége

$$w = 2\pi/T = 7{,}27\ 10^{-5} \text{ 1/s}.$$

A 45° szélességi körön a föld körüli keringés sugara $r = R\frac{\sqrt{2}}{2}$ = 4,5 10^6 m.
A kerületi sebesség

$$v = rw = R\frac{\sqrt{2}}{2}w = 327 \text{ m/s} = 1180 \text{ km/h}.$$

A 45°-os szélességi körön a Föld felszínén a kerületi sebesség 327 m/s.



1. ábra

M. 1.61.
Adatok:
r = 200 m
t = 12 s
s = 180 m
a. v= ?, w = ?
b. T=?, f=?

a. A kerékpáros sebessége:

$$v = s/t = 21 \text{ m/s}.$$

A szögsebesség:

$$w = v/r = 0{,}105 \text{ 1/s}.$$

A kerékpáros sebessége 21 m/s, a szögsebessége 0,105 1/s.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

b. A periódusidő az $w = 2\pi/T$ összefüggésből:

$$T = 59{,}8 \text{ s.}$$

A fordulatszám:

$$f = 1{,}67 \cdot 10^{-2} \text{ 1/s.}$$

A kerékpáros periódusideje 59,8 s, a fordulatszám $1{,}67 \cdot 10^{-2}$ 1/s.

M.1.62.
Adatok:
$\alpha = 120°$
$r = 3{,}2$ m
$\underline{t = 2 \text{ s}}$
$v = ?$
$w = ?$
$T = ?$
$f = ?$

A 120°-os szög a teljes kör harmada, így a periódusidő: $T = 15$ s.
A fordulatszáma:

$$f = 1/T = 1/15 \text{ 1/s.}$$

A szögsebessége:

$$w = 2\pi/T = 0{,}42 \text{ 1/s.}$$

A kerületi sebessége:

$$v = 1{,}34 \text{ m/s.}$$

A körhinta periódusideje 15 s, fordulatszáma 1/15 1/s, a szögsebessége 0,42 1/s, a sebessége 1,34 m/s.

M.1.63.
Adatok:
$w = 1{,}6$ 1/s
$v_A = 2$ m/s
$\underline{v_B = 2{,}5 \text{ m/s}}$
$\Delta r = ?$

A két pont sebességkülönbsége $\Delta v = 0{,}5$ m/s.
A sugarakat a $v=wr$ összefüggésből határozhatjuk meg.
Így

$$r_A = v_A/w = 1{,}25 \text{ m,}$$
$$r_B = v_B/w = 1{,}5625 \text{ m.}$$

A sugarak különbsége

$$\Delta r = r_B - r_A = 0{,}3125 \text{ m.}$$

A két körpálya sugarának különbsége 0,3125 m. Megjegyezzük, hogy mivel a körmozgást végző test minden egyes pontjának ugyanakkora a szögsebessége, így az $r = v/\omega$ összefüggést $\Delta r = \Delta v/\omega$ alakban is használhatjuk, amiből a két pályasugár különbségét közvetlenül is megkaphatjuk.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Gyakorló feladatok

M1.64: Legyen a két futó sebessége v_1 és v_2. A megtett útjaik: $s_1 = v_1 \cdot t$ és $s_2 = v_2 \cdot t$. A közöttük levő távolság a Pitagorasz-tétel alapján: $d = \sqrt{v_1^2 \cdot t^2 \quad + v_2^2 \cdot t^2} = t\sqrt{v_1^2 + v_2^2}$. A futók egymáshoz képesti (relatív) sebessége: $v_{rel} = \frac{d}{t} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$.

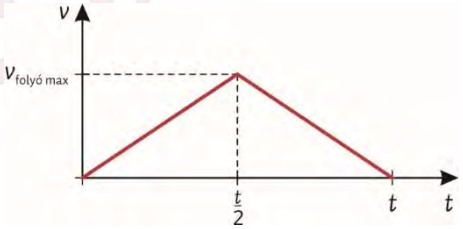
M1.65: Adatok: $t = 0{,}014\ s,\ v = 1530\frac{m}{s}$
A hang által megtett út a mérőműszertől a tengerfenékig és vissza: $s = v \cdot t = 21{,}4m$, tehát a tengerfenék $10{,}7m$ mélyen van, ami kisebb, mint a biztonságos hajózás mélysége.

M1.66: Adatok: $t_{max} = 20\ perc, t_{min} = 12\ perc, t_{köz} = 16\ perc$, út: s

A közepes sebességünk: $v_{köz} = \frac{s}{t_{átl}}$. $v_{min} = \frac{s}{t_{max}}$, $v_{min} = \frac{v_{átl} \cdot t_{átl}}{t_{max}} = \frac{8}{10} v_{átl} = 0{,}8 v_{átl}$, $v_{max} = \frac{s}{t_{min}}$, $v_{max} = \frac{v_{átl} \cdot t_{átl}}{t_{min}} = \frac{8}{6} v_{átl} = 1{,}33 v_{átl}$.

M1.67: Az indítás óta eltelt idő (a szökőéveket is beleszámítva): 12 504 nap, ami 1 080 345 600s. A távolság: 119,82 CsE , ami $1{,}7925 \cdot 10^{13} m$. A sebesség tehát: $v = \frac{1{,}7925 \cdot 10^{13} m}{1\,080\,345\,600 s} = 1{,}659 \cdot 10^4 \frac{m}{s} \approx 16{,}6 \frac{km}{s}$. A rádiójelek "utazási ideje" $t = \frac{1{,}7925 \cdot 10^{13} m}{3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}} = 5{,}975 \cdot 10^4 s = 16\ óra\ 35\ perc\ 50\ másodperc$. Tehát 2011. december 1-én 4 óra 35perc, 50 másodperckor érkeztek meg a jelek.

M1.68: Adatok: $v_{úszó} = 1{,}2\frac{m}{s}, v_{folyó\ max} = 1\frac{m}{s}, d = 150m.\ s = ?$
Az átjutási időt az úszó partra merőleges sebessége és a folyó szélessége határozza meg: $t = \frac{d}{v_{úszó}} = 125s$. Ábrázoljuk az úszó sodrás irányú sebességét! M1_59. ábra.



A sodrás irányába megtett út nem más, mint a grafikon alatti terület: $s = \frac{v_{folyó\ max} \cdot t}{2} = 62{,}5m$. Tehát az úszó 62,5 méterrel lejjebb ér partot a túloldalon.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

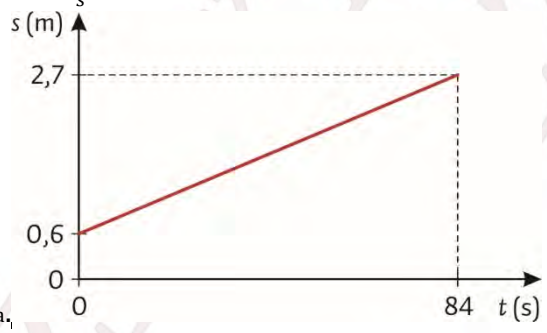
SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M1.69: Adatok: $d = 18{,}3m, h = 2{,}1m$ $v_{átlag} = 200\ \frac{km}{h} = 55{,}6\ \frac{m}{s}$ $t =$? A labda útja a Pitagorasz-tétellel számítható: $s = \sqrt{d^2 + h^2} = 18{,}4m,\ t = \frac{s}{v} = \frac{18{,}4\ m}{55{,}6\frac{m}{s}} \approx\ 330\ ms =$ 0,33 s. A teniszlabda hozzávetőlegesen egyharmad másodperc múlva csapódik a talajba.

M1.70: Ha az idő egységéül a 10 millió évet vesszük, akkor a sebesség: $v = \frac{5cm}{év} \cdot \frac{10^7}{10^7} = \frac{500km}{10millió\ év}$. Perces időléptékben (1 év = 365,24 nap = 525 946 perc ≈ 526 000 perc): $v = \frac{5cm}{év} \cdot \frac{\frac{1}{526\,000}}{\frac{1}{526\,000}} =\ 95\,\frac{nm}{perc}$. Az eredményekből látható, hogy az első mértékegységben kapott szám szemléletes értéket ad, a földtörténeti eseményekhez viszonyítható, elképzelhető folyamat, a másodikat azonban nem tudjuk hozzámérni földi eseményekhez. A tektonikai lemezek mérete 1000 km nagyságrendű, így nincs sok értelme nm méretű percenkénti elmozdulásokat megadni.

M1.71: Adatok: $v_{pók} = 25\,\frac{mm}{s} = 2{,}5\,\frac{cm}{s}$.

A szoba magassága $H = 270\ cm$. Legyen a koordinátarendszerünk y tengelye függőleges, kezdőpontja a talajon. A pók kezdő koordinátája ezek szerint $y_0 = 60cm$ A pók pozíciója koordinátákkal kifejezve: $y = y_0 + v_{pók} \cdot t, y = 60cm + 2{,}5\,\frac{cm}{s} \cdot t$ Mivel a pók csak $h = H - y_0 = 210cm$ utat tud megtenni, amihez a szükséges idő: $t' = \frac{210cm}{2{,}5\frac{cm}{s}} = 84s$, így a függvényünk értelmezési tartománya: $0 \le t \le 84s$. M1_62. ábra.



M1.72: A gyorsabb A autó sebessége legyen v_A, a másiké legyen v_B. A közöttük levő távolság időben lineárisan növekszik a két sebesség különbségével arányosan: $\Delta s = (v_A - v_B) \cdot t$. Ezt az utat a lassabb autó $t_{lemaradás} = \frac{(v_A - v_B)}{v_B} \cdot t$ idő alatt teszi meg. A képletet úgy is értelmezhetjük, hogy ha az A autó x %-kal gyorsabb, akkor a B autó lemaradási ideje a találkozás óta eltelt idő x %-a lesz.

M1.73: Adatok: $v_0 = 0{,}8\ \frac{m}{s}, s = 28{,}35\ m, r = 1{,}83\ m$.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Feltételezzük, hogy a jég egyenletesen fékezi a követ, ezért alkalmazhatjuk az egyenletesen változó mozgás összefüggéseit. Tekinthetjük fordított irányba végbemenőnek a folyamatot: a ház közepéből állandó gyorsulással indul a kő és az indítási pontnál lesz a sebessége $0{,}8\frac{m}{s}$. Így az $s = \frac{a}{2}t^2, v_0 = a \cdot t$ összefüggésekből: $a = \frac{v_0^2}{2 \cdot s} = 0{,}0113\frac{m}{s^2}$. A legrövidebb távolság, amennyire el kell jutni a kőnek $s_1 = s - r = 26{,}52\ m$, a leghosszabb: $s_2 = s + r = 30{,}18\ m$. A hozzájuk tartozó kezdősebességek szintén az alapösszefüggésekből $\left(s = \frac{a}{2}t^2, v_0 = a \cdot t\right)$ számítható: $v_1 = \sqrt{2 \cdot a \cdot s_1} = 0{,}774\frac{m}{s,}$ és $v_2 = \sqrt{2 \cdot a \cdot s} = 0{,}826\ \frac{m}{s}$. Tehát Timi ± 0,026 m/s-ot tévedhet.

M1.74: Adatok: $V = 400\ l = 0{,}4\ \mathrm{m}^3,\ A = 2\ cm^2 = 2 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}^2,\ v = 1{,}3\ \frac{m}{s}$ $t =$?

Tételezzük fel, hogy a locsolócső olyan hosszú, hogy a 400 l víz mind benne van. Akkor ezt a vizet egy $l = \frac{V}{A}$ hosszúságú vízhengernek képzelhetjük el. Ennek a vízhengernek a végén lévő víz t idő alatt kell, hogy elérjen a kifolyási pontig: $t = \frac{l}{v} = \frac{V}{A \cdot v} = 1538\ s$. Tehát 25 perc 38 másodperc alatt telik meg a hordó.

M1.75: Áginak $t_{\text{Á}} = \frac{1100m}{1{,}5\frac{m}{s}} = 733s$, vagyis 12 perc és 13 másodperc a menetideje, tehát 19:17::13-kor érkezik. Péter $t_P = \frac{1300m}{1{,}5\frac{m}{s}} = 867s$, azaz 14 perc és 27 másodperc alatt, vagyis 19:04::27-kor érkezik a színház elé. Tehát Péter 12 perc 46 másodpercet vár Ágira. Ági a megbeszélt időhöz képest 2 perc 13 másodpercet késik.

M1.76: Adatok: $v_{\text{Á}gi} = 1{,}2\frac{m}{s}, v_{Péter} = 1{,}5\frac{m}{s}, v_{eb} = 12\frac{m}{s}\ \ s = 400\ m$. A megoldás egyik lehetséges útja, hogy kiszámoljuk minden egyes oda és vissza futott, egyre rövidülő szakasz hosszát és ezeket megpróbáljuk összeadni. Itt egy matematikai problémába (mértani sor) ütközünk, amit, ha ismerünk, felhasználhatunk a megoldáshoz. Mi most egy másik megoldási módot követünk. A kutya által lefutott út kiszámításához a sebességét és a futás idejét kell ismernünk (feltételezzük, hogy egyenletesen fut végig, a forduláshoz szükséges időket elhanyagoljuk). A sebessége adott, tehát csak azt kell megállapítani, hogy mennyi ideig fut. Az eb Ági és Péter találkozásáig fut, vagyis: $v_{\text{Á}gi} \cdot t + v_{Péter} \cdot t = 400m$, amiből $t = 148{,}1s$. Tehát az eb által megtett teljes út: $s_{eb} = v_{eb} \cdot t =$1777 m.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M1.77: Adatok:$t_{ind} = 17{:}16,\ t_{érk} = 18{:}18, v_{ut} = 320\frac{km}{h}, s = 214km.$

A vonat átlagsebessége: $v_{átl} = \frac{s}{t_{ind}-t_{érk}} = 207\ \frac{km}{h}$. A vonat az utazósebességgel $t = \frac{s}{v_{ut}} = 0{,}669\ óra,$ vagyis nagyjából 40 $perc$ alatt érne Lille-be.

M1.78: Adatok: $v_1 = 60\frac{km}{h}, l_1 = 360m, v_2 = 72\frac{km}{h}, l_2 = 420m$.

A szerelvények megtett útjának kiszámításához (mivel a sebességeket ismerjük) az „előzés" időtartamának ismerete szükséges. Az előzés folyamatát úgy is értelmezhetjük, hogy a gyorsabb vonat a lassabbhoz viszonyított relatív sebességével teszi meg a két szerelvény hosszának összegével megegyező távolságot. A relatív sebesség: $v_{rel} = v_2 - v_1 = 12\frac{km}{h},$ a teljes távolság: $l = l_1 + l_2 = 780m$, tehát az előzés ideje: $t_{el} = \frac{l}{v_{rel}} = 0{,}065óra = 3{,}9perc$. Ennyi idő alatt a lassabb szerelvény $s_1 = v_1 \cdot t_{el} = 3{,}9km$-t, a gyorsabb $s_2 = v_2 \cdot t_{el} = 4{,}68km$-t tesz meg. (A kettő különbsége éppen a két szerelvény együttes hossza.)

M1.79: Adatok $v_1 = 18\frac{mm}{s}, v_1 = 22\frac{mm}{s}, s = 32cm, v_2' = 16\frac{mm}{s}$.
A gyorsabb hangya a morzsát $t = \frac{s}{v_2} = 14{,}55s$ alatt éri el. Ezalatt a lassabb $s_1 = v_1 \cdot t = 26{,}2cm$ távolságot tesz meg, tehát a közöttük lévő távolság ekkor: $\Delta s = s - s_1 = 5{,}8cm$. Ezt a távolságot a hátul levő, de most már gyorsabb hangya a $v_{rel} = v_1 - v' = 2\frac{mm}{s}$ egymáshoz képesti, relatív sebességével $t' = \frac{\Delta s}{v_{rel}} = 29s$ alatt teszi meg. A kezdetben gyorsabb hangya a morzsát $20s$ alatt megeszi, tehát a másiknak nem marad semmi, amikor az utoléri.

M1.80: A mozgás során a kő kétszer lesz az emelkedési magasság felénél. Természetesen azt várjuk, hogy a két sebesség azonos nagyságú, de ellentétes irányú lesz! A függőlegesen feldobott test emelkedésének maximális magassága: $h_{max} = \frac{v_0^2}{2 \cdot g}$, ennek fele: $h = \frac{v_0^2}{4 \cdot g}$. Ebben a magasságban $h = v_0 \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$ alapján $t_1 = \frac{v_0 - \frac{v_0}{\sqrt{2}}}{g},$ és $t_2 = \frac{v_0 + \frac{v_0}{\sqrt{2}}}{g}$ időpontban lesz. A két sebesség a $v = v_0 - g \cdot t$ összefüggésből számítható: $v_1 = \frac{v_0}{\sqrt{2}}$ és $v_1 = -\frac{v_0}{\sqrt{2}}$.. Másodfokú egyenlet használata nélkül is megoldhatjuk a feladatot, ha kihasználjuk, hogy a kő felfelé és lefelé történő mozgása megfordítható (reverzibilis) folyamat. Úgy változtathatjuk meg a kérdést, hogy a h_{max} induló kőnek mennyi lesz a sebessége az esési magasság felénél, ha v_0 sebességgel csapódik a talajba. Két egyenletet írhatunk fel: $v_0 = \sqrt{2gh_{max}}$ és $v = \sqrt{gh_{max}}$. A két egyenlet összevetéséből láthatjuk, hogy $v = \frac{v_0}{\sqrt{2}}$. Ezek után még azt kell észrevenni, hogy a kő kétszer halad el az esési magasság

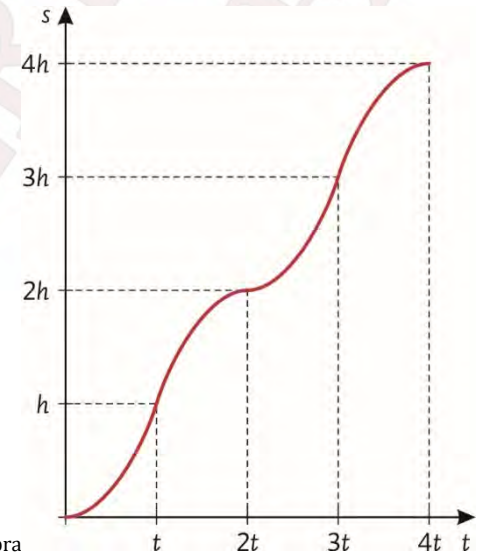
KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

felénél (egymással ellentétes irányban). Ezért a teljes megoldás: $v = \pm\frac{v_0}{\sqrt{2}}$.
(Érdemes megjegyezni, hogy amikor egy fizikai feladat megoldása során másodfokú egyenletből kapjuk meg a megoldást, akkor gyakran mind a két gyöknek értelmes jelentése van.)

M1.81: A Holdon számított esési idő: $t_{esés} = \sqrt{\frac{2\cdot h}{g_H}}$=1,37s. Ennyi az emelkedési idő is, tehát a labda 2,74 másodpercenként pattan a Holdon.

M1.82: Adatok: $v_G = 15\frac{m}{s}, v_D = 10\frac{m}{s}$.
Először számítsuk ki, hogy milyen magasságban történik az ütközés. Dávid labdája ütközés nélkül $h_D = \frac{v_D^2}{2\cdot g} = 5m$ magasságig jutna, ezért az ütközés $h_{ü} = 2{,}5m$ magasságban következik be. Mennyi idő alatt ér ide Gábor labdája? Az ő labdájának emelkedési ideje: $t_{G,em} = \frac{v_G}{g} = 1{,}5s$, maximális magassága $h_G = \frac{v_G^2}{2\cdot g} = 11{,}25m$.
Innen kell $h' = 11{,}25m - 2{,}5m = 8{,}75m$-t esnie.
Ehhez $t_{G,es} = \sqrt{\frac{2\cdot h'}{g}} = 1{,}32s$ szükséges. Tehát Gábor labdája $t_G = 2{,}82s$ alatt ér a találkozási pontba. Dávid labdájának ütközés nélküli emelkedési ideje 1 s lenne, továbbá ha 5 méterről visszaesne 2,5 méterig, akkor ahhoz $t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0{,}71$ s-ra lenne szükség. Ez azt jelenti, hogy Dávid labdája az eldobást követően (1 s – 0,71 s) = 0,29 s múlva lesz az ütközés helyén, tehát Dávidnak (2,82 s – 0, 29 s) = 2,53 s-mal Gábor után kell feldobnia a labdáját. (A megoldás során az egyszerűbb számítások kedvéért g = 10 m/s^2-tel számoltunk, továbbá feltettük, hogy mindkét fiatalember ugyanarról a helyről, függőlegesen dobja fel a labdáját.)



M1.83: M1.75. ábra

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M1.84: Adatok: $v_0 = 12\frac{m}{s}, \Delta s = 1m.$

A feldobott kő egyenletesen lassuló mozgást végez, majd gyorsulva visszaesik (persze felfelé is, lefelé is, sőt a pálya legtetején is ugyanakkora a gyorsulása, ami éppen a nehézségi gyorsulás: g = 9,81 m/s^2), ezért pályájának a tetején a leglassabb. Ha a légellenállástól eltekintünk, akkor a leglassabb 1 méter első felében 0,5 métert emelkedik a kő, majd ugyanolyan mozgással esik visszafelé 0,5 métert. Így a leglassabb egy méteres szakasz elején és végén ugyanakkora nagyságú, de ellentétes irányú a kő sebessége: $v = \sqrt{2gh}$ = 3,13. Ennek a sebességnek a fele a kérdéses átlagsebesség: $v_{átlag} = \frac{v}{2} = 1{,}57$ m/s.

M1.85: A radír $h = 75cm$ magasságból $t = \sqrt{\frac{2\cdot h}{g}} = \sqrt{\frac{2\cdot 0{,}75m}{9{,}81\frac{m}{s^2}}} = 0{,}391\ s$ alatt esik a földre. Ennyi idő alatt kell megtennie vízszintesen $2 \cdot h = 1{,}5m$ távolságot. Ehhez $v = \frac{2\cdot h}{t} = \frac{1{,}5m}{0{,}391s} = 3{,}84\frac{m}{s}$ vízszintes kezdősebesség szükséges. Érdekességként említjük meg, hogy a test olyan sebességgel éri el a padlót, melynek a függőleges összetevője is ugyanekkora (45°-os sebességvektorral csapódik a földbe). Ez nem véletlen, hanem annak a következménye, hogy a test vízszintes sebessége állandó, függőleges sebességének átlaga pedig a végsebesség fele, továbbá a függőleges irányú elmozdulás is fele a vízszintes elmozdulásnak.

M1.86: Adatok: $H = 100\ cm, v_0 = 1{,}8\ \frac{m}{s}$.

Határozzuk meg a mozgás teljes idejét a függőleges irányú mozgásból: függőlegesen kezdősebesség nélküli szabadesés történik, az esés ideje: $t_{esés} = \sqrt{\frac{2\cdot H}{g}} = 0{,}452\ s$. Vízszintes irányban az elmozdulás az idővel lineárisan nő, tehát a fél esésidő alatt megtett út: $x = v_0 \cdot \frac{t_{esés}}{2} = 0{,}407\ m$ Függőlegesen $\frac{t_{esés}}{2}$ idő alatt megtett út: $y = \frac{g}{2} \cdot \left(\frac{t_{esés}}{2}\right)^2 = 0{,}25m.$ A teljes elmozdulás nagysága: $r = \sqrt{x^2 + y^2} = 0{,}48\ m$

M1.87: A repülési időt a függőleges kezdősebesség (v_y) határozza meg. $t_{rep} = 2 \cdot t_{em} = 2 \cdot \frac{v_y}{g}$. Ebből $v_y = \frac{t_{rep}\cdot g}{2} \approx 5\frac{m}{s}$. 45°-os eldobásnál a vízszintes sebesség megegyezik a függőleges kezdősebességgel, ezért $d = v_y \cdot t_{rep} \approx 5m$. Egyszerű geometriai meggondolásból adódik, hogy $v_0 \approx \sqrt{2} \cdot 5\frac{m}{s} \approx 7{,}1\frac{m}{s}$.

M1.88: Adatok: $h_{ablak} = 1m, h_{párkány} = 1m, \Delta t = 0{,}19s\ H$ =?
Az ablak elé érkező vízcsepp sebessége a $h_{ablak} = v \cdot t + \frac{g}{2} \cdot t^2$ összefüggésből számítható, $v = 4{,}33\ \frac{m}{s}$. Kezdősebesség nélkül, szabadon eső test ezt a sebességet

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$h' = \frac{v^2}{2 \cdot g} = 0{,}96\ m$ esés után éri el. Tehát az ereszcsatorna magassága: $H = h' + h_{ablak} + h_{párkány} = 2{,}96\ m$.

M1.89: Adatok: $h = 276\ cm, V = 1\ l, d = 4\ mm$.
Egy csepp leesésének ideje alatt három csepp víz hagyja el a csatornát. Az esési idő: $t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} = 0{,}75s$. Vagyis $0{,}25s$ időközönként esik le egy csepp. Egy csepp térfogata: $V_{csepp} = \frac{4 \cdot d^3 \cdot \pi}{3 \cdot 2^3} = 33{,}5mm^3$ Egy liter víz $n = \frac{10^6 mm^3}{33{,}5mm^3} \approx 29800$ cseppből áll. Mivel másodpercenként 4 csepp esik le, ezért $7460s$ alatt esik le egy liter víz. Ez 2 óra 4 perc 20 másodperc.

M1.90: Első megoldás: Most egy lépésünk hosszát tekintjük a hosszúság mértékegységének és ezzel fogjuk kifejezni a villanyoszlop hosszát. Ez persze gondot okozhat más, méterekben kifejezett távolságokkal való összehasonlításban. Természetesen, ha lehetőségünk lesz lépéshosszunkat (a továbbiakban lh-val jelöljük) pontosan lemérni és azt méterben kifejezni, akkor utólag a villanyoszlop hosszát is meg tudjuk majd adni méterben is. Legyen L az oszlop hossza (lh-ban kifejezve), v_o az oszlop sebessége $\frac{lh}{li}$mértékegységben, v_s a saját sebességünk szintén $\frac{lh}{li}$ mértékegységben. Az időt is sajátos mértékrendszerben, lépésidőben (li) adjuk meg. Így a sebesség mértékegysége lépéshossz/lépésidő = lh/li. A feladat második mondatában megfogalmazott állítást egy egyenletbe tudjuk átírni: az oszlop végétől az elejéig történő eljutás ideje a saját adatainkkal kifejezve: $t_1 = \frac{22}{v_s}$, ugyanez az idő az oszlop adataival: $t_1 = \frac{22-L}{v_o}$. A két egyenlet jobb oldalát egyenlővé téve kapjuk, hogy
(1) $\frac{22}{v_s} = \frac{22-L}{v_o}$.
A feladat harmadik mondata szerint, elejétől végéig haladva az oszlop mellett az eltelt idő saját adatainkkal kifejezve: $t_2 = \frac{14}{v_s}$, ugyanez az idő az oszlop adataival: $t_2 = \frac{L-14}{v_o}$. Az utóbbi két egyenlet összevetéséből kapjuk, hogy
(2) $\frac{14}{v_s}, = \frac{L-14}{v_o}$. Most végül két egyenletünk, (1) és (2) van három ismeretlennel és úgy tűnik, hogy nem is tudunk több összefüggést felírni. Azonban ha a két egyenletet elosztjuk egymással, akkor a szimmetria miatt a sebességek kiesnek és csak L marad:
$\frac{22}{14} = \frac{22-L}{L-14}$. Ennek a magoldása: $L = 17{,}11$. Vagyis az oszlop hossza 17,11 lépéshossz. Második megoldás: Amíg mi oda-vissza 22 + 14 = 36 lépést tettünk meg, addig az oszlop 22 – 14 = 8 lépéssel került előbbre. Ez azt jelenti, hogy mi 36/8 = 9/2 = 4,5-szer gyorsabban mozgunk, mint az oszlop. Tehát ha előrefelé mi 22 lépést tettünk, akkor az oszlop csak 22·2/9 = 44/9 lépést haladt, vagyis az oszlop hossza L = 22 – 44/9 = 154/9 = 17,11 lépés. Ugyanerre az eredményre vezet

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

a hátrafelé történő mozgáson alapuló számítás is. Amíg mi 14 lépést tettünk meg, addig az oszlop 14·2/9 = 28/9 lépést, tehát az oszlop hossza: L = 14 + 28/9 = 154/9 = 17,11 lépés.

M1.91. Adatok: $v_v = 20\frac{km}{h},\ v_f = 5\frac{km}{h}, s_k = 40km, s_h = 22\ km.$

A hajó parthoz viszonyított sebessége: $v_p = v_v - v_f = 15\frac{km}{h}$. A kikötőbe $t = \frac{s_k}{v_p} = 2\frac{2}{3}h = 2$ óra 40 perc alatt ér. A híd felé $v_f = 5\frac{km}{h}$ sebességgel halad, így $t' = \frac{s_h}{v_p'} = 4{,}4h$ = 4 óra 24 perc a menetidő.

M1.92: Adatok: $v_v = 23\frac{km}{h}, v_f = 2\frac{km}{h}$.

A hajó parthoz viszonyított sebessége $v_p = 21\frac{km}{h}$, ilyen sebességgel kell haladnia a kerékpárosnak is.

M1.93: Adatok: $h = 0{,}75\ m, v_x = 1{,}2\ \frac{m}{s}, t = 0{,}3\ s.$

Vízszintes irányú sebessége nem változik, függőlegesen szabadon esik. h magasságból $t' = \sqrt{\frac{2\cdot h}{g}}$ =0,39 s alatt ér a padlóra a test, tehát megválaszolható a kérdés, hiszen a dobókocka 0,3 s múlva még a levegőben lesz. A függőleges kezdősebesség nélkül szabadon eső dobókocka sebessége 0,3 s múlva $v_y = g \cdot t =$ 2,94 $\frac{m}{s}$. A két sebességvektor merőleges egymásra, ezért a Pitagorasz-tétellel számítható az összegük nagysága, ami a test sebességének nagysága: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 3{,}18\ \frac{m}{s}$.

M1.94:

a: A vízszintesen eldobott test összetett mozgást végez: vízszintesen $(+x)$ irányban állandó sebességgel halad, függőlegesen $(+y)$ irányban szabadon esik. A pályája parabola. A két mozgást leíró egyenletek: $x = v_0 \cdot t, y = \frac{g}{2}t^2$. Az $x = y$ állapot időpontja a $v_0 \cdot t = \frac{g}{2}t^2$ egyenletből számítható, $t = \frac{2\cdot v_0}{g}$. Ennyi idő alatt $x = v_0 \cdot \frac{2\cdot v_0}{g} = \frac{2\cdot v_0^2}{g}$ a vízszintes elmozdulás és ugyanennyi a függőleges irányú is. Létezik ilyen pont.

b: A teljes elmozdulás: $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2} \cdot \frac{2\cdot v_0^2}{g}$.

M1.95: Adatok: $v = 5\ \frac{m}{s}, h = 3\ m.\ d$ =?

A levegőben töltött időt a szabadesésből számíthatjuk ki: $t = \sqrt{\frac{2\cdot h}{g}} = 0{,}78\ s$

A vízszintes irányú elmozdulás: $x = v \cdot t = 3{,}91\ m$. A teljes elmozdulás nagysága: $d = \sqrt{x^2 + h^2} = 4{,}93\ m$.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M1.96: Adatok: $s = 80\ cm$, $a = 8\ \frac{m}{s^2}$. t =?

Mivel a gyorsulás és lassulás számértéke azonos, a mozgás szimmetrikus lesz. A legrövidebb időt úgy érhetjük el, hogy az út feléig gyorsul, onnantól lassul a munkadarab. A két részfolyamat egyenlő idő alatt játszódik le.

A gyorsítás ideje az $\frac{s}{2}$ távolságon: $t_{gy} = \sqrt{\frac{2 \cdot \frac{s}{2}}{ga}} = 0{,}316\ s$. Ennyi a lassítás ideje is, ezért a kérdezett idő $t = 0{,}632\ s$.

M1.97: Adatok: $v = 6\frac{m}{s}, \alpha = 45°, h\ \alpha m$ A rigó (és a kukac) sebességének vízszintes és függőleges komponenseit az egyenlő szárú derékszögű háromszöggel való hasonlóság alapján határozhatjuk meg. Ez alapján $v_x = v_y = \frac{6}{\sqrt{2}}\frac{m}{s}$ = 4,24 m/s. A kukac $t_1 = \frac{v_y}{g} = 0{,}432\ s$-ig emelkedik $h' = \frac{v_x^2}{2 \cdot g} = 0{,}92\ m$-t. Onnan $t_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot (h+h')}{g}}$=1,62 s alatt ér földet. Tehát összesen $t = t_1 + t_2 = 2{,}05\ s$ alatt ér földet. Ennyi idő alatt vízszintesen $x = v_x \cdot t = 8{,}7\ m$ az elmozdulása. *Megjegyzés:* Ebben a feladatban is elhanyagoltuk a légellenállást, vagyis olyan körülményeket tekintettünk közelítőleg igaznak, ami legfeljebb nagy vákuumban, vagyis légüres térben teljesülne. A kukac olyan kicsi és olyan könnyű, hogy a rá ható légellenállási erő miatt durván nem teljesülnek a kiszámított értékek még akkor sem, ha a szegény rigó teljes szélcsendben ejti el az eleségét.

M.1.98.
Adatok:
f = 12 1/perc = 0,2 1/s
r = 0,25 m

a. w = ?
b. v = ?

a. A szögsebesség

$$w = 2\pi f = 1{,}26\ 1/s.$$

A kerék szögsebessége 1,26 1/s.

b. A kerületi sebesség

$$v = wr = 0{,}314\ m/s.$$

A kerék kerületi sebessége 0,314 m/s.

M.1.99.
Adatok:

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

f= 20 1/perc = 0.333 1/s
r = 30 m

a. A periódusidő

$$T = \frac{1}{f} = 3 \text{ s.}$$

A kerületi sebesség

$$v = rw = r2\pi f = 62{,}8 \text{ m/s.}$$

A lapátok periódusideje 3 s, míg a kerületi sebesség 62,8 m/s.

b. A centripetális gyorsulás

$$a_{cp} = v^2/r = 132 \text{ m/s}^2.$$

A lapátok végpontjainak centripetális gyorsulása 132 m/s^2.

M.1.100.

Adatok:

v = 54 km/h = 15 m/s

a = 2,4 m/s^2

a. r =?
b. w = ?, f =?, T=?

a. A motorkerékpár gyorsulása egyben a centripetális gyorsulás.

$$a_{cp} = v^2/r,$$

ahonnan

$$r = 94 \text{ m.}$$

A körpálya sugara 94 m.

b. A szögsebességet az $a_{cp} = \omega^2 r$ összefüggésből számíthatjuk ki:

$$\omega = 0{,}16 \text{ 1/s.}$$

A fordulatszám:

$$f = \omega/2\pi = 0{,}0255 \text{ 1/s.}$$

A periódusidő:

$$T = 1/f = 39{,}3 \text{ s.}$$

A szögsebesség 0,16 1/s, a fordulatszám 0,0255 1/s, keringési idő 39,3 s.

M.1.101.

Adatok:

v = 36 km/h

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

a. Az autóhoz képest a kerék kerületének minden pontja v = 36 km/h sebességgel halad (képzeletben emeljük fel az autót az útról), így a sárdarab maximális sebessége 36 km/h.
b. A talajhoz képest a kerék talajjal érintkező pontjának sebessége nulla (a kerék a talajhoz tapad), míg a kerék legfelső pontjának a sebessége 2v = 72 km/h. A kerék közbülső pontjai 72 km/h sebességnél kisebb sebességgel mozognak. Így a sárdarab sebessége a földhöz képest akkor maximális, ha a legfelső pontról válik le.
Megjegyzés: A megoldásban a sebességösszeadás elvét alkalmaztuk. A földhöz képesti keréksebességet úgy kapjuk meg, hogy az autó haladási sebességéhez hozzáadjuk az autóhoz képesti körmozgásból származó sebességet. A tiszta gördülés feltétele az, hogy a kerék kerületi sebessége egyezzen meg a jármű haladási sebességével.

M.1.102.
A jelenség bekövetkeztekor a kerekek képe tökéletesen ugyanazt a képet mutatja, ekkor a mozgás észrevehetetlen, álló kereket látunk. Az egy küllőnyi elmozdulást 1/24 s alatt tette meg a kerék, amely 2π/12 rész elmozdulást jelent. Ekkor

$$w = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = 2\pi/12 \ / \ 1/24 = 12{,}56 \ 1/s.$$

A jelenséget 12,56 1/s szögsebességű kerék esetén láthatjuk. Ugyanezt az álló kerék-képet látjuk akkor is, ha ennek a szögsebességnek egész számú többszörösével forog a kerék.
Megjegyzés:
Ha w≠12,56 1/s, azonban ehhez közeli érték, akkor a filmen úgy látszik, mintha előre vagy visszafelé forogna igen lassan a kerék. Kicsit kisebb szögsebességeknél látszólag visszafelé, kissé nagyobbaknál előrefelé forog lassan a kerék.

M.1.103.

f_1 = 33 1/3 1/perc = 0,556 1/s

f_2 = 45 1/s = 0,75 1/s

r_1 = 0,15 m

r_2 = 0,085 m

T=?

w=?

v = ?

A periódusidő

nagyobb méretű hanglemezre: $T_1 = 1/f_1 = 1{,}8$ s,

kisebb méretű hanglemezre $T_2 = 1/f_2 = 1{,}33$ s.

A szögsebességek:

$$w_1 = 2\pi f_1 = 3{,}49 \ 1/s,$$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$w_2 = 2\pi f_2 = 4{,}71$ 1/s.

A kerületi sebességek:

$v_1 = r_1\omega_1 = 0{,}52$ m/s
$v_2 = r_2\omega_2 = 0{,}4$ m/s.

A periódusidők: $T_1 = 1{,}8$ s, $T_2 = 1{,}33$ s,
a szögsebességek: $w_1 = 3{,}49$ 1/s, $w_2 = 4{,}71$ 1/s,
a kerületi sebességek: $v_1 = 0{,}52$ m/s, $v_2 = 0{,}4$ m/s.

M.1.104.

Adatok:

f= $15.000\frac{1}{min} = 250\,\frac{1}{s}$

r= 4,445 cm = 4,445 * 10^{-2}m

---

w= ?

v= ?

A szögsebesség w= 2π f öszsefüggés alapján

$$w = 1570\,\frac{1}{s}$$

A kerületi sebesség v= wr összefüggésből

$$v = 69{,}8\,\frac{m}{s} \approx 250 \text{ km/h!}$$

A merevlemez szögsebessége $1570\frac{1}{s}$, míg kerületi sebessége $69{,}8\,\frac{m}{s}$.

M.1.105.

Adatok:

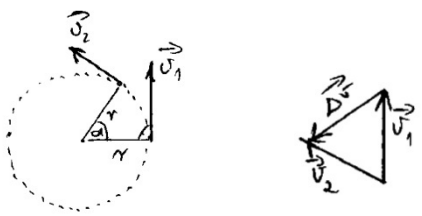
r = 4 m

w = 0,3 1/s

a. Δv_1 = ?
b. Δv_2 =?

a. A körhintán ülő gyermek kerületi sebessége: v = rω = 1,2 m/s.

Rajzoljuk fel a kérdezett pontokban a kerületi sebességeket!



A sebességváltozás vektor a v_1 és v_2 vektorokkal szabályos háromszöget alkot, így

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$\Delta v_1 = 1{,}2$ m/s.

b. A 90°-os elfordulás esetén az ábra alapján $\Delta v_2 = \sqrt{2}\, v_1 = 1{,}7$ m/s.



A sebességváltozás nagysága $\Delta v_2 = 1{,}7$m/s.

M.1.106.

Adatok:

R_F= 150 millió km= $1{,}5 \cdot 10^8$ km

T_F= 1év

R_n = 2875 millió km= $2{,}875 \cdot 10^9$ km

T_n= ?

A bolygók Nap körüli mozgására érvényes Kepler III. törvénye:

$$\frac{r_n^3}{r_F^3} = \frac{T_n^2}{T_F^2}$$

Az összefüggésben behelyettesítve:

T_n= 83,9 év.

Az Uránusz 83,9 év alatt kerüli meg a Napot.

M.1.107.

Adatok:

T_c= 4,6 év

T_F= 1 év

R_F= 150 millió km= $1{,}5 \cdot 10^8$ km

R_c= ?

A bolygók Nap körüli mozgására felírható Kepler III. törvénye:

$$\frac{R_c^3}{R_F^3} = \frac{T_c^2}{T_F^2}$$

A Ceres pályasugara:

R_c= $4{,}15 * 10^8$ km

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

A Ceres Naptól való átlagos távolsága $4{,}15 \cdot 10^8$ km.

M.1.108.

Adatok:

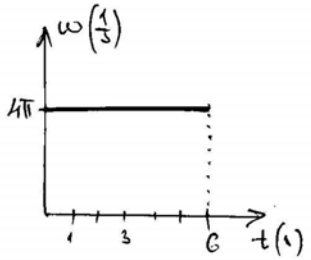
r=
0,36
m

a,

b, w-t grafikon

c, s-t grafikon

a, A kerék szelepe egyenletes körmozgást végez, mert a mozgás folyamán a szelep ugyanakkora időtartamok alatt ugyanakkora szöggel fordul el.



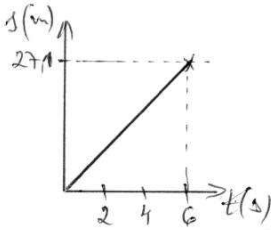
b, A szögsebesség:

$w = \frac{D\alpha}{Dt} = \frac{25\pi - \pi}{6} = 4\pi \frac{1}{s}$

A szögsebesség nagysága $4\,\pi$, a mozgás folyamán állandó.

c, A megtett út 6 s alatt

$s = \alpha r = \omega r t = 27{,}1$ m.



KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Tesztfeladatok

1.109	1.110	1.111	1.112	1.113
D)	B)	D)	C)	D)
1.114	1.115	1.116	1.117	1.118
B)	D)	C)	C)	A)
1.124	1.125	1.126	1.127	1.128
D)	C)	D)	C)	B)
1.119	1.120	1.121	1.122	1.123
C)	B)	C)	B)	B)
1.129	1.130	1.131		
A)	D)*	E)**		

* Kepler harmadik törvénye értelmében, ha a pályasugár kétszeresére nő, akkor a keringési idő négyzete 8-szor akkora lesz, mert a keringési idő négyzete egyenesen arányos a pályasugár köbével ($2^3 = 8$). Tehát a keringési idő $2\sqrt{2}$-szeresére növekszik.

** Evidens, hogy felszálláskor és pályamódosításokkor szükség van a hajtóművekre. Amikor az űrhajó szabadon kering a Föld körül, akkor lényegében szabadesést végez, úgy is fogalmazhatunk, hogy körbeesi a Földet. Az ilyen űrhajókat műholdaknak is nevezik, a Föld holdjának nincsenek is hajtóművei, mégis milyen régóta szabadon kering a Föld körül. Leszállás előtt olyan pályamódosításokat hajtanak végre, hogy az űrhajó igen lapos pályán jusson el a Föld légkörébe. Amikor a leszállópályára történő pályamódosítás megtörtént, akkor kikapcsolják a hajtóműveket, és erősen fohászkodnak, hogy jól sikerüljön a leszállás. Jogos az izgalom, mert az űrhajó alig térhet el a kiszámított ideális légkörbe érkezési szögtől. Ha kissé meredekebben jön, akkor a talajba csapódik, ha kissé laposabban érkezik, akkor úgy pattan vissza a Föld légköréről, mint ahogy a sima vízfelületen pattognak az eldobott lapos kavicsok. A légkörbe érkező űrhajóra ható közegellenállási súrlódás olyan erős, hogy a leszálló egység világító tűzgömbként jelenik meg. Végül ejtőernyőkkel fékezik le a meglehetősen kicsiny méretű leszálló kabin sebességét. Az űrrepülőgépek sem használták a hajtóműveiket leszállás közben, hanem vitorlázó repülőgép üzemmódban szálltak le, majd végül talajt érve a leszállópályán nyitották ki a fékező ernyőiket. Nagyon szép képet készítettek a Nemzetközi Űrállomáson tartózkodó űrhajósok az Atlantis űrrepülőgép 2011-es utolsó útjának sikeres visszatéréséről:

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

http://en.wikipedia.org/wiki/File:Space_Shuttle_Atlantis_in_the_sky_on_July_21,_2011,_to_its_final_landing.jpg

Esszékérdések

1.132. Autó mozgásának elemzése városi forgalomban

Elemezzük egy autó mozgásfajtáit egy parkolóból való elindulástól a városi forgalomban történő mozgás során a kiindulási helyre történő visszaérkezésig. Lehetséges, hogy utunk során veszélyhelyzetben gyors manőverre kényszerülünk, araszolunk a dugóban. Milyen kinematikai mennyiségekkel írható le a mozgás? Ezeknek milyen tipikus számértékei fordulhatnak elő a városi közlekedésben?

Értékelési szempontok:

változó mozgás

pillanatnyi sebesség, átlagsebesség az egész útra, két megállás (piros lámpa) közötti szakaszra, sebesség nagysága (néhány km/h- 50 km/h), sebességvektor irányának változása pl. kanyarodáskor,

elmozdulásvektor nagysága nulla,

gyorsulás, lassulás, vészfékezéskor nagy lassulás, nem állandó gyorsulás, pl. sebességváltáskor.

1.133. Átkelés folyón, csónakkal

Egy folyón szeretnénk átkelni úgy, hogy mindig a partra merőlegesen evezünk. A folyó sodrása a partoknál nulla, közepéig lineárisan nő. Hol köt ki a csónak? Milyen mozgásformák jelennek meg az átkelés során? Milyen a mozgás pályája?

Értékelési szempontok:

A csónak sodrás irányában a kiindulási hely alatt, a túloldalon fog kikötni. A partra merőleges sebesség állandó marad, a part menti sebesség lineárisan nő, vagyis a sodrás irányában a közepéig gyorsul, utána lassul a csónak. A pálya két parabolaívből áll. A folyó menti átlagsebesség a folyó maximális (középen levő) sebességének a fele. Az átkelés idejét a folyó szélessége és csónak sebessége határozza meg. A teljes elmozdulás a folyó szélessége és a folyás menti elmozdulásból Pitagorasz-tétellel számítható.

1.134. *A kerékpározás kinematikája*

Vegye számba, hogy kerékpározás közben milyen mozgásfajták lépnek fel! Vizsgálja az egyes alkatrészeknek, a kerékpár vázának és a kerékpározó személynek a mozgását!

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Értékelési szempontok: Az egyenletes, az egyenletesen változó és a nem egyenletesen változó mozgások megtalálása, állandó gyorsulás, lassulás, centripetális gyorsulás, lassulás, körmozgás, forgómozgás leírása. A forgó alkatrészek összetett mozgása.

Kihívást jelentő feladatok

M1.135: Legyen a találkozás időpontja t_t. Az indulástól a találkozásig mindkét autó azonos utat tesz meg: $\frac{a_1}{2} \cdot t_t^2 = \frac{a_2}{2} \cdot (t_t - t_1)^2$. A gyorsulások közötti összefüggést a grafikon segítségével tudjuk meghatározni, ugyanis a t_2 időpillanatban azonosak a sebességek: $a_1 \cdot t_2 = a_2 \cdot (t_2 - t_1)$. A helyzet aggasztónak látszik, mert több összefüggést nem tudunk felírni, viszont három ismeretlen van két egyenletben. Azonban ha a két egyenletet elosztjuk egymással, akkor a gyorsulások kiesnek és a kapott egyenlet megoldása: $t_t = t_2 + \sqrt{t_2(t_2 - t_1)}$.

M1.136. Adatok: a cél távolsága: $s = 28{,}35m$, a ház eleje az indítástól $s_1 = s - r = 26{,}52m$, a lassulás $a = 0{,}0127 \frac{m}{s^2}$, $s_2 = 8m$. $a_1 =$?
A feladat szövege szerint a kő s_1 távolságon állna meg a ház elejénél átlagos lassulással. Ebből a kezdősebesség meghatározható: $v_0 = \sqrt{2 \cdot s_1 \cdot a} = 0{,}821 \frac{m}{s}$. A sebesség 8m megtétele után: $v = \sqrt{v_0^2 - 2 \cdot s_2 \cdot a} = 0{,}686 \frac{m}{s}$. Ettől a ponttól kell a_1 lassulással haladnia, hogy éppen $s - s_2$ távolságban álljon meg: $s - s_2 = \frac{v^2}{2 \cdot a_1}$, ebből $a_1 = \frac{v^2}{2 \cdot (s - s_2)} = 0{,}0116 \frac{m}{s^2}$.
Tehát $0{,}0116 \frac{m}{s^2}$ lassulást kell biztosítania kőnek, hogy éppen a ház közepén álljon meg.

M**1.137.***

Adatok: $t_1 = 70$ s, $t_2 = 50$ s.

$t_3 = ?$

Legyen a mozgólépcső sebessége v_m, Vilmos sebessége v_V, a mozgólépcső hossza l.

A feladat kérdése tulajdonképpen úgy is megfogalmazható, hogy a mozgólépcső egy pontja mennyi idő alatt ér le a tetejétől az aljáig, ez az idő hogyan viszonyul a megadott két időtartamhoz. Ezt az időt fejezzük ki a felvett paramétereinkkel:

$$t_3 = \frac{l}{v_m}$$

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Az első esetben az állomáshoz viszonyított sebesség $v_m + v_V$, így a mozgásra felírhatjuk, hogy:

$(v_m + v_V) \cdot t_1 = l,$

a második esetben pedig:

$(v_m + 2 \cdot v_V) \cdot t_2 = l$

Úgy érezhetjük, hogy több egyenletet már nem tudunk felírni, mert minden ismeretünket belefoglaltuk az eddigi három egyenletbe. A második egyenletből v_V-t a harmadikba írva, abból az $\frac{l}{v_m}$ hányados kifejezhető:

$t_3 = \frac{l}{v_m} = \frac{t_1 \cdot t_2}{2 \cdot t_2 - t_1}.$

Adatainkkal $t_3 = \frac{l}{v_m} = 116\frac{2}{3}s \cong 117s.$

Tehát Vilmos az első esetben $t_3 - t_1 = 47s$-ot, a második esetben $t_3 - t_2 = 67$s-ot takarít meg.

Megoldásunkban sehol nem kellett figyelembe venni, hogy lefelé halad a mozgólépcső, ezért ellenkező irányban utazva ugyanannyi időt takarítanánk meg mindkét esetben.

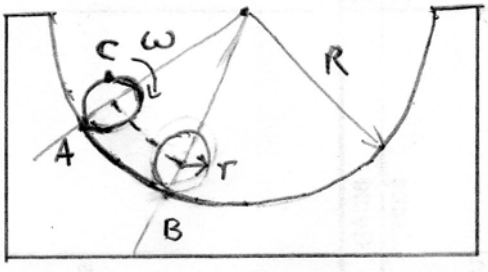
M**1.138.***

Adatok: R, r, tiszta gördülés.

$v(\omega) =$?

Ábrázoljuk a golyó helyzetét egy tetszőleges pillanatban, majd Δt idővel később.

Ez az ábra még nincs megrajzolva!



A szaggatott vonallal jelzett ív hossza $v \cdot \Delta t$. Ezen ív és az AB ív között egyszerű arányossággal kapunk kapcsolatot:

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$$\frac{v \cdot \Delta t}{\widehat{AB}} = \frac{R - r}{R}$$

Az ábrán jelölt két vastagon kiemelt ívhossz megegyezik, mert tiszta gördülés történik: $\widehat{AB} = \widehat{AC}$.

Az $\widehat{AC}$ ívet fel tudjuk írni a golyó szögsebességével: $\widehat{AC} = \omega \cdot r \cdot \Delta t$, így az első egyenletünk a következő módon alakul:

$$\frac{v \cdot \Delta t}{\omega \cdot r \cdot \Delta t,} = \frac{R - r}{R}$$

Ebből a keresett összefüggés:

$$v = \omega \cdot r \cdot \frac{R - r}{R}$$

Érdemes megnézni, hogy a kifejezés visszaadja-e az ismert esetek eredményeit. Ha $r \approx R$, akkor a golyó alig tud megmozdulni a vályúban, sebessége közel nulla. Sík felületen, $R \to \infty$ esetén

$v = r \cdot \omega$,

az ismert összefüggést kapjuk.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

2.Dinamika alapjai – Erőtan

M.2.1.

Az ablak becsapódásakor az üvegfelület minden egyes darabjának nagyon rövid idő alatt le kell fékeződnie. Ehhez nagy erőre van szükség. Ha az ablaküveg közepét vizsgáljuk, akkor arra a fékezőerőt a kiszemelt terület körüli rész fejti ki. Gyakran olyan nagy mechanikai feszültségek alakulnak ki ezért az üvegben, melyek az ablaküveg törését okozzák.

M.2.2.

Ütközéskor vagy vészfékezéskor a hirtelen fellépő nagy külső erő hatására a jármű rövid idő alatt megáll. A nem rögzített utas tehetetlensége miatt igyekszik megtartani eredeti mozgásállapotát. A súrlódás hatásának következtében a testének a járművel érintkező része kisebb, felső teste nagyobb sebességgel hagyja el a járműben az eredeti helyét. Így többnyire fejjel előrebukik, ami komoly sérüléseket okozhat. A biztonsági öv megakadályozza, hogy ütközéses balesetek esetén az autó vezetője, illetve utasai a gépkocsi belsejében lévő kemény tárgyakhoz vagy felületekhez csapódjanak.

M.2.3.

Vontatáskor arra kell törekedni, hogy a vontató és a vontatott jármű sebessége mindig közelítőleg ugyanakkora legyen. Általában akkor szakad el a kötél, ha a vontatott jármű áll, a kötél laza és a vontató autó túlzottan felgyorsul. Abban a pillanatban, amikor a kötél megfeszül, fokozatosan növekvő erő lép fel a vontatókötélben, ami fékezi a vontató járművet, miközben gyorsítja a vontatottat. Ha a kezdeti sebességkülönbség viszonylag nagy, akkor csak hosszabb úton alakul ki azonos sebesség a két jármű között, tehát a kötél igencsak megnyúlik. Ha a kötél megnyúlásakor a feszítőerő eléri a szakítószilárdságot, akkor a kötél elszakad. Más szavakkal ezt úgy fogalmazhatjuk meg, hogy a kötél megfeszülését követően a két járműnek nagyon rövid idő alatt kell(ene) felvennie a közös sebességet, tehát jelentős lesz a gyorsulásuk, ami nagy tömegük miatt rendkívül nagy erőt igényel(ne), melyet a kötél nem képes biztosítani.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.2.4.

Az a cél, hogy a farönköt minél hamarabb szétvágjuk, vagyis a farönk és a fejsze között minél nagyobb erő lépjen fel. Ha a farönk van alul, akkor először a farönk lefékeződik, majd a farönk megállítja a fejszét. Ehhez kisebb erőre van szükség annál, mintha amikor a fejsze van alul, és a fejszének kell megállítania a farönköt, mert a farönk tömege nagyobb, mint a fejsze tömege.

M.2.5.

Először is szögezzük le, hogy kanyarban is kell fékeznünk, ha muszáj. Ha a fejünkbe vesszük, hogy kanyarban tilos fékezni, akkor sokkal nagyobb baleseteket okozhatunk, mintha fékeznénk. Nem tanácsos azonban kanyarban blokkolva fékeznünk, mert akkor a jármű a fékezés kezdetekor meglévő pillanatnyi sebességvektora irányában haladhat tovább. Ekkor a jármű kicsúszhat az úttestről.

A korszerű gépkocsikban fékerőszabályzók vannak, valamint manapság már a gépkocsik ABS-szel (blokkolásgátlóval) is rendelkeznek, melyek biztonságosabbá teszik a kanyarokban végrehajtott fékezéseket. Ha kerékpárral közlekedünk, akkor az első és a hátsó fékek ügyes használatával kerülhetjük el, hogy kicsússzunk az útról. Azonban ha nagy sebességgel kanyarodunk bármilyen járművel tükörjégen, vagyis gyakorlatilag súrlódás nélkül, akkor semmilyen berendezés nem ment meg attól, hogy kicsússzunk az útról.

M.2.6.

Amikor autóban utazunk, akkor testünk azonos sebességgel mozog az autóéval. Az autó fékezéskor hirtelen megáll vagy lelassul, testünk pedig a tehetetlensége folytán tovább mozogna előre, ha valamilyen erő le nem lassítaná. Előfordul, hogy olyan száguldozó vezető mellett ülünk, hogy rettegve kapaszkodunk, és lábunkkal is próbáljuk kitámasztani magunkat. Ilyenkor a kezünkre és a lábunkra ható felületi erők fékezik le a mozgásunkat. Normális vezető mellett legtöbbször a tapadási súrlódási erő biztosítja lassulásunkat akkor, amikor a kocsi fékez. Azonban
ütközéskor a súrlódási erő nem elegendően nagy, ezért lerepülnénk az ülésről, ha a biztonsági öv ott nem tartana minket. A biztonsági öv nagy felületen érintkezik a testünkkel, ezért viszonylag kis nyomás hat a bőrfelületünkre. Azonban ha az autó nagy sebességgel ütközik, akkor a biztonsági övek által kifejtett erő is komoly sérüléseket okozhat. Ezért fejlesztették ki a légzsákokat. Ha az autó negatív gyorsulása (lassulása) elér egy kritikus értéket, akkor az autókba szerelt gyorsulásérzékelők bekapcsolják a légzsákokat, és ugyanakkor megszüntetik a

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

biztonsági övek feszítettségét. A továbbiakban a légzsákok fékezik le az utasokat meglehetősen nagy felületen és nagy úton, vagyis elegendően hosszú idő alatt ahhoz, hogy sérülést okozó erőhatások lehetőleg ne lépjenek fel.

M.2.7.

Egyenes úton, egyenletes sebességgel való haladáskor a folyadék felszíne vízszintes. Probléma akkor lép fel, ha hirtelen elindul vagy fékez a jármű, illetve akkor is, ha kanyarodik. Elinduláskor tehetetlensége miatt a menetiránnyal ellentétes oldalra felé lódul meg a folyadék, míg a fékezéskor a menetirány felé eső oldal irányába mozdul el a folyadék, kanyarodáskor sugárirányban kifelé indul meg a folyadék. A folyadék kilöttyenését zárt edény használatával lehet megakadályozni.

M.2.8.

Adatok:

m = 5 kg

$\underline{a = 2{,}4\ m/s^2}$

F = ?

Newton II. törvénye alapján:

$$F = ma = 12\ N.$$

A testre ható eredő erő 12N.

M.2.9.

Adatok:

F = 15 N

$\underline{a = 0.1\ m/s^2}$

m = ?

Newton II. törvénye alapján

$$m = F/a = 150\ kg.$$

A test tömege 150 kg.

M.2.10.

Adatok:

m = 2 kg

F = 3 N

a = ?

A gyorsulást az F =ma összefüggéssel számíthatjuk ki.

$$a = F / m = 1{,}5\ m/s^2.$$

Zsófi 1,5 m/s^2-tel gyorsítja a játékát.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.2.**11.**

Adatok:

F = 1,5 N

t = 3 s

s = 1m

m = ?

A kiskocsi gyorsulása az $s = a/2\ t^2$ összefüggésből:

$$a = 2/9\ m/s^2.$$

A kocsi tömege Newton II. törvénye alapján?

$$m = F/a = 6{,}75\ kg.$$

A kiskocsi tömege 6,75 kg.

M.2.**12.**

Adatok:

m = 1050 kg

s = 10 m

v = 54 km/h = 15 m/s

a = ?

A gyorsulást a $v = \sqrt{2as}$ összefüggésből számítjuk ki.

$$a = 1{,}125\ m/s^2 \approx 1{,}13\ m/s^2.$$

Az eredő erő:

$$F = ma = 1181{,}25\ N \approx 1200\ N.$$

A Suzukira ható eredő erő 1200 N.

M.2.**13.**

Adatok:

m =1 200 kg

F = 1 800 N

t = 12 s

v = ?

Az Opel gyorsulása:

$$a = F/m = 1{,}5\ m/s^2.$$

A gyorsítás során elért végsebessége:

$$v = at = 18\ m/s = 64{,}8\ km/h.$$

Az Opel 18 m/s (64,8 km/h) sebességet ért el 12 s alatt.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.2.**14.**

Adatok:

m = 250 kg

F = 150 N

t = 30 s

Δv = ?

$$F = \Delta I/\Delta t = m\Delta v/\Delta t \text{ alapján}$$

$$\Delta v = F \cdot \Delta t/m = 18 \text{ m/s}.$$

A motorkerékpár sebessége 18 m/s.

M.2.**15.**

Adatok:

m = 40 kg

Δt = 1 s

v = 4320 km/h = 1200 m/s

F = ?

Newton II. törvénye alapján:

$$F = \Delta I/\Delta t = m\Delta v/\Delta t \text{ összefüggésből}$$

$$F = 48\,000 \text{ N}.$$

A rakéta tolóereje 48 000 N.

M.2.**16.**

Adatok:

m = 60 kg

t = 8 s

v = 36 km/h = 10 m/s

F = ?

Newton II. törvénye alapján:

$$F = \Delta I/\Delta t = m\Delta v/\Delta t = 75 \text{ N}.$$

A kerékpár 75 N eredő erő hatására gyorsul.

M.2.**17.**

Adatok:

m = 0,2 kg

h = 1,5 m

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$\underline{\Delta t = 0{,}05\ s}$
F= ?

A gyurmagolyó asztalra érkezésének sebességére a $v = \sqrt{2gh}$ összefüggéssel a következő értéket kapjuk:

$$v = 5{,}4\ m/s.$$

A gyurmagolyóra ható átlagos eredő erőt az erőlökésre vonatkozó kifejezéssel számíthatjuk ki:

$$F = \Delta I / \Delta t = m\Delta v/\Delta t \approx 22\ N.$$

Ez az átlagos eredő erő függőlegesen felfelé mutat. A lefékeződéskor a gyurmagolyóra lefelé hat a nehézségi erő ($mg \approx 2$ N), illetve felfelé hat rá az asztallap nyomóereje, a kettő eredője átlagosan 22 N.
Tehát a gyurmagolyóra a fékeződés közben 24 N függőlegesen felfelé mutató átlagos erőt fejt ki az asztallap.

M.2.18.

Mindkét csónakra ugyanakkora nagyságú erő hat (hatás-ellenhatás elve). A csónakok elmozdulása a tömegükkel fordítottan arányos ($m_1v_1 = - m_2v_2$).
Megjegyzés: Érdemes észrevennünk, hogy amikor a csónakok elmozdulnak, akkor velük együtt valamekkora víztömeg is elmozdul. Ezt úgy szokás figyelembe venni, hogy a fenti összefüggésbe nem egyszerűen a csónakok és a benne ülők tömegét írjuk, hanem az ennél valamivel nagyobb, úgynevezett effektív tömegeket.

M.2.19.

Adatok:
$F_1 = 200$ N
$F_2 = 200$ N
$F_{max} = 360$ N

András és Péter a kötélre külön-külön 200 -200 N erőt fejtenek ki. Az egyikük által kifejtett erőt a másikuk ugyanakkora nagyságú, ellentétes irányú ellenerővel egyensúlyozza. Így Newton III. törvénye miatt a kötél minden pontjában ugyanakkora erő és ellenerő lép fel. Ezen erők hatására a kötél nyugalomban marad.
A kötél minden darabjában 200 N nagyságú feszítőerő lép fel, így nem szakad el a kötél.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.2.20.

Amekkora erőt fejt ki egyikük a másikra, a másik ugyanakkora erőt fejt ki az elsőre, hiszen az erővel egyenlő nagyságú ellenerő lép fel. Tehát a két fiú egyenlő nagyságú erőt fejtett ki egymásra.

M.2.21.

A magdeburgi félgömböt mindkét oldalon nyolc ló próbálta széthúzni. Az egyik nyolc fejtette ki az erőt, míg a másik nyolc az ellenerőt. Ha a 16 lovat egy oldalra állította volna, és a félgömbök másik oldalát fához köti, akkor megduplázhatta volna a félgömbre ható erőt. Ezzel a polgárok nyerési esélye növekedett volna. Elképzelhető, ha egyik oldalon nyolcnál több lovat fognak be a széthúzáshoz, akkor a félgömbök szétesnek.

M.2.22.

Adatok:
$m_1 = 0{,}8$ kg
$m_2 = 0{,}2$ kg
$v_1 = 3$ m/s
$v_2 = ?$

A golyókra a lendületmegmaradás törvényét írhatjuk fel:

$$m_1 v_1 = m_2 v_2,$$

ahonnan

$$v_2 = 12 \text{ m/s}.$$

A kisebbik tömegű golyó sebessége 12 m/s.

M.2.23.

Adatok:
$m_1 = 0{,}6$ kg
$m_2 = 0{,}2$ kg
$v' = 12$ m/s

Legyen az m_1 tömegű golyó sebessége v_1, míg az m_2 tömegűé v_2.
A lendületmegmaradás törvényéből következik:

$$m_1 v_1 = m_2 v_2,$$

$$3v_1 = v_2 \quad (1)$$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Ha az egyik golyóhoz rögzítjük a vonatkoztatási rendszerünket, akkor a másik hozzá képest a két golyó sebességének az összegével mozog, vagyis sebessége

$$v_1 + v_2 = 12 \text{ m/s} \quad (2).$$

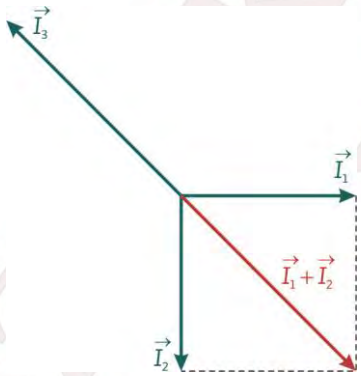
Az (1) és (2)összefüggésből következik, hogy

$$v_1 = 3 \text{ m/s}, v_2 = 9 \text{ m/s}.$$

A 0,6 kg tömegű golyó sebessége 3 m/s, míg a 0,2 kg tömegű golyó sebessége 9 m/s.
Megjegyzés: A számításunkban csak a sebességek nagyságával foglalkoztunk, természetesnek tekintettük, hogy a golyók ellentétes irányba repülnek szét. Szigorúan véve a lendületmegmaradás törvényét, azt írhatjuk fel, hogy a kezdeti lendület nulla, és ez úgy marad meg, hogy az egyik golyó lendülete pozitív, a másiké negatív lesz: $0 = m_1v_1 + m_2v_2$.

M.2.24.

Adatok:
$m_1 = 0{,}8$ kg
$v_1 = 20$ m/s
$m_2 = 0{,}5$ kg
$v_2 = 25$ m/s
$m_3 = 0{,}6$ kg
$v_3 = ?$



Mivel a gránát eredetileg nyugalomban volt, a szétrepülő darabok lendületvektorainak összege a lendületmegmaradás törvénye alapján zérus. A megfelelő lendületvektorokat az ábra mutatja.
A keletre repülő lendülete $I_1 = 16$ kgm/s, a délre repülő repeszdarabé $I_2 = 16$ kgm/s.
A harmadik repeszdarab lendülete

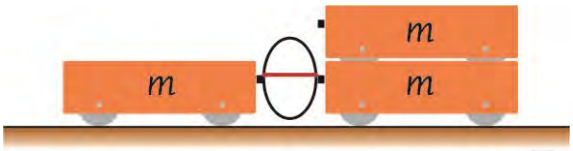
$$I_3 = \sqrt{I_1^2 + I_2^2} = 22{,}6 \text{ kgm/s}.$$

A harmadik repeszdarab lendületvektora mindkettővel 135°-os szöget zár be.

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.2.25.

Adatok:
t = 1 s
s = 1,2 m
v_1 = ?
v_2 = ?



A kocsik szétlökésekor a kocsik ΔI lendületváltozása megegyezik.

$$\Delta I_1 = \Delta I_2,$$
$$m\Delta v_1 = 2m\Delta v_2,$$
$$\Delta v_1 = 2\Delta v_2.$$

Az m tömegű sebessége v_1, míg a 2m tömegű sebessége $v_1/2$ lesz. A két kocsi együtt teszi meg az 1,2 m-es utat.

$$v_1 t + v_1/2\, t = s$$
$$v_1 = 0{,}8 \text{ m/s}.$$

Az m_1 tömegű 0,8 m/s, míg a 2m tömegű 0,4 m/s sebességgel haladt.

M.2.26.

Abban az esetben, ha a kocsikat összekötő kapcsok nem feszesek, akkor a kocsikat a szerelvény egyesével indítja el. Ha a kapcsok feszesek, akkor a mozdonynak egyszerre kell megindítania az egész szerelvényt. Természetesen laza kapcsok esetén is nagyon rövid idő múlva az egész szerelvény együtt mozog, azonban ilyenkor már a csúszási és a gördülési ellenállás ellen dolgozik a mozdony, nem pedig az általában lényegesen nagyobb tapadási súrlódás ellen.

M.2.27.

Adatok:
m = 45 kg
v = 2,5 m/s
I = ?

A lendület definíciója alapján: I = mv = 112,5 kgm/s.
A tanuló lendülete 112,5 kgm/s.

M.2.28.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Adatok:
I = 29250 kgm/s,
m = 1300 kg
v = ?

A lendület definíciója alapján: v = I/m = 29 250/1 300 = 22,5 m/s = 81 km/h.
A Peugeot sebessége 81 km/h.

M.2.29.
Adatok:
m = 12 000 kg
v = 36 km/h = 10 m/s
ΔI = ?

A lendületváltozás a ΔI = mΔv összefüggéssel számítható ki.

$$\Delta I = m\Delta v = -120\,000 \text{ kgm/s}.$$

A villamos lendületváltozása -120 000 kgm/s. (A negatív előjel azt fejezi ki, hogy a villamos lendülete csökkent.)

M.2.30.
Adatok:
m = 0,4 kg
v_1 = 5 m/s
v_2 = -4 m/s
ΔI = ?

A focilabda sebességváltozása:

$$\Delta v = v_2 - v_1 = -9 \text{ m/s}.$$

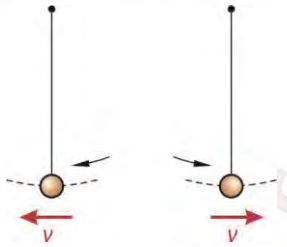
A sebesség nagysága nem, de az iránya ellentétesre fordul.
A lendületváltozás:

$$\Delta I = m\Delta v = -3{,}6 \text{ kgm/s}.$$

M.2.31.
Adatok:
m = 200 kg
v_1 = 2 m/s
ΔI = ?

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

A pálya legmélyebb pontján való két áthaladás között az inga sebessége ellentétesre fordul. A sebességváltozás a két áthaladás között:



$$\Delta v = v_2 - v_1 = -4 \text{ m/s}.$$

A lendületváltozás:

$$\Delta I = m\Delta v = -800 \text{ kgm/s}.$$

A faltörő inga lendületváltozása -800 kgm/s.

M.2.32.

Adatok:

$m_1 = 15$ kg, $v_1 = 0$ m/s,

$\underline{m_2 = 30 \text{ kg}, v_2 = 1{,}8 \text{ m/s}}$

$u = ?$

A jelenség rugalmatlan ütközés, így a lendületmegmaradás törvényét felírva:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)u.$$

Behelyettesítés után a közös sebesség:

$$u = 1{,}2 \text{ m/s}.$$

M.2.33.

Adatok:

$M = 60$ kg

$m = 6$ kg

$v = 4$ m/s

$\underline{u_1 = 3{,}5 \text{ m/s}}$

$u_2 = ?$

A görkorcsolyázót és a medicinlabdát zárt rendszernek tekinthetjük. A lendületváltozás törvényét alkalmazzuk.

$$(M + m)v = Mu_1 + mu_2,$$

ahonnan

$$u_2 = 9 \text{ m/s}.$$

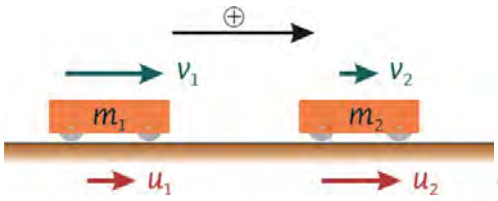
A medicinlabda a földhöz képest 9 m/s sebességgel halad.

M.2.34.

Adatok:

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$m_1 = 0{,}4$ kg
$v_1 = 2$ m/s
$m_2 = 0{,}1$ kg
$v_2 = 0{,}5$ m/s
$u_2 = 2{,}94$ m/s
$u_1 = ?$



Rugalmas ütközésre írjuk fel a lendületmegmaradás törvényét! A kocsik eredeti haladási irányát tekintsük pozitív iránynak!

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1u_1 + m_2u_2$$

Az egyenlet megoldása során kapjuk

$$u_1 = 1{,}4 \text{ m/s}.$$

Az hátsó kocsi ütközés utáni sebessége 1,4 m/s.

M.2.35.

Adatok:
$m = 60$ kg
$s = 80$ m
$t = 20$ s
$I = ?$

Először határozzuk meg a kerékpáros végsebességét az $s = a/2\ t^2$ (1) és a $v = at$ (2) összefüggés felhasználásával!

$s = a/2\ t^2$ –ből a-t kifejezve: $a = 2s/t^2$,

ahonnan $a = 0{,}4$ m/s^2.

A végsebesség:

$$v = at = 8 \text{ m/s}.$$

A kerékpáros lendülete:

$$I = mv = 480 \text{ kgm/s}.$$

A kerékpáros lendülete 480 kgm/s.

M.2.36.

Egyenletes mozgáskor, állandó sebesség mellett a gépkocsira ható erők eredője nulla.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

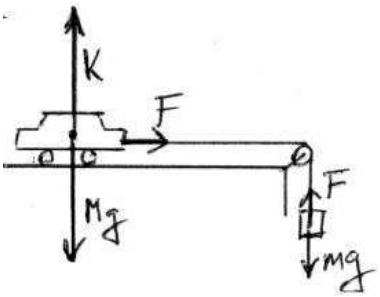
M.2.37.

Adatok:

M = 1,5 kg

m = 0,5 kg

a = ?



A játékautóra ható erők:

1. nehézségi erő
2. talaj nyomóereje
3. fonálerő

Gyakori típushiba, hogy a fonálerőt egyenlővé teszik a m tömegű testre ható nehézségi erővel. Vigyázat: Fh ≠ mg = 5 N!

A m tömegű testre ható erők:

1. nehézségi erő
2. fonálerő

Az ábrából láthatjuk, hogy Mg = K, valamint a fonál két végén a két testre ható fonálerő belső erő. Ez azt jelenti, hogy az egész rendszert mint egyetlen (M + m) tömegű testet egyedül a mg erő gyorsítja.

A mozgásegyenletet az elmozdulás irányában felírva:

$$(M + m)\, a = mg,$$

ahonnan:

$$a = 2{,}5\ \mathrm{m/s^2}.$$

A játékautó gyorsulása 2,5 m/s².

Megjegyzés: A fonálerő F = 3,75 N, ami éppen ¾ része az mg nehézségi erőnek. Ez az F = 3,75 N gyorsítja 2,5 m/s² gyorsulással a játékautót, illetve a (mg – F) = 1,25 N erő gyorsítja az m tömegű testet ugyancsak 2,5 m/s² gyorsulással.

M.2.38.

Azt szoktuk mondani, hogy az erő és az ellenerő mindig egyszerre lép fel, ami felületi erők esetén, tehát ebben az esetben is így van, egyszerre lép fel a két erő, hiszen ugyanabból a kölcsönhatásból származnak.

Megjegyzés: Képzeljük el azonban azt, hogy két távoli test hat egymásra mondjuk gravitációs, vagy elektromos, vagy mágneses erővel. Gondolatban mozdítsuk el hirtelen az egyik testet. Mennyi idővel később érzi meg ennek hatását a másik test. Ezek a hatások fénysebességgel, vagyis igen gyorsan terjednek, tehát igen rövid idő múlva jut el a hatás a másik testhez. Ilyenkor nem

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

teljesül a hatás-ellenhatás törvénye, azonban a késés olyan kicsi, hogy a legtöbb gyakorlati esetben észrevehetetlen.

M.2.39.

F_1 = 60 N

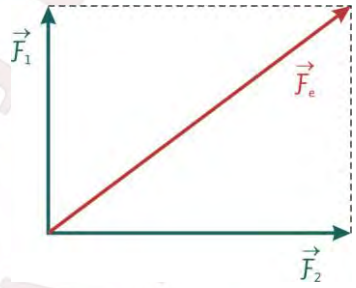
$\underline{F_2 = 80\ N}$

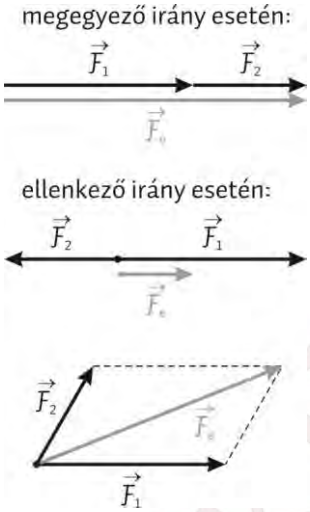
F_e = ?

Mivel a feladat szövege nem tartalmazza a két erő által bezárt szöget, ezért az eredő erő 20 N és 140 N között bármekkora nagyságú lehet.

Ha feltételezzük, hogy a két erő hatásvonala derékszöget zár be, akkor az eredő a Pitagorasz tétellel kiszámítható

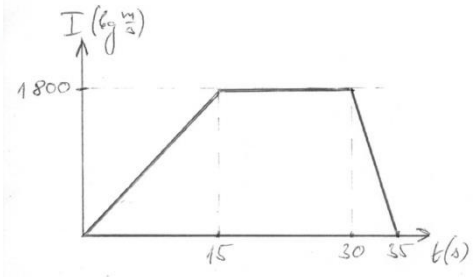
$$F_e = 100\ N.$$





Az eredő nagysága 100 N, ha a két erő iránya merőleges egymásra. Egyébként 20 N és 140 N között bármekkora nagyságú lehet az eredő.

M.2.40.



Adatok:

$\underline{m = 300\ kg}$

a. a = ?

b. F-t grafikon?

a. A 15. másodperchez tartozó sebesség

$$v = I/m = 6\ m/s.$$

A gyorsulások az egyes szakaszokon az $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ összefüggés alapján

$$a_1 = 0{,}4\ m/s^2,$$

$$a_2 = 0,$$

$$a_3 = -1{,}2\ m/s^2.$$

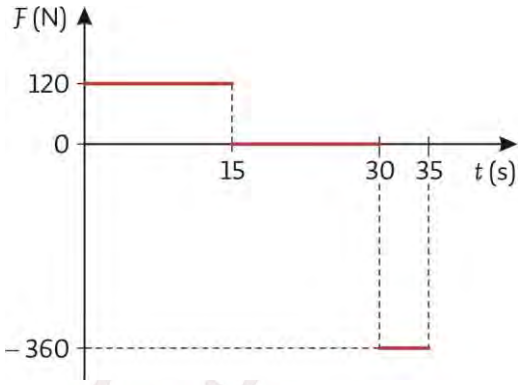
A gyorsulások az egyes szakaszokon

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$a_1 = 0{,}4$ m/s², $a_2 = 0$, $a_3 = -1{,}2$ m/s².

b. A motorkerékpárra ható eredő erő az egyes szakaszokon az F= ma összefüggés alapján

$F_1 = 120$ N, $F_2 = 0$, $F_3 = -360$ N.



A motorkerékpárra az első szakaszon 120 N, a másodikon 0, míg a harmadikon –360 N erő hat.

M.2.41.

Adatok:

$F_D = 140$ N

$F_{Ny} = 80$ N

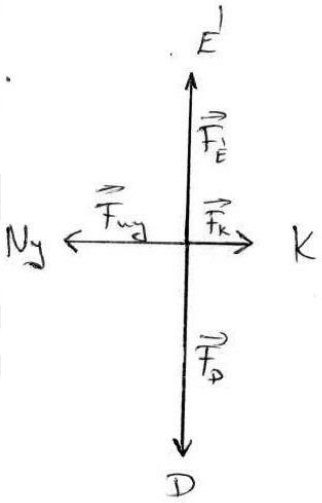
$F_É = 110$ N

$F_K = 40$ N

$\underline{a = 0{,}4 \text{ m/s}^2}$

a. m = ?

b. F_e = ?



a.

b. Az eredő erő nagysága a Pitagorasz tétel felhasználásával:

$$F_e = 50 \text{ N}.$$

A csónak tömege a dinamika alapegyenlete alapján:

$$m = F_e/a = 125 \text{ kg}.$$

A csónak tömege 125 kg.

M.2.42.

Adatok:

m = 1350 kg

$a = 0{,}25$ m/s²

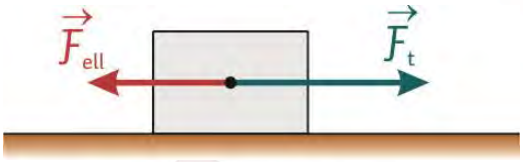
$\underline{F_t = 1650 \text{ N}}$

F_{ell} = ?

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Jelöljük a F_t-vel a gépkocsira a mozgás irányában kifejtett nyomóerőt, míg F_{ell} –el a mozgást akadályozó összes erőt.

A Skodára ható eredő erő a talaj gépkocsira mozgásirányban kifejtett nyomóerejének és a mozgást akadályozó összes erő különbsége:



$$F_e = F_t - F_{ell},$$

ahonnan

$$F_{ell} = F_t - F_e.$$

$$F_{ell} = 1312 \text{ N}.$$

A Skodára ható mozgást akadályozó összes erő 1312 N.

M.2.43.

Adatok:

m = 0,5 kg

M = 1350 kg

a. A kenyér súlya G = 5 N.
b. A Renault személygépkocsi súlya G = 13 500 N.
c. A kezünkből éppen kiejtett alma szabadesést végez, ezért súlya 0.

M.2.44.

a. A 400 N súlyú láda tömege 40 kg. Ezért a zsák tehetetlensége a nagyobb.
b. A zsák nyomja nagyobb erővel a padlót.

M.2.45.

Adatok:

m = 80 kg

F_n = 820 N

a = ?

A lift felfelé indul, az emberre a mozgásegyenletet felírva:

$$ma = F_n - mg.$$

A gyorsulás:

$$a = 0{,}25 \text{ m/s}^2.$$

A lift felfelé indul 0,25 m/s² gyorsulással.

M.2.46.

Adatok:

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$a = 0{,}8\ m/s^2$
$\underline{K = 615\ N}$
$m = ?$

A liftben álló emberre felírjuk a mozgásegyenletet:

$$ma = K - mg,$$

ahonnan

$$m \approx 57\ kg.$$

A liftben álló ember tömege 57 kg.

M.2.47.
Adatok:
$a = 0{,}8\ m/s^2$
$\underline{m = 60\ kg}$
$F_n = ?$

A lift lefelé gyorsul. A fiúra felírva a mozgásegyenletet:

$$ma = mg - F_n,$$

ahonnan

$$F_n = m(g-a) \approx 550\ N.$$

A mérleg 550 N erőt mutat. (A legtöbb mérleg nem erőt, hanem tömeget mutat. Ezért például a fiú lába alatti fürdőszobamérleg a lefelé gyorsuló liftben 55 kg-ot mutat.)

M.2.48.
Adatok:
$m = 0{,}2\ kg$

a. $K = mg = 2\ N.$
b. A gyorsulás iránya lefelé mutat, ezért az eredőerő is lefelé mutat.
Írjuk fel a pohárban lévő vízre ható, függőleges irányú erőket (a pohár fala által kifejtett vízszintes erők kiejtik egymást)!
A vízre ható függőleges erők:
1.nehézségi erő
2. pohár alja által kifejtett nyomóerő.

A mozgásegyenletet felírva:

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

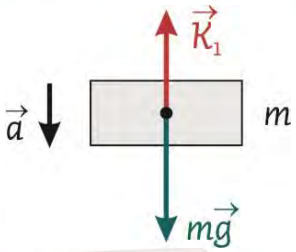
$F_e = F_{neh} - K_1$

$ma = mg - K_1$

amelyből:

$K_1 = m(g-a)$,

$K_1 = 1{,}6$ N.



c. A gyorsulás iránya felfelé mutat, ezért az eredőerő is felfelé mutat.
A mozgásegyenletet felírva:

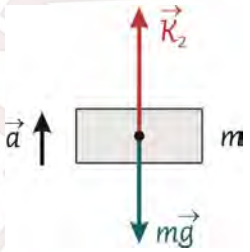
$F_e = K_2 - F_{neh}$

$ma = K_2 - mg$,

amelyből:

$K_2 = m(g-a)$.

$K_2 = 2{,}4$ N.



d. Szabadeséskor K = 0 N.

Megjegyzés: A feladat a pohár aljára kifejtett erőt kérdezte, a számítások során viszont a pohár alja által a vízre kifejtett erőt számítottuk ki, amely az a., b. és c. alkérdésekben felfelé mutat. Természetesen a pohár aljára K ellenereje hat lefelé, amit súlyerőnek nevezünk. A d. alkérdésben ez az erő nulla, ezért ilyenkor súlytalanságról beszélünk.

M.2.49.

Az űrhajós a kabin faláról elrugaszkodik, és egyenes vonalú, egyenletes mozgással, a levegőben úszva halad az űrhajó másik oldaláig (elhanyagolva a légellenállást). Vegyük észre, hogy az űrhajós a kabinhoz képest végez egyenes vonalú, egyenletes mozgást, a Földhöz képest gyorsul, gyakorlatilag ugyanúgy, ahogy az űrhajó is gyorsulva kering a Föld körül, vagyis azt mondhatjuk, hogy az űrhajós is „körbeesi" a Földet. Azért különös ez a helyzet számunkra, mert az űrhajóhoz rögzített vonatkoztatási rendszer nem inercia-rendszer, hanem gyorsuló vonatkoztatási rendszer.

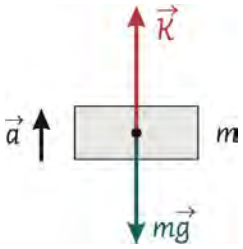
M.2.50.

Adatok:

K = 8 000 N

m = 700 kg

a = ?



A teherre ható erők:

1. nehézségi erő (F_{neh})
2. kötél húzóereje (K)

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

A két erő eredője felfelé mutat, így eredőjük:

$$ma = K - mg.$$

A mozgásegyenletből:

$$a = 1{,}4\ m/s^2.$$

A teherlift kötelével maximum 1,4 m/s² gyorsulással lehet emelni a 700 kg tömegű testet. (Ha g = 9,8 m/s²-tel számolunk, akkor 1,6 m/s² értékű maximális gyorsulást kapunk.)

M.2.51.

Adatok:

D = 200 N/m

$\underline{\Delta x = 0{,}3\ m}$

F = ?

A rugóerőre vonatkozó összefüggés alapján:

$$F = D\,\Delta x = 60\ N.$$

A rugót 60 N erővel kell húznunk.

M.2.52.

Adatok:

F_r = 2 000 N

$\underline{\Delta x = 0{,}2\ m}$

D = ?

A rugóállandó az $F_r = D \cdot \Delta x$ összefüggésből:

$$D = F_r / \Delta x = 10^4\ N/m.$$

A rugóállandó nagysága 10^4 N/m.

M.2.53.

D = 150 N/m

$\underline{\Delta x_{max} = 0{,}2\ m}$

m = ?

A rugóra függesztett test egyensúlyban van a nehézségi erő és a rugóerő hatására.

$$0 = mg - D\Delta x,$$

ahonnan

$$m = 3\ kg.$$

A rugóra függesztett test tömege maximum 3 kg lehet.

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.2.54.

Adatok:

m = 2500 kg

$a = 0{,}5\ m/s^2$

$\underline{D = 10^5\ N/m}$

$\Delta x = ?$

A drótkötél által a gépkocsira kifejtett maximális húzóerő:

$$F_h = ma = 1250\ N.$$

Newton III. törvénye értelmében a húzóerő nagysága megegyezik a drótkötélben fellépő rugóerővel:

$$F_h = F_r.$$

Igy $F_r = 1250$ N.

A maximális megnyúlás a rugóerőre vonatkozó $F_r = D\Delta x$ összefüggésből számítható ki:

$$\Delta x = F_r / D = 0{,}0125\ m\ (=1{,}25\ cm).$$

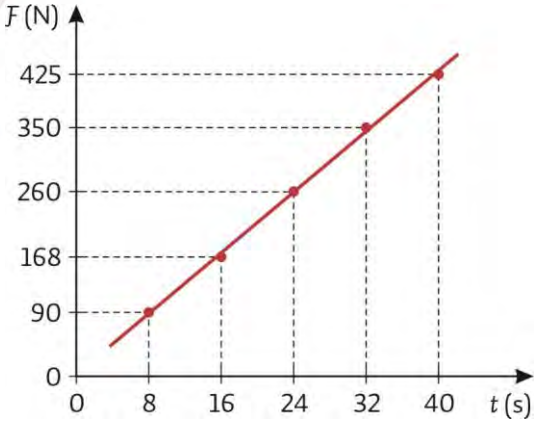
A drótkötél megnyúlása 1,25 cm.

M.2.55.

A rugó rugóállandója az egyes esetekben a rugó $F = D\Delta x$ erőtörvénye alapján a táblázat adataiból kiszámítva: $D_1 = 1125$ N/m, $D_2 = 1050$ N/m, $D_3 = 1083$ N/m, $D_4 = 1093$ N/m, $D_5 = 1062$ N/m.

A rugó rugóállandója az egyes esetekben számolt rugóállandók számtani közepe:

$$\overline{D} = 1082\ N/m.$$



A grafikonról összetartozó értékpárokat olvasunk le:

$F_x = 300$ N $\quad - -\rangle \quad \Delta x = 28$ cm.

Így

$$D = 1071\ N/m.$$

A rugó rugóállandója a táblázat alapján 1082 N/m, míg a grafikon alapján 1071 N/m.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.2.56.

a. A grafikonról leolvasható, hogy a gumiszál megnyúlása: $\Delta x = 0{,}1$ m.
Ekkor a húzóerő $F_h = 12$ N.
A húzóerő nagysága megegyezik a gumiszálban ébredő feszítőerővel (rugóerővel), így $F_h = F_r$.
A rugóerőre vonatkozó $F_r = D\Delta x$ összefüggésből a rugóállandó:

$$D = F_r / \Delta x = 120 \text{ N/m}.$$

b. A fonat rugóállandója három szál esetén háromszor nagyobb:

$$D' = 360 \text{ N/m}.$$

M.2.57.

Adatok:

$m_1 = 0{,}8$ kg

$m_2 = 12$ kg

$\mu_1 = 0{,}07$

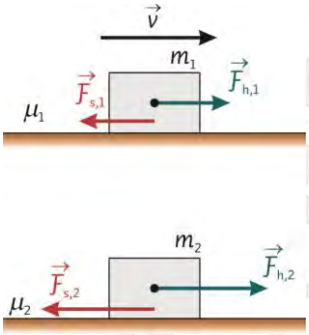
$\underline{\mu_2 = 0{,}2}$

$F_{s1} = ?$

$F_{s2} = ?$

$F_{h1} = ?$

$F_{h2} = ?$



A csúszási súrlódási erő az $F_s = \mu mg$ összefüggéssel számítható ki. Az egyes testekre ható súrlódási erők:

$$F_{s,1} = \mu_1 m_1 g = 0{,}56 \text{ N}.$$
$$F_{s,2} = \mu_2 m_2 g = 24 \text{ N}.$$

Egyenletes sebességgel történő mozgatás esetén a testekre ható F_h húzóerők ellentétes irányúak és egyenlő nagyságúak a testekre ható F_s súrlódási erőkkel.

$$F_{h,1} = F_{s,1} = 0{,}56 \text{ N}.$$
$$F_{h,2} = F_{s,2} = 24 \text{ N}.$$

Az első testre 0,56 N, míg a második testre 24 N erővel hat a csúszási súrlódási erő.
A húzóerők nagysága 0,56 N, illetve 24 N, irányuk a súrlódási erőkkel ellentétes és velük egyenlő nagyságú.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.2.58.

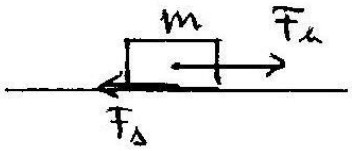
Adatok:

F_h = 22,5 N

m = 5 kg

$\underline{\mu = 0{,}3}$

a = ?



. ábra

a. A testre ható erők eredőjét az F_h húzóerő és a súrlódási erő eredője adja meg.

$$F_e = F_h - F_s.$$

A súrlódási erő nagysága:

$$F_s = \mu mg = 15 \text{ N}.$$

A gyorsulás:

$$a = 1{,}5 \text{ m/s}^2.$$

A test gyorsulása 1,5 m/s².

b. A sebesség v = at alapján:

$$v = 7{,}5 \text{ m/s}.$$

A gyorsulás értéke 1,5 m/s², míg a végsebesség 7,5 m/s.

M.2.59.

Adatok:

M = 3 kg

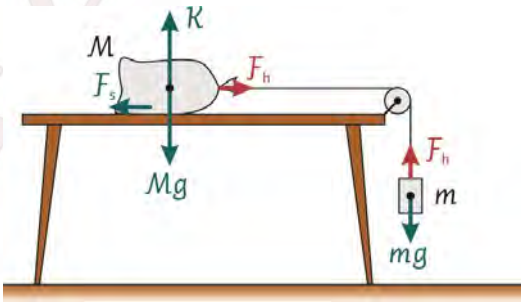
m = 0,8 kg

$\underline{\mu = 0{,}25}$

a = ?

A zsákra ható erők:

1. nehézségi erő
2. asztal nyomóereje
3. nehezék által kifejtett húzóerő
4. súrlódási erő



A nehezék által kifejtett húzóerő: F_h = 8 N, a zsákra ható súrlódási erő: $F_s = \mu Mg$ = 7,5 N. A zsák-nehezék rendszerre felírjuk a mozgásegyenleteket:

$$(M + m)a = F_h - \mu Mg,$$

amelyből

$$a = 0{,}13 \text{ m/s}^2.$$

A zsák 0,13 m/s² gyorsulással csúszik az asztal széle felé.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.2.60.

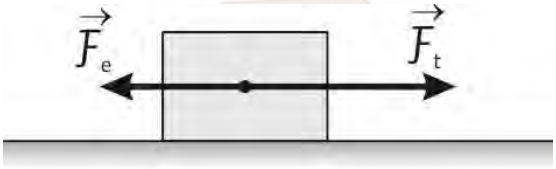
Adatok:

m = 1400 kg

$\underline{F_t = 800\ N}$

a. F_l = ?

b. a = ?, ha F_t = 1 000 N?



a. A Mercedes állandó sebességgel halad, így a rá ható erők erdője nulla (F_e = 0), vagyis az előre mutató tapadási súrlódási erő és a légellenállási erő nagysága megegyezik.

$$F_e = F_t - F_l,$$

ahonnan

$$F_l = F_t = 800\ N.$$

Állandó sebesség esetén a Mercedesre ható légellenállási erő 800 N.

Megjegyzés: Érdekességként jegyezzük meg, hogy a legtöbb Mercedes a mai napig hátsókerék meghajtású, vagyis a hátsó kerekei próbálják hátrafelé nyomni az utat, míg a talaj előrefelé tolja az autót. Ilyen értelemben beszélhetünk csak arról, hogy a talaj által kifejtett előremutató súrlódási erő az autó tolóereje.

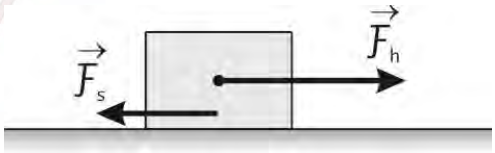
b. Az előrefelé mutató tapadási súrlódási erő F_t = 1 000 N-ra növekszik, ezért az autó állandó gyorsulással fog mozogni. A Mercedesre ható erők eredője a tapadási súrlódási erő és a légellenállási erő különbsége:

$$F_e = F_t - F_l.$$

A összefüggésből a gyorsulásra azt kapjuk, hogy

$$a = \frac{Ft - Fl}{m} = 0{,}14\ m/s^2.$$

A Mercedes gyorsulása 0,14 m/s², ha a rá ható tapadási súrlódási erő 1 000 N.



M.2.61.

Adatok:

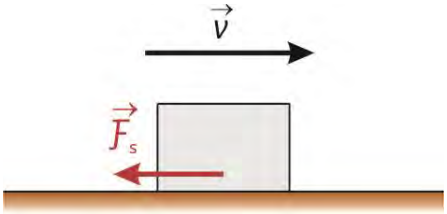
v = 1,2 m/s

$\underline{t = 4{,}8\ s}$

μ = ?

A mozgás folyamán egyenletesen lassuló mozgást végeznek a gyerekek, ezért a v= at összefüggésből a gyorsulást meghatározhatjuk.

$$a = 0{,}25\ m/s^2.$$



KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

A gyerekekre mozgásukkal ellentétes irányban a súrlódási erő hat. Így a mozgásegyenlet:

$$ma = \mu mg,$$

ahonnan

$$\mu = 0{,}025.$$

A jég és a gyerekek cipőtalpa között a csúszási súrlódási együttható 0,025.

M.2.62.

Adatok:

$\underline{a = 4{,}5\ m/s^2}$

$\mu_o = ?$

Tételezzük fel, hogy a síkfutóra a tapadási súrlódási erő maximuma hat:

$$F_{t,max} = \mu_o mg.$$

Vízszintes irányban a tapadási súrlódási erőn kívül más erő nem lép fel, így a testre ható erők eredőjét az $F_{t.max}$ adja meg.

$$F_e = F_{t,max}.$$

A fenti összefüggések alapján a tapadási súrlódási együttható értékét meghatározhatjuk:

$$ma = \mu_o mg,$$

ahonnan:

$$\mu_o = a/g = 0{,}45.$$

A tapadási súrlódási együttható értéke legalább 0,45.

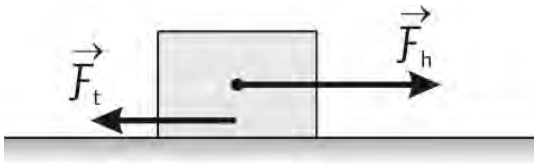
M.2.63.

Adatok:

$m = 60\ kg$

$\underline{F_h = 30\ N}$

$\mu_o = ?$



A szánkó megindításához szükséges $\underline{F_h}$ húzóerőnek nagyobbnak kell lennie, mint $F_{t,max}$, azaz a tapadási súrlódási erő maximuma.

$$F_h > F_t. \qquad (1)$$

A tapadási súrlódási erő:

$$F_t = \mu_o mg. \qquad (2)$$

Az (1) és (2)-ből határesetben:

$$F_h = \mu_o mg,$$

ahonnan:

$$\mu_o = 0{,}05.$$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

A tapadási súrlódási együttható értéke 0,05.

M.2.64.

Adatok:

m = 8 kg

$\underline{\mu_o = 0{,}15}$

a. F_h = ?

b. a= ?, ha μ = 0,1

a. A szánkó megindításához a maximális tapadási súrlódási erőnél nagyobb erőre van szükség:

$$F_h > \max F_t.$$

A maximális tapadási súrlódási erő nagysága:

$$\max F_t = \mu_o mg = 12 \text{ N}.$$

A szánkó megindításához 12 N-nál nagyobb erőre van szükség.

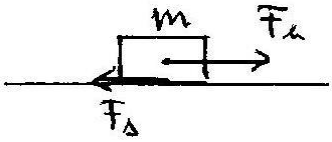
b. A testre ható erők eredőjét az $F_h = \max F_t$ húzóerő és az F_s súrlódási erő eredője adja meg.

$$F_e = F_h - F_s.$$

A húzóerő nagysága 12 N.

A súrlódási erő nagysága:

$$F_s = \mu mg = 8 \text{ N}.$$



ábra

Így a gyorsulás:

$$a = \frac{Fh - Fs}{m} = 0{,}5 \text{ m/s}^2.$$

A szánkó gyorsulása 0,5 m/s².

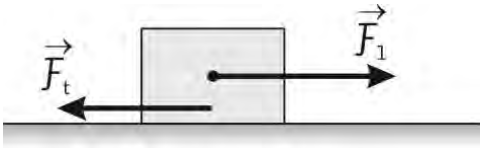
M.2.65.

Adatok:

μ_o = 0,4

$\underline{\mu = 0{,}25}$

a = ?



I.eset:

A testre függőleges irányban a nehézségi erő és a talaj nyomóereje, míg vízszintesen az F_1 erő és az F_t tapadási súrlódási erő hat.

Számítsuk ki a tapadási súrlódási erő maximumát!

$F_{t,max} = \mu_o$ mg = 16 N.

Mivel $F_1 < F_{t,max}$, ezért a test nem indul el.

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Megjegyzés: Mivel az $F_1 < F_{t,max}$, ezért a fellépő tapadási súrlódási erő értéke is F_t = 10 N lesz.

II. eset:

Az első eset alapján látható, hogy $F_2 = F_{t,max}$. Ebben az esetben még nem indul el a test.

III. eset:

A testre függőleges irányban a nehézségi erő és a talaj nyomóereje, vízszintes irányban pedig az F_3 húzóerő és az $F_{t.max}$ tapadási súrlódási erő hat.
$F_3 > F_{t,max}$, ezért a test állandó gyorsulással elindul.
A test gyorsulása:

$$F_e = F_3 - F_s.$$

$$ma = F_3 - \mu mg,$$

amelyből:

$$a = \frac{F3 - \mu mg}{m} = 2{,}5 \text{ m/s}^2.$$

A test gyorsulása 2,5 m/s² lesz az elindulása után.

IV. eset:

A testre függőleges irányban a egy F_3 nagyságú nyomóerő is fellép. Igy a felületre merőleges nyomóerő nagysága:

$$F_{ny} = mg + F_3 = 60 \text{ N}.$$

A tapadási súrlódási erő maximuma:

$$F_{t,max} = \mu_o F_{ny} = 24 \text{ N}.$$

Mivel a vízszintes irányú tolóerő $F_2 < F_{t,max}$, ezért a test nem mozdul el.

V. eset:

A testet F_1 = 10 N nagyságú erővel emeljük. A felületre merőleges nyomóerő a nehézségi erő és az F_1 emelőerő különbsége.

$$F_{ny} = mg - F_1 = 30 \text{ N}.$$

A tapadási súrlódási erő maximuma:

$$F_{t,max} = \mu_o F_{ny} = 12 \text{ N}.$$

Mivel a vízszintes irányú F_2 húzóerőre fennáll, hogy $F_2 > F_{t,max}$, ezért a test elindul.
A test gyorsulása

$$F_e = F_2 - F_s.$$

$$ma = F_2 - \mu(mg - F_1),$$

amelyből:

$$a = \frac{F2 - \mu(mg - F1)}{m} = 2{,}1 \text{ m/s}^2.$$

A test gyorsulása 2,1 m/s² lesz az elindulása után.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.2.66.

Adatok:

m = 50 kg

μ = 0,08

a. F_1 = 30 N

b. F_2 = 70 N

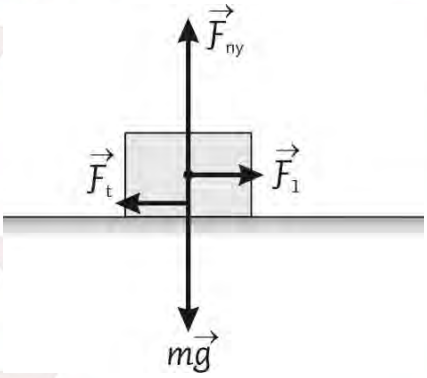
F_{ny} = ?, F_s = ?, a = ?

a. A szánkóra függőleges irányban a nehézségi erő és talaj nyomóereje hat, melyek kiegyenlítik egymást, míg vízszintes irányban az F_1 húzóerő és a vele ellentétes súrlódási erő lép fel.

A mozgásegyenletek:

$$0 = mg - F_{ny}$$

$$ma = F_1 - F_s.$$



$$F_{ny} = 500 \text{ N}.$$

A szánkó akkor indul el, ha a húzóerő nagyobb, mint a súrlódási erő. (Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a tapadási súrlódási együttható megegyezik a csúszási súrlódási együtthatóval.) 30 N nagyságú húzóerő esetén ez nem teljesül, hiszen az F_s súrlódási erő nagysága:

$$F_s = \mu mg = 40 \text{ N}.$$

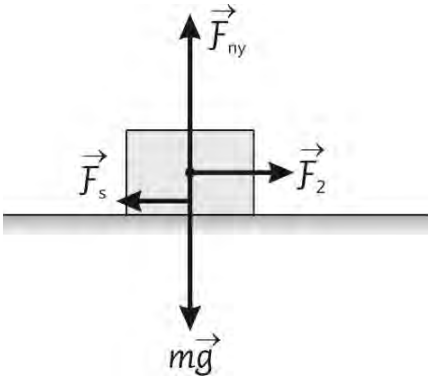
Ha formálisan kiszámítjuk ezekkel az adatokkal a szánkó gyorsulását, akkor negatív érték (- 0,2 m/s²) jön ki, ami fizikailag nem lehetséges, hiszen a jobbra húzott szánkó nem kezdhet balra gyorsulni. Ebben az esetben tapadási súrlódási erő lép fel, melynek nagysága F_t = 30 N.

A talaj 50 N erővel nyomja a szánkót, a fellépő (tapadási) súrlódási erő nagysága 30 N. A szánkó nem indul el, így gyorsulása nulla.

b. A mozgásegyenletek:

$$0 = mg - F_{ny}$$

$$F_e = F_2 - F_s.$$



A talaj nyomóereje függőlegesen felfelé hat, melynek nagysága F_{ny} = 50 N.

Az F_s súrlódási erő nagysága:

$$F_s = \mu mg = 40 \text{ N}.$$

Mivel $F_2 > F_s$, ezért a szánkó vízszintes irányban gyorsul.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

A gyorsulás nagysága:

$$a= (F_2 - \mu mg)/m = 0{,}6 \text{ m/s}^2.$$

A talaj 50 N erővel nyomja a szánkót, a fellépő súrlódási erő nagysága 40 N, míg a gyorsulás 0,6 m/s².

M.2.67.

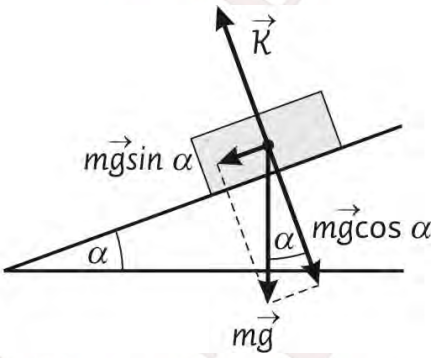
Adatok:

α = 30°

m = 15 kg

a. a= ?

b. a = ?, ha μ = 0,1?



a. A szánkóra ható erők:

1. nehézségi erő (mg)
2. talaj K nyomóereje

Írjuk fel a mozgásegyenleteket lejtőre merőleges és lejtővel párhuzamos összetevők szerint!

$$0 = K - mg\cos\alpha$$
$$ma = mg\sin\alpha$$

A szánkó gyorsulása:

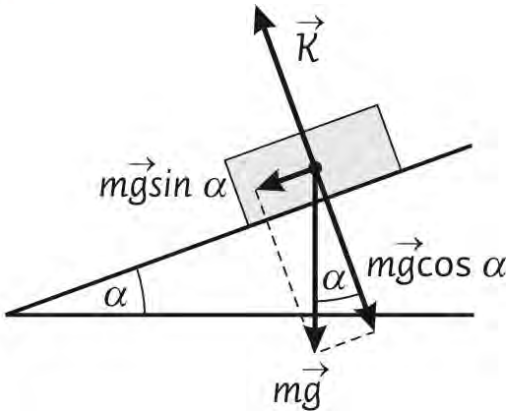
$$a = g\sin\alpha = 5 \text{ m/s}^2.$$

A szánkó gyorsulása 5 m/s².

b. Az a. feladatbeli erőkön kívül az F_s súrlódási erő is fellép.

A mozgásegyenleteket újra komponensenként írjuk fel:

$$0 = K - mg\cos\alpha$$
$$ma = mg\sin\alpha - F_s$$



Az F_s súrlódási erő: $F_s = \mu mg\cos\alpha$.

A szánkó gyorsulása:

$$a= g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha),$$

ahonnan

$$a = 4{,}1 \text{ m/s}^2.$$

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

A szánkó gyorsulása a súrlódás figyelembe vételével 4,1 m/s².

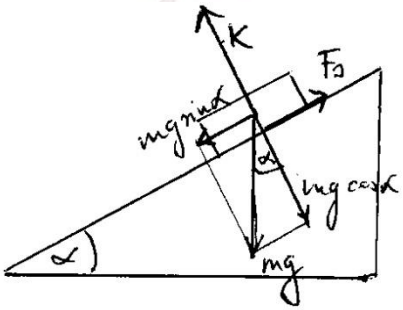
M.2.68.

Adatok:

α = 10°

m = 60 kg

μ = ?



2. ábra

A lejtőn fellépő erők:

1. nehézségi erő (F_{neh} = mg)
2. lejtő nyomóereje a bobra
3. súrlódási erő

A bob egyenletes sebességgel csúszik lefelé a lejtőn, így a mozgásegyenletek a lejtőre merőleges és a lejtővel párhuzamos összetevők szerint:

$$0 = K - mg\cos\alpha$$

$$0 = mg\sin\alpha - F_s.$$

A súrlódási erő: $F_s = \mu mg\cos\alpha$.

A csúszási súrlódási együttható a mozgásegyenletből:

$$0 = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha,$$

ahonnan

$$\mu = \operatorname{tg}\alpha = 0{,}18.$$

A bob és a pálya közötti csúszási súrlódási együttható 0,18.

M.2.69.

Adatok:

α = 15°

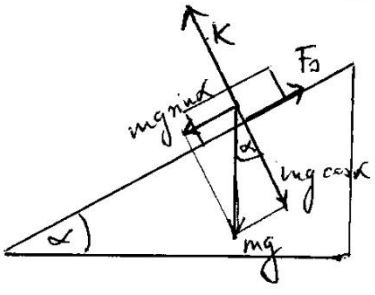
s = 20 m

μ = 0,05

a. t= ?

b. v = ?

c. s_2 = ?



3. ábra

a. A lejtőn lévő személygépkocsira felírhatóak a mozgásegyenletek a lejtőre merőleges és a lejtővel párhuzamos összetevők szerint:

$$0 = K - mg\cos\alpha$$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$$ma = mg\sin\alpha - F_s.$$

A súrlódási erő: $F_s = \mu mg\cos\alpha$.

A lejtőn a gyorsulás:

$$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha),$$

ahonnan:

$$a = 2{,}1\ \text{m/s}^2.$$

A lejtő csúszás időtartama:

$$t = \sqrt{2s/a} = 4{,}4\ \text{s}.$$

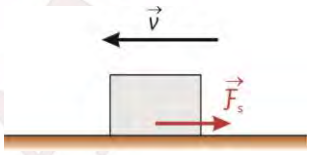
A személygépkocsi a lejtő aljára 4,4 másodperc alatt ért le.

b. A lejtő alján a sebesség:

$$v = at = 9{,}1\ \text{m/s}.$$

A lejtő alján a személygépkocsi sebessége 9,1 m/s.

c. A gépkocsira a vízszintes úton az eredő erő a mozgás irányával ellentétes



súrlódási erő.

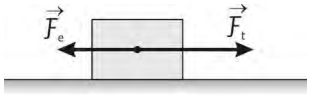
$$ma = -\mu mg,$$

ahonnan

$$a = -\mu g = -0{,}5\ \text{m/s}^2.$$

A megállásig eltelt idő:

$$t = v/|a| = 18{,}2\ \text{s}.$$



A megállásig megtett út:

$$s = |a|/2\ t^2 = 83\ \text{m}.$$

A személygépkocsi a megállásig 83 m utat tesz meg, hacsak nem ütközik valamibe hamarabb.

M.2.70.

Adatok:

$\alpha = 30°$

$F_h = 50$ N

$\underline{m = 30\ \text{kg}}$

$\underline{\mu = 0{,}08}$

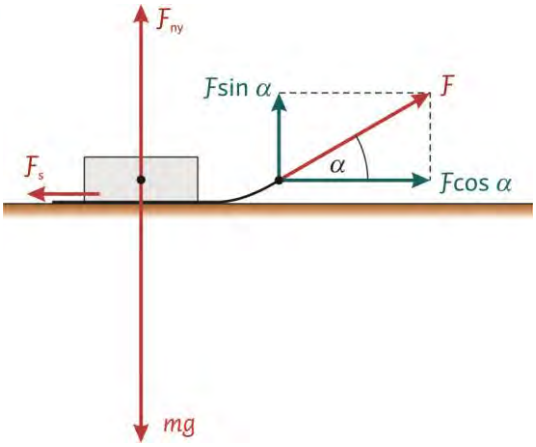
a. $F_{ny} = ?$, $F_s = ?$

b. $a = ?$

KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

a. Egyenletes sebesség esetén az F húzóerő vízszintes összetevője kiegyensúlyozza a súrlódási erőt. Függőlegesen az F erő függőleges összetevője csökkenti a talaj szánkóra kifejtett nyomóerejét.



A szánkóra kifejtett nyomóerő:

$$F_{ny} = mg - F\sin\alpha = 275 \text{ N}.$$

A súrlódási erő:

$$F_s = \mu F_{ny} = \mu(mg - F\sin\alpha)\ 22 \text{ N}.$$

A talaj a szánkóra 275 N függőleges nyomóerőt fejt ki, a vízszintes súrlódási erő nagysága 22 N. Mindkét erő a szánkóra hat, és mindkettőt a talaj fejti ki.

b. Írjuk fel a mozgásegyenleteket!

$$0 = mg - F_{ny} - F\sin\alpha$$

$$ma = F\cos\alpha - F_s = F\cos\alpha - \mu F_{ny}$$

A két egyenletből:

$$ma = F\cos\alpha - \mu(mg - F\sin\alpha) = 21{,}3 \text{ N},$$

amiből a gyorsulás

$$a = 0{,}71 \text{ m/s}^2.$$

A szánkó 0,71 m/s² gyorsulással halad.

2.71.

Adatok:

$\alpha = 17°$

$\underline{m = 70 \text{ kg}}$

a. v = ?

b. t = ?

a. A sípályán a sízőre a nehézségi erő és a talaj nyomóereje hat.
A mozgásegyenletek:

$$ma = mg\sin\alpha$$

$$0 = K - mg\cos\alpha.$$

A gyorsulás:

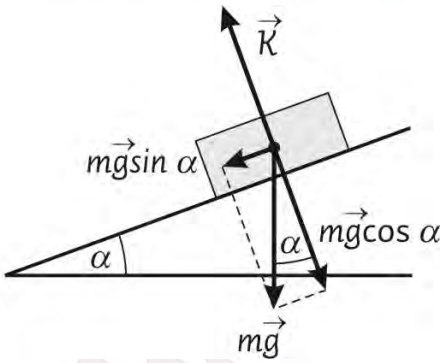
$$a = g\sin\alpha = 2{,}9 \text{ m/s}^2.$$

A lejtőn lévő mozgás ideje:

$$t = \sqrt{2s/a} = 5{,}9 \text{ s}.$$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT



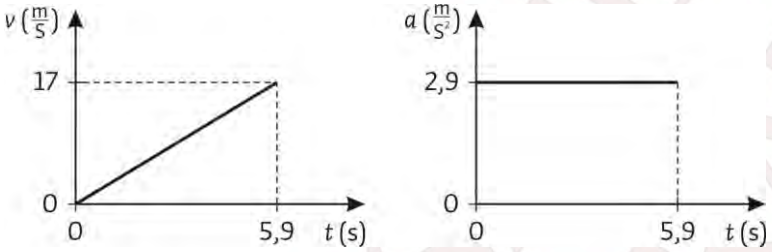
A gépkocsi 5,9 s alatt ért a pályaszakasz végére.

b. A síző sebessége a lejtő alján a v = at összefüggéssel számítható ki.
A sebesség:

$$v = at \approx 17 \text{ m/s}.$$

A síző 17 m/s sebességet ér el a pályaszakasz végére érve.

c. A síző sebessége és gyorsulása az idő függvényében:



4. ábra

M.2.72.

Adatok:

$\alpha = 12°$

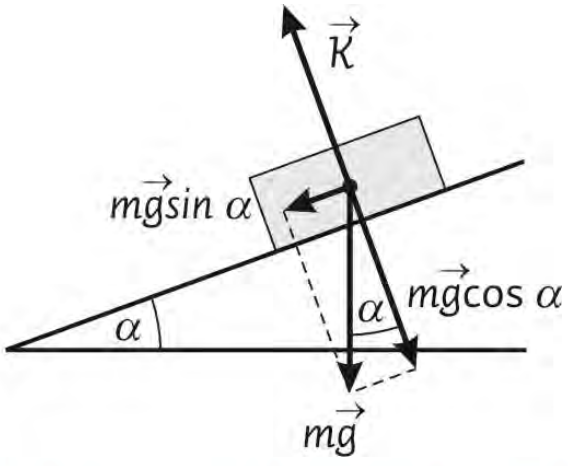
$m = 65$ kg

$\underline{\mu = 0{,}1}$

$F_h = ?$

A szánkóra ható erők:

1. nehézségi erő: mg
2. súrlódási erő: F_s
3. húzóerő: F_h
4. talaj nyomóereje: K



A lejtőre merőleges irányban a lejtő nyomóereje és a nehézségi erő függőleges irányú összetevője kiegyenlíti egymást. A lejtővel

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

párhuzamos irányban a húzóerővel a súrlódási erő és a nehézségi erő lejtőirányú összetevője tart egyensúlyt.
A mozgásegyenletek komponensenként:

$$0 = K - mg\cos\alpha$$
$$0 = F_h - mg\sin\alpha - Fs$$

A súrlódási erő: $F_s = \mu mg\cos\alpha$.

A második mozgásegyenletből

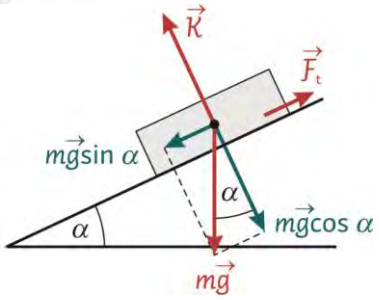
$$F_h = mg\sin\alpha + Fs = 195\ N.$$

Az apának 195 N erőt kell kifejtenie a szánkó húzásakor.

M.2.73.
Adatok:
$\alpha = 25°$
$s = 2\ m$
$\underline{t = 2{,}3\ s}$

a. $\mu_o = ?$
b. $\mu = ?$

a. Írjuk a fahasábra ható erőket, ha a deszkalap a vízszintessel 25°-os szöget zár be. Ekkor a tapadási súrlódási erő maximuma lép fel.
A mozgásegyenletek a deszkára merőleges és a deszkával párhuzamos összetevők szerint:



$$0 = K - mg\cos\alpha$$
$$0 = mg\sin\alpha - \mu_o\, mg\cos\alpha.$$

A tapadási súrlódási együtthatót a második mozgásegyenletből kifejezve:

$$\mu_o = tg\alpha = 0{,}47.$$

A tapadási súrlódási együttható értéke: $\mu_o = 0{,}47$.

b. A fahasáb gyorsulva mozog a deszkalapon. Ekkor a mozgásegyenletek:

$$0 = K - mg\cos\alpha$$
$$ma = mg\sin\alpha - \mu\, mg\cos\alpha.$$

A gyorsulás értékét az $s = a/2\ t^2$ összefüggésből határozhatjuk meg.

$$a = 2s/t^2 = 0{,}76\ m/s^2.$$

A második mozgásegyenletből a gyorsulás:

$$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha),$$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

ahonnan a csúszási együttható értéke:

$$\mu = 0{,}38.$$

A csúszási súrlódási együttható értéke 0,38.

M.2.74.

Adatok:

$m_1 = 10$ kg

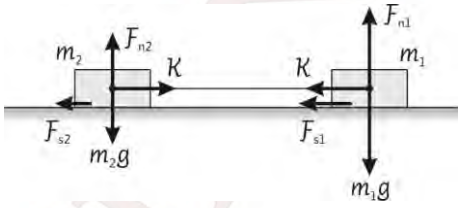
$m_2 = 6$ kg

$\mu = 0{,}07$

a. $F_s = ?$

b. $K = ?$

c. $F = ?$



Tételezzük fel, hogy az m_2 tömegű szánkó van hátul és az m_1 tömegű pedig elől.

a. Mindegyik szánkóra az $F_s = \mu mg$ képlettel leírható súrlódási erő hat.

$$F_{s,1} = \mu m_1 g = 7 \text{ N},$$
$$F_{s,2} = \mu m_2 g = 4{,}2 \text{ N}.$$

Az egyes szánkókra ható súrlódási erő 7 N, illetve 4,2 N.

b. A kötelet az m_2 tömegű testre ható húzóerő feszíti:

$$K = 4{,}2 \text{ N}.$$

c. Egyenletes mozgatás esetén a szánkókra ható súrlódási erőket kell leküzdeni:

$$F = 7 \text{ N} + 4{,}2 \text{ N} = 11{,}2 \text{ N}.$$

Barna és István 11,2 N erővel húzzák a szánkókat.

M.2.75.

Adatok:

$m_1 = 12$ kg

$m_2 = 15$ kg

a. $K_1 = ?$

b. $K = ?$

a. Ha a rendszer nyugalomban van, akkor a kötelet az m_2 tömegű test súlya feszíti.
$K_1 = 150$ N.

b. Az egyes testekre ható erőket az ábra mutatja. A testek elengedése után a rendszer mozgásba jön.A felső test ugyanakkora lefelé mutató gyorsulással indul, mint amennyivel az alsó test elindul felfelé.
A mozgásegyenletek:

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$$m_1 a = K - m_1 g$$
$$m_2 a = m_2 g - K.$$

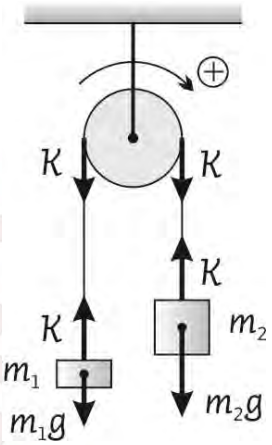
A gyorsulás:

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g = 1{,}1 \text{ m/s}^2.$$

A kötélerő:

$$K = m_2(g-a) \approx 133 \text{ N}.$$

A kötelet feszítő erő 133 N.



M.2.76.

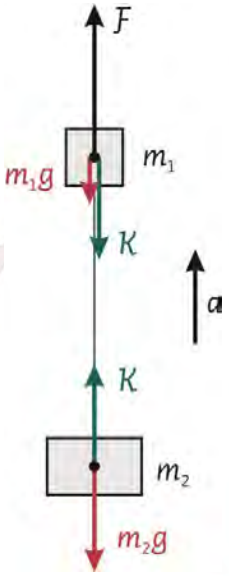
Adatok:

$m_1 = 5$ kg

$m_2 = 10$ kg

a. F = ?

b. F' = ?, ha a = 0,8 m/s²K = ?



a. Az F erőnek a két test nehézségi erejét kell egyensúlyoznia.

$$F = m_1 g + m_2 g = 150 \text{ N}.$$

A felső zsinegre 150 N erőt kell kifejteni az egyensúly megtartásához.

b. A két test felfelé gyorsul, mozgás közben a testekre ható erőket az ábra mutatja. A mozgásegyenletek:

$$m_1 a = F' - m_1 g - K$$
$$m_2 a = K - m_2 g.$$

A mozgásegyenletekből kapjuk:

$$F' = (m_1 + m_2)(g + a) = 162 \text{ N}.$$

A felső testet 162 N erővel kell emelnünk.

c. A b. feladatrészbeli mozgásegyenletekből

$$K = 108 \text{ N}.$$

A zsineget 108 N erő feszíti.

M.2.77.

Adatok:

$m_1 = 4$ kg

$m_2 = 1$ kg

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

h = 0,8 m

μ = 0,2

a. a= ?
b. K = ?
c. v = ?

a. Az egyes testekre ható erőket, valamint a fonálban fellépő erőket az ábra mutatja. Amikor a rendszer gyorsul, a fonál megfeszült állapotban van, így a két test gyorsulása azonos. A csiga és a fonál tömege elhanyagolható, így a fonálban ébredő erő a fonál minden végpontjában azonos.
A mozgásegyenletek:

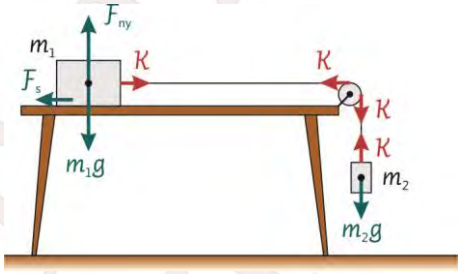
$$m_2 a = m_2 g - K$$

$$m_1 a = K - F_s$$

A súrlódási erő: $F_s = \mu m_1 g = 8$ N.
A gyorsulás a mozgásegyenletekből számítható:

$$a = 0{,}4 \text{ m/s}^2.$$

A rendszer 0,4 m/s² gyorsulással mozog.



b. A fonalat feszítő erő az alsó mozgásegyenletből:

$$K = m_1 a + F_s = 9{,}6 \text{ N}.$$

c. Az m_2 tömegű test egyenletesen gyorsul, a sebesség a $v = \sqrt{2as}$ összefüggésből:

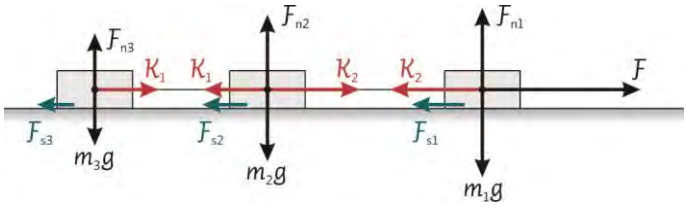
$$v = 0{,}8 \text{ m/s}.$$

Az m_2 tömegű test 0,8 m/s sebességgel ér földet, természetesen ugyanekkora a sebessége az m_1 tömegű testnek is ebben a pillanatban. Ezt követően az m_1 tömegű test $a = -\mu g = -2$ m/s² gyorsulással lassulni kezd, $\Delta t = \Delta v/a = 0{,}4$ s alatt megáll, miközben mindössze $v_{átlag}\Delta t = 0{,}16$ m = 16 cm utat tesz meg, feltéve, hogy van erre hely az asztalon.

M.2.78.

Adatok:
$m_1 = 5$ kg
$m_2 = 4$ kg
$m_3 = 3$ kg
F = 36 N
t = 10 s
μ = 0,25

a. a = ?
b. K_1 = ? K_2 = ?
c. v = ?



KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

a. Írjuk fel mindhárom testre a mozgásegyenleteket!

$$m_1a = F - K_1 - F_{s,1}$$
$$m_2a = K_1 - K_2 - F_{s,2}$$
$$m_3a = K_2 - F_{s,3}$$

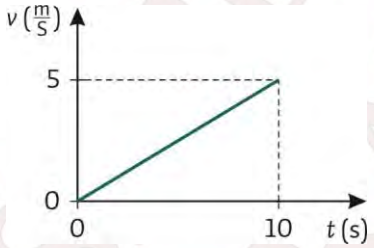
A mozgásegyenletek összeadásával a gyorsulás értéke

$$a = 0{,}5\ \text{m/s}^2.$$

b. A kötélerőket a mozgásegyenletekből fejezhetjük ki.

$$K_2 = m_3a + F_{s,3} = 9\ \text{N}$$
$$K_1 = m_2a + K_2 + F_{s,2} = 21\ \text{N}.$$

c. A sebesség az idő függvényében az első 10 s alatt.



KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Egyenletes körmozgás dinamikai leírása (alapozó feladatok)

M. 2.79.

v=54 km/h,= 15 m/s
$a = 2{,}4\ m/s^2$
a. r=?
b. T=?, w=?

a. A kör középpontja felé mutató centripetális gyorsulás következő összefüggéséből határozhatjuk meg a pályasugarat: $a_{cp} = v^2/r$.

$$r = v^2/a_{cp} = 93{,}75\ m.$$

b. A körülfordulási időt a $T = 2\pi r/v$ összefüggésből kaphatjuk meg: T = 39,3 s.
A szögsebesség: $w = 2\pi/T = 0{,}16\ 1/s$.

A körpálya sugara 93,75 m, a körülfordulási idő 39,3 s, a motorkerékpár szögsebessége 0,16 1/s.

M.2.80.

Adatok:
m =25 kg
$f = 0{,}3\ 1/s$
r = 2,5 m
F_{cp} = ?

A gyermeket a rá ható erők tartják körpályán, az eredő erő a kör középpontja felé mutató centripetális erő:

$$F_{cp} = mw^2r = m(2\pi f)^2\ r = 222\ N.$$

A gyermek körpályán tartásához 222 N eredő erő szükséges.

M.2.81.

Adatok:
$r = 384\ 400\ km = 3{,}84 \cdot 10^8\ m$
$T = 27{,}3\ nap = 2{,}36 \cdot 10^6\ s$
$\underline{M = 7{,}35 \cdot 10^{22}\ kg}$
F_{cp} = ?

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

A Holdat a Föld gravitációs ereje tartja Föld körüli körpályán:

$$F_{gr} = F_{cp} = mw^2r = m(2\pi/T)^2r,$$

amelyből

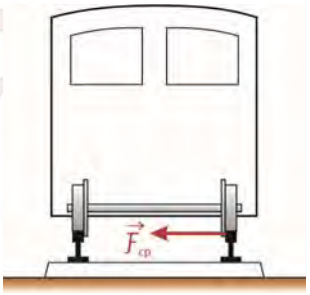
$$F_{cp} = 2 \cdot 10^{20} \text{ N}.$$

A Holdat $2 \cdot 10^{20}$ N gravitációs erő tartja közelítőleg Föld körüli körpályán.
Megjegyzés: Érdekességként említjük meg, hogy a Nap valamivel több, mint kétszer ekkora erővel hat a Föld körül keringő Holdra ($4{,}4 \cdot 10^{20}$ N), mert ekkora erővel tudja a Földdel együtt mozgó Holdat Nap körüli pályán tartani.

M.2.82.

a. A személyautót a tapadási súrlódási erő tartja körpályán, ezért a kör középpontja felé mutat. A körmozgáshoz szükséges centripetális erő nagysága: $F_{cp} = mv^2/r = 630$ N, míg a tapadási súrlódási erő maximuma: $F_{t,max} = \mu_o mg = 5600$ N, vagyis bőségesen elegendő a jármű biztonságos kanyarodásához.

b. A csúszási súrlódási erő az egymással érintkező felületek relatív elmozdulásával ellentétes irányú, ezért ebben az esetben érintő irányú, a gépkocsi sebességével ellentétes irányba mutat.



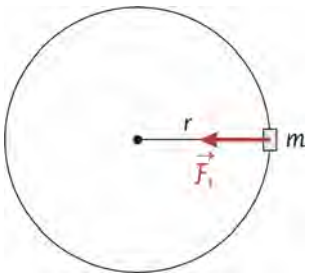
M.2.83.

Adatok:
$m = 70 \text{ t} = 7 \cdot 10^4$ kg
$r = 200$ m
$\underline{v = 72 \text{ km/h} = 20 \text{ m/s}}$
$K = ?$

A körpályán tartáshoz szükséges centripetális erőt a sínszál által a kerék peremére kifejtett oldalirányú K nyomóerő biztosítja. Így

$$K = F_{cp} = mv^2/r = 1{,}4 \cdot 10^5 \text{ N}.$$

Ugyanekkora, vagyis $1{,}4 \cdot 10^5$ N erővel nyomja a kerék pereme oldalirányban a sínszálat.



2.84.
Adatok:
$m = 2\,600$ kg
$r = 120$ m
$\underline{\mu = 0{,}5}$
$v_{max} = ?$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

A kisteherautóra a kanyarban a tapadási súrlódási erő a kör középpontja felé mutat. Ez adja egyben a testre ható erők eredőjét, a centripetális erőt.

$$mv^2/r = \mu_o mg,$$

ahonnan

$$v = \sqrt{\mu_0 gr} = 24{,}3 \text{ m/s}.$$

Az Opel maximális sebessége 24,3 m/s ≈ 87 km/h lehet.

M.2.85.

Adatok:
m = 1 600 kg
v = 90 km/h = 25 m/s
r = 100 m
$\mu_o = 0{,}4$
v = ?

Az Audi kerekeire a kanyarban a körpálya középpontja felé mutató tapadási súrlódási erő hat. Ez egyben a gépkocsi ható erők eredője, azaz a centripetális erő is.

$$mv_{max}^2/r = \mu_o mg,$$

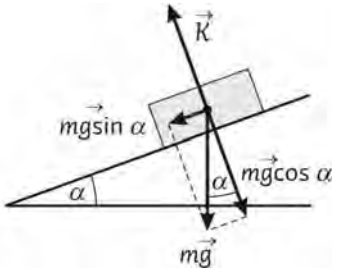
ahonnan

$$v_{max} = \sqrt{\mu_0 gr} = 20 \text{ m/s}.$$

Mivel az Audi 90 km/h sebességgel halad, ezért csökkentenie kell a sebességét.

M. 2.86.

Adatok:
r = 160 m
v = 72 km/h = 20 m/s
m = 1 400 kg
K = ?



A személygépkocsira függőleges irányban a nehézségi erő és a híd nyomóereje hat.
Az eredő erő

$$F_{cp} = mg - K,$$

ahonnan

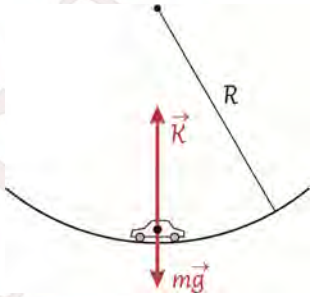
$$K = m(g - v^2/r).$$
$$K = 10\,500 \text{ N}.$$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

A Mercedest 10 500 N erővel nyomja függőleges irányban felfelé a híd, ugyanekkora erővel nyomja lefelé a gépkocsi a hidat.

M.2.87.



Adatok:
r = 200 m
v = 90 km/h = 25 m/s
m = 1 100 kg
K = ?

A gépkocsira a nehézségi erő és a talaj nyomóereje hat. Az eredő erő felfelé, a kör középpontja felé mutat.

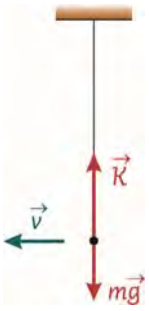
$$F_{cp} = K - mg.$$

A talaj nyomóereje

$$K = m(g + v^2/r) = 14\,400 \text{ N}.$$

Az úttestet az autó a K nyomóerő ellenerejével, 14 400 N erővel nyomja.

M.2.88.



Adatok:
l = 0,5 m
v = 1,5 m/s
m = 0,4 kg
K = ?

A fonálingára a nehézségi erő és a fonál húzóereje hat.
A körmozgás miatt az eredő erő a kör középpontja (felfelé) mutat.

$$F_{cp} = K - mg,$$

ahonnan

$$K = m(g + v^2/r) = 5{,}8 \text{ N}.$$

A fonalat 5,8 N nagyságú erő terheli, vagyis a test súlyánál nagyobb erő lép fel a fonálban.

Egyenletesen változó körmozgás kinematikai leírása (alapozó feladatok)

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.2.89.

Adatok:

$\Delta t = 4$ s

$w_1 = 0{,}4$ 1/s

$\underline{w_2 = 1{,}5 \text{ 1/s}}$

$\beta = ?$

A szöggyorsulás

$$\beta = \Delta\omega/\Delta t = (\omega_2 - \omega_1)/\Delta t = 0{,}275 \text{ 1/s}^2.$$

A kerékpár szöggyorsulása 0,275 1/s².

M.2.90.

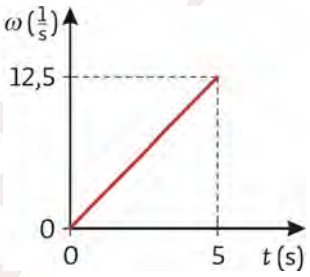
Adatok:

$\beta = 2{,}5$ 1/s²

$\underline{t = 5 \text{ s}}$

a. w = ?

b. w-t grafikon



a. A szögsebesség

$$w = \beta t = 12{,}5 \text{ 1/s}.$$

A lendkerék 12,5 1/s szögsebességet ér el.

b. A szögsebesség-idő grafikon

M.2.91.

Adatok:

r = 1,3 m

t = 120 s

$\underline{f = 50 \text{ 1/s}}$

a. β=?

b. α=?

c. n=?

a. A szögsebesség

$$w = 2\pi f = 314 \text{ 1/ s}.$$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

A szöggyorsulás

$$\beta = \Delta\omega/\Delta t = 2{,}62\ 1/s^2.$$

A szöggyorsulás 2,62 1/s².

b. A szögelfordulás az $\alpha = \beta/2\ t^2$ összefüggésből

$$\alpha = 1{,}88 \cdot 10^4 \text{ radián.}$$

A szögelfordulás $1{,}88 \cdot 10^4$ radián (= $1{,}08 \cdot 10^6$ fok).

c. A fordulatok száma $n=\alpha/2\pi$ alapján

$$n = 3000.$$

!

M.2.92.

Adatok:

$w_o = 0{,}4$ 1/s

$w_1 = 17$ 1/s

$\underline{n = 4}$

$\underline{r = 1{,}5\ m}$

a. β = ?

b. v = ?; a_t = ?

a. A kalapács átlagos szögsebessége: $(\omega_1 + \omega_o)/2 = 8{,}7$ 1/s, négy teljes fordulat alatt a szögelfordulás 8π radián, vagyis a felgyorsítás ideje: $\Delta t = 8\pi/\omega_{átlag} = 2{,}9$ s. A szöggyorsulást a $\beta = \frac{\Delta w}{\Delta t}$ definíció alapján számíthatjuk ki:

$$\beta = \frac{17-0{,}4}{2{,}9} = 5{,}7\ 1/s^2.$$

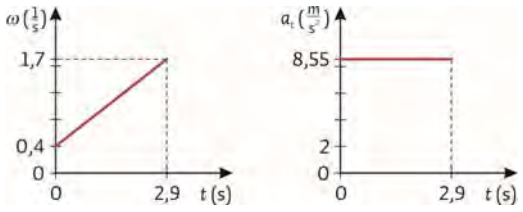
b. A kalapács végsebességét a $v = r\omega_1$ összefüggés adja meg:

$$v = 25{,}5 \text{ m/s.}$$

A tangenciális gyorsulásra vonatkozó $a_t = \beta r$ összefüggés alapján

$$a_t = 8{,}55 \text{ m/s}^2.$$

c. A kalapács szögsebesség-idő és tangenciális gyorsulás-idő grafikonja



KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

A kalapács szöggyorsulása 5,7 1/s², maximális sebessége 25,5 m/s, tangenciális gyorsulása 8,55 m/s².

M.2.93.

r = 0,4 m

A grafikonról leolvashatjuk, hogy $\omega = \beta t$, ahol $\beta = 60\pi$ 1/s². Állandó szöggyorsuláshoz és a megadott kezdeti feltételekhez a következő szögelfordulás-idő függvény tartozik:

$$\alpha = (\beta/2)\, t^2,$$

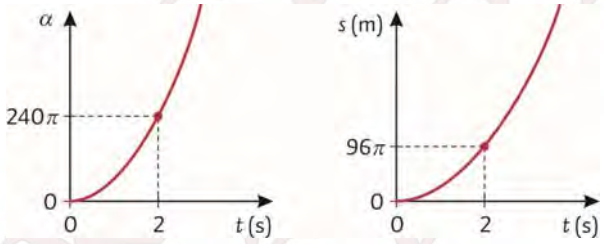
aminek a képe parabola.
A szögelfordulás értéke például 2 s esetén:

$$\alpha = wt = 240\pi \text{ rad.}$$

A megtett útról az $s = \alpha r = r(\beta/2)\, t^2$ összefüggés felhasználásával láthatjuk, hogy szintén parabola, aminek egyik helyettesítési értéke 2 s esetén:

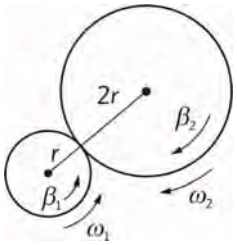
$$s = 96\pi \text{ m.}$$

A mozgás szögelfordulás-idő és út-idő grafikonjai



M.2.94.

Adatok:
r = 0,15 m
β = 5 1/s²
a. a_t = ?
b. β = ?



a. A fékpad tangenciális gyorsulása az $a_t = \beta r$ összefüggés felhasználásával

$$a_t = 0{,}75 \text{ m/s}^2.$$

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

b. Az érintkező felületeken a kerületi sebességek ($v = r\omega$) megegyeznek, így a pillanatnyi szögsebességek a sugarakkal fordítottan arányosak, azaz

$$\frac{w_1}{w_2} = 2.$$

Mivel $w = \beta t$, így $\beta_1 = 2\beta_2$.
A kerék szöggyorsulása 2,5 1/s².
A fékpad hengerének tangenciális gyorsulása 0,75 m/s², míg a kerék szöggyorsulása
2,5 1/s².

M. 2.95.

Adatok:
m = 2 kg
t = 1,8 s
w = 12,9 1/s
r = 1,2 m
a. β = ?
b. v = ?
c. $F_é$ = ?; ΣF = ?

a. A szöggyorsulás a $\beta = \frac{\Delta w}{\Delta t}$ definíció alapján:

$$\beta = \frac{12{,}9-0}{1{,}8} = 7{,}2 \text{ 1/s}^2.$$

A diszkosz szöggyorsulása 7,2 1/s².

b. A kerületi sebesség és a szögsebesség között fennáll a $v = wr$ kapcsolat

$$\max v_k = 15{,}5 \text{ m/s}.$$

A maximális kerületi sebessége a diszkosznak 15,5 m/s.

c. A diszkoszt sebességének nagyságát növelő erőhöz először az érintőleges gyorsulás értékét határozzuk meg:

$$a_t = \beta r = 8{,}6 \text{ m/s}^2.$$

A diszkoszra ható érintőirányú erő:

$$F_t = ma_t = 17{,}2 \text{ N}.$$

A diszkosz gyorsulását két összetevőre bonthatjuk fel. Ezek közül az egyik az állandó értékű érintőirányú gyorsulás, a másik pedig a fokozatosan növekvő, sugárirányban a körpálya középpontja felé mutató centripetális gyorsulás. Az eldobás előtti pillanatban a centripetális gyorsulás:

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$a_{cp} = (\max v_k)^2/r = 200\ m/s^2$.

A diszkosz eredő gyorsulása ennek a két gyorsulás összetevőnek a vektori összege:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_{cp}^2} = 200{,}2\ m/s^2.$$

A diszkoszra ható eredő erő: $\Sigma F = ma = 400{,}4$ N.

A diszkoszra ható érintőirányú erő 17,2 N. A diszkoszra ható eredő erő az eldobás előtti pillanatban 400,4 N.

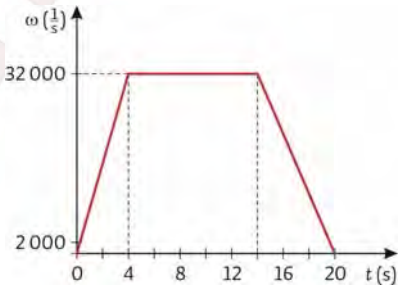
M.2.96.

Adatok:

r = 0,115 m

a. Az egyes szakaszokon a mozgások
   I. egyenletesen gyorsuló körmozgás
   II. egyenletes szögsebességű körmozgás
   III. egyenletesen lassuló körmozgás

b. A mozgás szögsebesség-idő grafikonja



c. A korong fordulatszáma a második szakaszon

$f = w/2\pi = 100$ 1/s.

A korong fordulatszáma 100 1/s.

d. A szögsebesség $w = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$ definíciója alapján a szögelfordulásra az $\alpha = wt$ összefüggés érvényes.

$$\alpha_1 = \frac{w_1}{2} t_1 = 1260\ (rad),$$

$$\alpha_2 = w_2 t_2 = 6280\ (rad),$$

$$\alpha_3 = \frac{w_1 + w_2}{2} t_3 = 19700\ (rad).$$

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 9510\ (rad).$$

A 20 s alatti átlagos teljes szögelfordulás 9510 (rad).

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

e. Az átlagos szögsebességet az összes szögelfordulás és a közben eltelt idő hányadosa adja meg:

$$w_{átl} = 475{,}5\ 1/s.$$

A korong átlagos szögsebessége 475,5 1/s.

M.2.97.

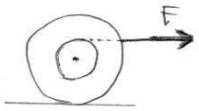
Adatok:

t = 3 s

<u>v= 0,4 m/s</u>

a. v = ?
b. s=?
c. s_f=?

A tiszta gördülés miatt az orsó asztallal érintkező pontja minden időpillanatban áll, ezért az orsó középpontja fele akkora sebességgel mozog, mint a legfelső pontja, ahol a cérna a megadott 0,4 m/s sebességgel tekeredik le róla.



a. A cérnaspulni sebessége v_C = 0,2 m/s.
b. A cérnaspulni által megtett út s = 0,6 m.
c. A letekeredett fonál hossza s_f = 1,2 m.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

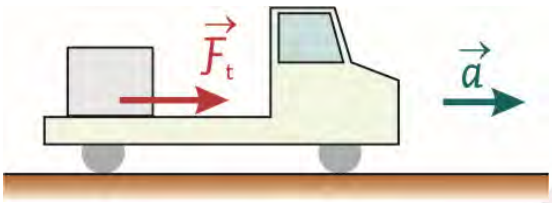
Tehetetlenségi erők (alapozó feladatok)

M.2.98.

a. Földhöz rögzített vonatkoztatási rendszerben:

A rakfelületen lévő ládát a rakfelület és a láda között fellépő F_t tapadási súrlódási erő gyorsítja, amely legnagyobb értéke $F_{t,max} = \mu_o\, mg$. A mozgásegyenletet felírva

$$ma_{max} = \mu_o\, mg,$$



ahonnan

$$a_{max} = \mu_o g.$$

A láda akkor csúszik meg a rakfelületen, ha az teherautó gyorsulása 4 m/s²-nél nagyobb.

b. Gyorsuló teherautóhoz rögzített vonatkoztatási rendszerben:

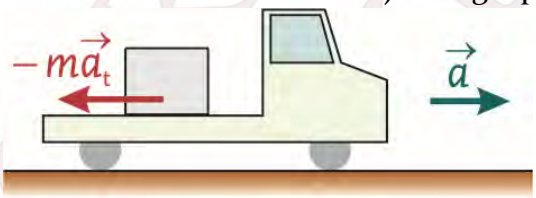
A testre ténylegesen ható, kölcsönhatásból származó erőkön kívül vegyük fel a mozgásiránnyal ellentétesen az $F_{teh} = -ma_o$ tehetetlenségi erőt.

A láda a teherautó platójához képest akkor van egyensúlyban, ha a hátrafelé mutató tehetetlenségi erő egyensúlyt tart a súrlódási kölcsönhatásból származó, előrefelé mutató tapadási súrlódási erővel: $F_t + F_{teh} = 0$.

Mivel a tapadási súrlódási erőnek maximuma van, így a teherautó gyorsulásának is maximuma van: $F_{t,max} + F_{teh,max} = 0$. Végezzük el a behelyettesítéseket:

$$\mu_o\, mg - ma_{max} = 0,$$

amiből természetesen újra megkapjuk az $a_{max} = \mu_o g$ eredményt.



A láda akkor csúszik meg, ha $a_o > 4$ m/s².

M.2.99.

a. Földhöz rögzített vonatkoztatási rendszerben:

Az m tömegű test a lejtőn nyugalomban marad, ami azt jelenti, hogy a test a lejtővel együtt a_o gyorsulással mozog. A testre a lejtőn két erő hat:

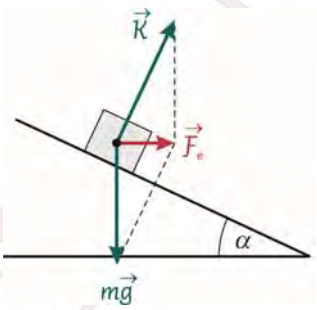
- az mg nehézségi erő

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

- a lejtő által kifejtett, a lejtőre merőleges K nyomóerő.

A nehézségi erő és a K nyomóerő F_e eredője hozza létre az m tömegű test gyorsulását:

$$a = F_e/m.$$



Az ábráról látható, hogy

$$tg\alpha = F_e/mg = a_o/g,$$

ahonnan

$$a_o = g \cdot tg\alpha.$$

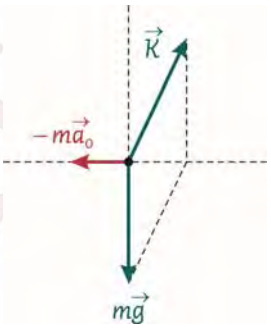
$$a_o = 4{,}6\ m/s^2.$$

A szükséges gyorsulás értéke 4,6 m/s².

b. Lejtőhöz rögzített vonatkoztatási rendszerben:

A m tömegű testre ható erők:

- mg nehézségi erő,
- lejtő által kifejtett K nyomóerő,
- $-ma_o$ tehetetlenségi erő.



Az m tömegű test a lejtőn nyugalomban, egyensúlyi állapotban van, így a három erő vektori összege zérus. Felírva az egyensúly feltételeit vízszintes és függőleges irányú összetevőkre:

$$K \sin\alpha - ma_o = 0$$

$$K \cos\alpha - mg = 0.$$

A két egyenletből kapjuk

$$tg\alpha = a_o/g,$$

ahonnan

$$a_o = g\ tg\alpha,$$

$$a_o = 4{,}6\ m/s^2.$$

Érdekességként említjük meg, hogy ebben az esetben a K nyomóerő nagysága:

$$K = \frac{mg}{\cos\alpha}.$$

A lejtőt vízszintes irányban 4,6 m/s² gyorsulással kell mozgatnunk, hogy az m tömegű test ne csússzon meg.

M.2.100.

a. A Földhöz viszonyított koordinátarendszerben az m tömegű testre két erő hat:

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

- az mg nehézségi erő
- fonálirányban a fonál K húzóereje.

A köringa vízszintes síkban egyenletes körmozgást végez, tehát a gyorsulása a kör középpontja felé mutat. Így a gyorsulást létrehozó két erő eredője is a kör középpontja felé mutat, mert a gyorsulás iránya mindig megegyezik az eredő erő irányával. A Földhöz rögzített tehetetlenségi rendszerben az m tömegű test gyorsulása:

$$a_{cp} = F_{cp}/m.$$

A gyorsulást így fejezhetjük ki:

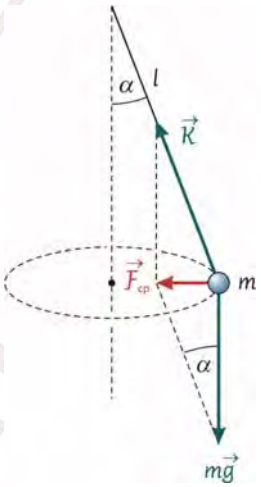
$$a_{cp} = v^2/r = v^2/l \cdot \sin\alpha,$$

míg a centripetális erő (eredő erő) így adható meg:

$$F_{cp} = mg\ tg\alpha.$$

Ha ezeket a kifejezéseket behelyettesítjük az első egyenletünkbe, akkor a köringa sebességét így kapjuk meg:

$$v = \sin\alpha \sqrt{\frac{lg}{\cos\alpha}}.$$



b. A körmozgást végző testtel (gyorsuló rendszerrel) együtt mozgó megfigyelő az m tömegű testet egyensúlyban látja

Egyenletesen forgó vonatkoztatási rendszerben a valódi, kölcsönhatásból származó erőkön kívül fel kell vennünk az úgynevezett centrifugális erőt is, amely fiktív, tehetetlenségi erő, sugárirányban kifelé mutat, nagysága:

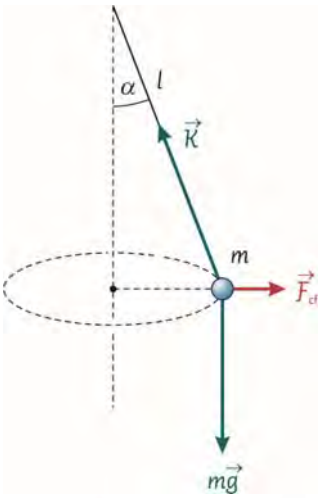
$$F_{cf} = m\omega^2 r = mv^2/r.$$

Az egyensúly feltétele az, hogy az ábrán látható három erő eredője nulla, vagyis

$$F_{cf} = mg\ tg\alpha.$$

A két egyenletből: $v^2/r = g\ tg\alpha$, továbbá felhasználva, hogy $r = l \sin\alpha$, az ingatest sebességére a függőlegessel bezárt szög függvényében ezt a végeredményt kapjuk:

$$v = \sin\alpha \sqrt{\frac{lg}{\cos\alpha}}.$$



KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.2.101.

Adatok:
m = 70 kg
R = 6,38 · 10^6 m.
F_{cf} =?

a. A sarkokon a centrifugális erő értéke nulla.
b. A centrifugális erő alakja a Földön:

$$F_{cf} = mw^2r = mw^2R\cos\alpha,$$

ahol α a szélességi körök fokszáma (az Egyenlítőn nulla, a sarkokon 90°.
Az Egyenlítőn a legnagyobb a centrifugális erő

$$F_{cf} = mw^2R,$$

ahonnan

$$F_{cf} = 2{,}36 \text{ N}.$$

A számításkor figyelembe vettük, hogy a Föld szögsebessége:

$$\omega = 2\pi/1 \text{ nap} = 2\pi/86\,400 \text{ s}.$$

Az Egyenlítőn a 70 kg tömegű emberre ható centrifugális erő 2,36 N.

M.2.102.

R = 6370 km = 6,37 · 10^6 m
m = 15 t = 1,5 · 10^4 kg
v = 90km/h = 25 m/s
α = 46,6°
F_C = ?

A Coriolis-erő képlete: $F_C = 2m(v \times w) = 2mvw\sin\alpha$.
A Föld szögsebessége

$$w = 2\pi/T = 7{,}27\ 10^{-5}\ 1/s.$$

A Coriolis-erő

$$F_C = 39{,}6 \text{ N}.$$

Pakson a 90 km/h sebességgel mozgó távolsági autóbuszra ható Coriolis-erő nagysága 39,6 N.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

A Newton-féle gravitációs törvény, mesterséges égitestek (alapozó feladatok)

M.2.103.

Adatok:
$r = 384\,400 \text{ km} = 3{,}844 \cdot 10^8 \text{ m}$
$m_F = 5{,}97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
$m_H = 7{,}35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$
$F_g = ?$

A gravitációs vonzóerő a Newton-féle gravitációs törvényből számítható:

$$F_g = \gamma m_F m_{2H}/r^2$$

ahonnan

$$F_g = 1{,}98 \cdot 10^{20} \text{ N}.$$

A Holdat tehát átlagosan $1{,}98 \cdot 10^{20}$ N erő tarja Föld körüli pályán.

Megjegyzés: Ha ezt az erőt egyenlővé tesszük a Holdra ható centripetális erővel, akkor kiszámíthatjuk a Hold keringési periódusidejét:

$$F_g = F_{cp} = m_H r\omega^2 = m_H r(2\pi/T)^2,$$

amiből T = 27,5 nap.
Ez az adat nem egyezik a feladatban közölt 29,53 napos keringési idővel. Ennek oka az, hogy amíg holdtöltétől holdtöltéig telik az idő (ez átlagosan 29,53 nap), az nem egyezik meg a Hold 360 fokos körülfordulásával, mert közben a Föld is körbe jár a Nap körül (egy holdperiódus alatt nagyjából 30°-ot). Tehát a 29,53 napos periódus alatt a Hold 390°-ot fordul, vagyis a 360°-os fordulathoz (360/390)·29,53 nap = 27,3 napra van szüksége, ami már meglehetősen közel jár az általunk kiszámított 27,5 napos periódusidőhöz, azonban nem pontosan egyezik meg vele. Még egy korrekciót figyelembe kell vennünk, ez pedig az, hogy a Hold nem a Föld középpontja körül kering, hanem a Föld-Hold rendszer közös tömegközéppontja körül, ami nagyjából háromnegyed Föld-sugárra van a Föld középpontjától. Ez tehát azt jelenti, hogy $r' = 3{,}796 \cdot 10^8$ m pályasugárral újra elvégezhetjük a Hold keringési idejének a számítását, amiből T = 27,3 napos keringési időt kapunk. Adatbázisokból ellenőrizhetjük, hogy a Hold úgynevezett *sziderikus* (más szóval pályamenti, vagy idegen szóval orbitális) *keringési ideje* 27,322 nap, ami megegyezik a fenti számítás alapján kapott eredményünkkel. A holdtöltétől holdtöltéig eltelő periódusidő az úgynevezett *szinodikus periódus*, ami 29,531 nap, egyezésben a feladatbeli adattal.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.2.104.

Adatok:
r= 384 400 km = 3,844 10^8 m
$M_F = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg
$M_H = 7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg
x=?

A keresett helyen az odahelyezett m tömegű testre a Hold és a Föld által kifejtett gravitációs vonzóerő megegyezik:

$$\gamma m M_F/x^2 = \gamma m M_H/(r-x)^2,$$

ahonnan

$$x = 3{,}751 \cdot 10^8 \text{ m}.$$

A keresett távolság a Föld középpontjától 375 100 km távolságra van.

Megjegyzés: Érdekes belegondolni, hogy ez a pont 7 600 km-re van a Hold felszínétől, ami alig több, mint egy Föld-sugár. Ez a pont nem mindig ugyanekkora távolságra van a Földtől, mert a megoldásban szereplő 384 400 km a Föld-Hold átlagos távolságot jelenti, ami nagyjából 360 000 km és 400 000 km között változik.

M.2.105.

Newton III. törvénye értelmében egyenlő nagyságú erőt fejtenek ki egymásra. A kifejtett erő nagyságát a Newton-féle gravitációs törvény adja meg:

$$F_g = \gamma m_N m_F/r^2.$$

Az egymásra kifejtett vonzóerők egyenlő nagyságúak.

M.2.106

Adatok:
$M = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg
$m = 400 \text{ t} = 4 \cdot 10^5$ kg
$R = 6370 \text{ km} = 6{,}37 \cdot 10^6$ m
$h = 360 \text{ km} = 3{,}6 \cdot 10^5$ m
F_g = ?

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

A gravitációs vonzóerő a Newton-féle gravitációs törvényből számítható:

$$F_g = \gamma m_1 m_2 / r^2,$$

ahonnan

$$F_g = 1{,}235 \cdot 10^9 \text{ N}.$$

A Nemzetközi űrállomás és a Föld között $3{,}52 \cdot 10^6$ N erő lép fel.

Megjegyzés: A Nemzetközi űrállomás és a Föld között fellépő erő nagysága nagyjából 90%-a a Nemzetközi űrállomás Föld felszínen mérhető súlyának.

M.2.107.

Adatok:
$m_H = 7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg
r= 384 400 km = $3{,}844 \cdot 10^8$ m
V = 100 m³
$\rho = 1030$ kg/m³
F_g = ?

A Hold a Föld felszínén lévő víztömegre a Newton-féle gravitációs törvénnyel leírható gravitációs vonzóerővel hat.

$$F_g' = \gamma m_H m_{víz}/(r - R)^2, \text{ illetve } F_g'' = \gamma m_H m_{víz}/(r + R)^2,$$

ahol R = 6400 km, a Föld sugara.
A víz tömege

$$m_{víz} = 103\,000 \text{ kg}.$$

A gravitációs vonzóerő:

$$F_g' = 3{,}53 \text{ N, illetve } F_g'' = 3{,}31 \text{ N}.$$

A 100 m³-es víztömegre a Hold felöli oldalon 0,22 N erővel nagyobb erő hat, mint a túlsó oldalon.
A kiszemelt víztömegre ható erők: 3,53 N és 3,31N.

Megjegyzés: Az árapály jelenségének a megértéséhez nem elégséges önmagában ennek a kis erőkülönbségnek az ismerete. Figyelembe kell vennünk azt is, hogy nemcsak a Hold mozog a Föld-Hold rendszer közös tömegközéppontja körül, hanem a Föld is. A Föld azonban nem kering ezen pont körül, ahogy ezt a Hold teszi, hanem úgynevezett transzlációs körmozgást végez. Ez azt jelenti, hogy (eltekintve a Föld saját tengely körüli forgásától) a Föld minden egyes pontja ugyanakkora sugarú körpályán mozog, ugyanakkora szögsebességgel, azonban ezek a kör-középpontok nem esnek egybe. Ez azt jelenti, hogy így a Föld

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

minden egyes pontjának ugyanakkora a centripetális gyorsulása, amit a Hold gravitációs ereje biztosít. A gravitációs erő azonban csak a Föld középpontjában eredményezi pontosan ezt a gyorsulást. A Hold felöli oldalon a gravitációs erő a kisebb távolság miatt a szükségesnél egy kissé nagyobb, ezért itt a víztömeg a Hold felé mozdul el, míg a túlsó oldalon a kissé nagyobb távolság miatt a gravitációs erő kismértékben kisebb a szükségesnél, ezért itt a víztömeg egy kissé lemarad. Mindkét hatás azt eredményezi, hogy megemelkedik a víz. Ez a magyarázata annak, hogy egyszerre van dagály a Föld Hold felöli oldalán és a túlsó oldalon is. Belátható az is, hogy a két dagályhullám közel azonos nagyságú, a Hold felöli oldalon mindössze két százalékkal nagyobb az egyensúlyi dagályemelkedés, mint a túlsó oldalon. A helyi földrajzi körülmények miatt a dagályhullám bizonyos helyeken feltorlódhat, így az egyensúlyi vízszint emelkedéshez képest sokkal nagyobb dagály-szintek alakulhatnak ki.

M.2.108.

Adatok:
$g = 9{,}81\ m/s^2$
$R = 6370\ km = 6{,}37 \cdot 10^6\ m$
$\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$
$M_F = ?$

A Föld felszínén lévő, m tömegű testre ható nehézségi erő nagy pontossággal megegyezik a gravitációs vonzóerővel.

$$mg = \gamma M_F m / R^2,$$

ahonnan

$$M_F = g R^2 / \gamma = 5{,}97 \cdot 10^{24}\ kg.$$

A Föld tömege $5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg.

M.2.109.

Adatok:
$R = 0{,}05 m$
$d = 0{,}25\ m$
$F_g = ?$

Az ólomgömbök tömege:

$$m = \rho V = \rho\ 4/3\ R^3\ \pi,$$

amelyből

$$m = 5{,}94\ kg.$$

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

A vonzóerőt a Newton-féle gravitációs törvényből számítjuk ki.

$$F_g = \gamma m_1 m_2 / r^2,$$

ahonnan

$$F_g = 3{,}76 \cdot 10^{-8} \text{ N}.$$

Az ólomgömbök közötti gravitációs vonzóerő $3{,}76 \cdot 10^{-8}$ N.

Megjegyzés: A Cavendish kísérletben a torziós szál alján egy vékony keresztrúd található, melynek két végén kisméretű ólomgömbök vannak, és ezek közvetlen közelébe helyeznek el két viszonylag nagy tömegű ólomgömböt igen kis távolságra. Tehát a reális adatok szerint az egyik gömb mondjuk 3 cm átmérőjű, a másik 12 cm átmérőjű, és a kettő közötti távolság tipikusan 8 cm. Ezekkel az adatokkal is hasonló nagyságrendű végeredményre jutunk: $F_g = 1{,}71 \cdot 10^{-8}$ N. A két nagy gömböt úgy helyezik el, hogy a két kis gömbre ható gravitációs erő azonos irányú, maximális forgatónyomatékot adjon, ami a torziós szál elfordulását eredményezi.

M.2.110.

Adatok:

$R_1 = 0{,}1$ m

$R_2 = 0{,}08$ m

$r = 0{,}25$ m

$\underline{\rho = 8920 \text{ kg/m}^3}$

$F_g = ?$

A vörösréz golyók tömege az $m = \rho 4/3 R^3 \pi$ összefüggéssel számítható ki.

A tömegek:

$$m_1 = 37{,}36 \text{ kg},$$
$$m_2 = 19{,}13 \text{ kg}.$$

A két golyó között a gravitációs vonzóerő lép fel.

$$F_g = \gamma m_1 m_2 / r^2 = 7{,}63 \cdot 10^{-7} \text{ N}.$$

A vörösréz golyók $7{,}63 \cdot 10^{-7}$ N erővel vonzzák egymást 0,25 m távolságról.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.2.111

Adatok:
F_g = 0,01 N
ρ_{vas} = 7874 kg/m³

A vasgömbök között a Newton-féle gravitációs vonzóerő lép fel.

$$F_g = \gamma m^2 / r^2. \quad (1)$$

A gömbök sugara legyen R. Könnyen belátható, hogy két gömb akkor fejt ki egymásra maximális vonzóerőt, ha a felületük érintkezik. Így a közöttük lévő távolság minimuma 2R.
Figyelembe véve, hogy a térfogatuk:

$$V = 4/3\ R^3\ \pi,$$

Az (1) összefüggés:

$$F_g = \gamma\ (\rho^3\ \pi)^2/4R^2,$$

ahonnan

$$R = \sqrt[4]{\frac{9F_g}{4\gamma\rho^2\pi^2}} = 0{,}862 \text{ m}.$$

Ekkora méretű gömbök térfogata 2,68 m³, amiből a tömegük kiszámítható:

$$m_{min} = 21\,100 \text{ kg} \approx 21 \text{ tonna}.$$

A vasgömböknek legalább 21 100 kg tömegűeknek kellene lenniük.

M.2.112

Adatok:
m = 400 t = $4 \cdot 10^5$ kg
h = 360 km = $3{,}6 \cdot 10^5$ m
t = 92 min = 5520 s
R = $6{,}37 \cdot 10^6$ m
M = $6 \cdot 10^{24}$ kg
$g' = ?$

I.megoldás:
A Nemzetközi űrállomásra hat a Newton-féle gravitációs törvényből származtatható tömegvonzási erő, ami jó közelítéssel a nehézségi erővel egyenlő:

$$mg' = \gamma\frac{mM}{(R+h)^2},$$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

amelyből

$$g' = 8{,}8 \text{ m/s}^2.$$

A Nemzetközi űrállomáson a nehézségi gyorsulás értéke 8,8 m/s².

II.megoldás:
A Newton-féle gravitációs törvényből következik, hogy a nehézségi gyorsulás értéke fordítottan arányos a Föld középpontjától mért távolság négyzetével. Tudjuk, hogy a Föld felszínén a nehézségi gyorsulás értéke 9,81 m/s², így a következő összefüggést írhatjuk fel:

$$\frac{g'}{g} = \left(\frac{R}{R+h}\right)^2,$$

amiből g' = 8,8 m/s².

A Nemzetközi űrállomáson a nehézségi gyorsulás értéke 8,8 m/s².

Megjegyzés: Érdemes észrevennünk, hogy a földfelszíni nehézségi gyorsulás ismeretében a számításokhoz csak geometriai adatokra van szükségünk. Az is látható, hogy 360 km magasságban a Föld gravitációja mindössze 10 %-kal kisebb a földfelszíni értékhez képest.

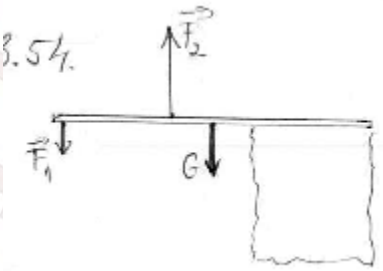
KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Forgatónyomaték, a merev testre ható erőrendszerek (alapozó feladatok)

M.2.113.
A sarokpántoktól minél távolabb toljuk a kaput, annál nagyobb az általunk kifejtett erő erőkarja. Így a forgatónyomaték is nagyobb lesz. A zárszerkezetnél tolva könnyebb becsukni a kaput. Ezért helyezik el az ajtókon, kapukon a kilincset távol a sarokpántoktól.

M.2.114.
A zászló kezünkben lévő végét F_1 erővel lefelé nyomjuk, míg a zászló tömegközéppontjához közelebb lévő kezünkkel ellentétes irányban, F_2 erővel emeljük a zászlót.



A zászlót könnyebb megtartanunk, ha a két kezünk hatásvonala messzebb van egymástól. Ha a súlypontban tudnánk megtartani a zászlórudat, akkor egyik kezünk is elég lenne, azonban a zászló anyaga ezt megakadályozza. Az egyensúlyhoz az erőknek és a forgatónyomatékoknak is nullát kell eredményezniük. Mindkét feltétel teljesüléséhez mindkét kezünkre szükségünk van. A két erő előjeles összege egyensúlyozza ki a nehézségi erőt, továbbá a rendszer tömegközéppontját mint forgástengelyt tekintve, a két erő előjeles forgatónyomatékának is nullát kell eredményeznie a tömegközéppont körül (mert erre a pontra a nehézségi erő forgatónyomatéka nulla). Akkor könnyebb megtartani vízszintesen a zászlót, ha a felfelé mutató erőt kifejtő kezünk a zászló anyagához közel, másik kezünk viszont a zászlórúd végéhez közel helyezkedik el, mert így a nagyobb erőnek minimális erőkarja, a kisebb erőnek maximális erőkarja lesz.

M.2.115.
$m_1 = 40$ kg
$m_2 = 30$ kg
$l_1 = 1{,}5$ m
$l_2 = ?$

A forgástengelyre írjuk fel a forgatónyomatékokat:

$$m_1 \cdot g \cdot l_1 = m_2 \cdot g \cdot l_2,$$

amelyből

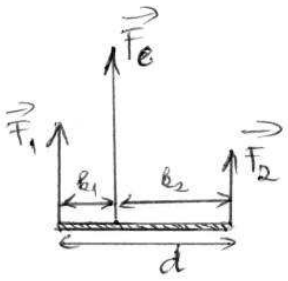
$$l_2 = 2\text{m}.$$

Bori a forgástengelytől 2 m-re üljön.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.2.116.
Adatok:
Adatok:
d= 0,3 m
F_1 = 200 N
F_2 = 140 N
F_e =?



Az eredő erő a két erő hatásvonala között lép fel,
melynek nagysága 340 N.

Az eredő hatásvonala az F_1 erőtől az ábra alapján:

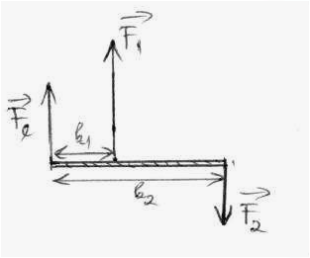
$$F_1 k_1 = F_2 k_2 = F_2 (d - k_1),$$

ahonnan

$$k_1 = 210/17 \text{ cm} \approx 12{,}35 \text{ cm}.$$

Az eredő a két erő hatásvonala között a nagyobbiktól 12,35 cm-re lép fel,
melynek nagysága 340 N.

M.2.117.
Adatok:
d= 0,48 m
F_1 = 100 N
F_2 = 40 N
F_e =?



Az eredő a két erő nagyságának különbsége F_e =60 N.
Az eredő hatásvonalára írjuk fel a forgatónyomatékok egyenlőségét:

$$F_1 k_1 = F_2 k_2 = F_2 (k_1 + d),$$

ahonnan

$$k_1 = 32 \text{ cm}.$$

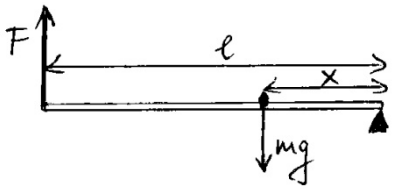
Az eredő hatásvonala a nagyobb erő oldalán, attól 32 cm távolságra helyezkedik el, az eredő nagysága 60 N.

M.2.118.
Adatok:
l=0,6 m

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

x= 0,25 m
m= 4,5 kg
F=?



Írjuk fel a forgatónyomatékokat a rúd alátámasztott végpontjára.

$$mgx = Fl,$$

ahonnan

$$F = 18{,}75 \text{ N}.$$

A rúd végét 18,75 N erővel kell emelnünk.

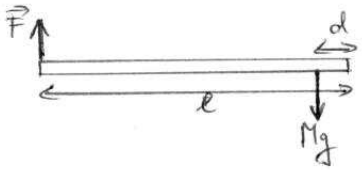
Megjegyzés: A feladatban $g = 9{,}81 \text{ m/s}^2$-tel számolva 18,4 N nagyságú eredményt kapunk, ami jól mutatja, hogy helyesebb a végeredményt mindössze két értékes jegy alakjában megadnunk: $F \approx 19$ N. Ez azt jelenti, hogy az eredményünket 18 N és 20 N között várjuk.
A rúd tömegének elhanyagolása miatti hibát nem vettük figyelembe.

M.2.119.
l = 2 m
M = 120 kg
d = 0,2 m
F = ?

A láda szélét a súlyának felével tudjuk megemelni. Az alátámasztási pontra írjuk fel a forgatónyomatékok egyenlőségét:

$F \cdot l = (Mg/2) \cdot d$
$F = 60$ N

A vasrúd végét 60 N erővel kell emelni.



2.115. A kerékcsavarok meghúzásához használt szerelőkulcs hossza 40 cm. A szerelő a maximális forgatónyomatékot 120 Nm-re állítja be. Mekkora erőt kell kifejtenünk a rúdra, ha az erő hatásvonala

a, merőleges a szerelőkulcsra?

b, 30°-os szöget zár be a szerelőkulccsal?

M.2.120.

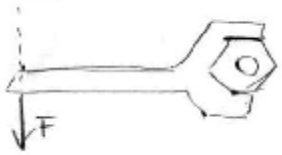
Adatok:

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M= 120 Nm

d= 0,4 m

F= ?



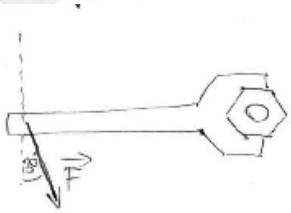
a, Az erő nagysága az M= F·d összefüggésből

F= 300 N.

b, A forgatónyomaték így írható fel:

$$M= F \cdot \sin\alpha \cdot d,$$

ahonnan F = 600N.



A szerelőnek 600 N erővel kell hatnia a szerelőkulcsra, ha az erő hatásvonala a kulcs tengelyével 30°-os szöget zár be. Ezért inkább a rúdra merőleges erőt fejt ki a szerelő, ami mindössze 300 N.

M.2.121.

d_1 = 0,48 m

d_2 = 0,05 m

F_1 = 120 N

F_2 = ?

A forgástengelyre írjuk fel a forgatónyomatékok egyenlőségét.

$$F_1 \cdot d_1 = F_2 \cdot d_2$$

$$F_2 = 1152 \text{ N} \approx 1200 \text{ N}.$$

A gallyakat 1200 N erővel tudjuk átvágni. A kerekítésből következik, hogy 1100 N és 1300 N közötti erő szükséges az átvágáshoz.

M.2.122.

d = 0,36 m

F = 50 N

M = ?

A kormánykerékre erőpárral hatunk,
amelynek forgatónyomatéka

$$M = F \cdot d = 18 \text{ Nm}$$

A kormánykerékre 18 Nm forgatónyomatékot fejtünk ki.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

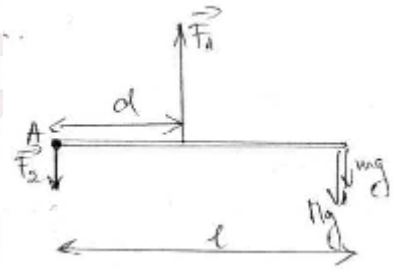
Merev testek egyensúlya (alapozó feladatok)

M.2.123.
A kocsik kezdetben a deszkán egyensúlyban vannak. A zsineg elégetése után a kocsik mozgásba jönnek, de külső eredő erő hiányában a rendszer tömegközéppontjának helyzete nem változik. Az egyensúly akkor szűnik meg, amikor a nagyobb sebességű kocsi leesik a deszkáról.

M.3.66.
M.2.124.
Adatok:
l = 1,4 m
d= 0,6 m
M = 6 kg
m = 1,5 kg
F_1 = ?
F_2 = ?



Az ásó végét fogó kezünknél lévő A támadáspontra felírva a forgatónyomatékok egyenlőségét:



$$F_1 d = (M+m)g\, l ,$$

ahonnan

$$F_1 = 175 \text{ N}.$$

Az F_2 értéke

$$F_1 = F_2 + (M+m)g,$$

amelyből

$$F_2 = 100 \text{ N}.$$

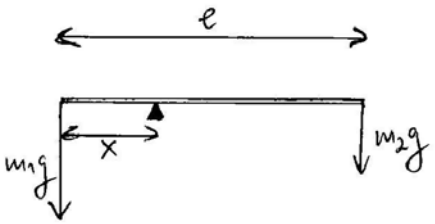
Az ásó végét 100 N erővel kell lefelé nyomnunk, illetve középtájon 175 N erővel kell emelnünk.

M.2.125.
Adatok:
l= 0,8m
m_1= 5 kg
m_2= 2kg

---

x= ?

Az alátámasztási pontra írjuk fel a forgatónyomatékok egyenlőségét!



KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$m_1gx = m_2g(l-x)$,

ahonnan:

$x = 0{,}23\,m$.

A rudat az 5 kg tömegű testtől 0,23 m-re kell alátámasztani.

M.2.126.

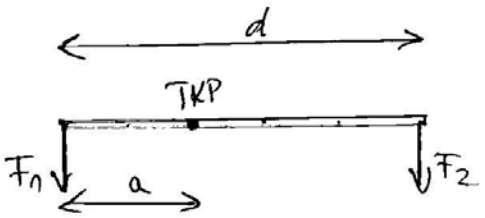
Adatok:

$m = 350\,kg$

$d = 1{,}5\,m$

$a = 0{,}6\,m$

$F_1 = ?,\ F_2 = ?$



Felírjuk a merev test egyensúlyának feltételeit:

$$\left.\begin{aligned} F_1+F_2 &= mg \\ F_1 a - F_2(d-a) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Az erők nagysága:

$F_1 = 2100N,\ F_2 = 1400N$.

Az első kerék tengelyterhelése 1400 N, míg a hátsóé 2100 N.

2.116. Egy 1,8 m hosszúságú, könnyű rúdon „m” tömegű terhet emel fel Károly és Sándor. Károly 250 N, míg Sándor 400 N erőt fejt ki a rúdra.

a, Mekkora súlyú a teher?

b, A rúd végeitől milyen távolságra van a teher felfüggesztve?

M.2.127.

Adatok:

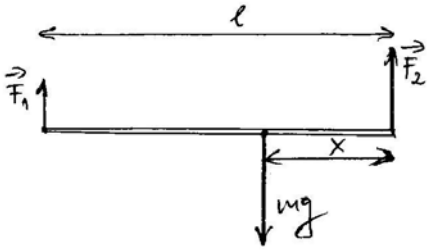
$l = 1{,}8m$

$F_1 = 250N$

$F_2 = 400N$

a, $m = ?$

b, $x = ?$



SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

a, Írjuk fel a rúdra a merev test egyensúlyára vonatkozó feltételeket!

$0 = F_1+F_2 -mg$ } (1)

$0 = F_1 (l-x) - F_2x$ } (2)

Az (1) egyenletből m = 65 kg

b, A (2) egyenletből

x= 0,69 m.

A teher tömege 65 kg, amely Sándortól 0,69 m-re van felfüggesztve.

M.2.128.

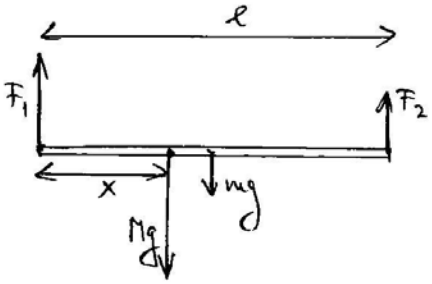
Adatok:

m= 5 kg

l= 1,6m

F_1= 320N

F_2= 200N



M= ?

x= ?

A rúdra felírjuk a merev test egyensúlyának feltételét! A forgatónyomatékokat a rúd középpontjára írjuk fel.

$0= F_1 + F_2 - Mg - mg$ } (1)

$0 = Mg\,(l/2 - x) - F_1 \frac{l}{2} + F_2 \frac{l}{2}$ } (2)

A teher tömege: M= 47kg.

A teher távolsága Mártontól x ≈ 0,6 m.

M.2.129.

Adatok:

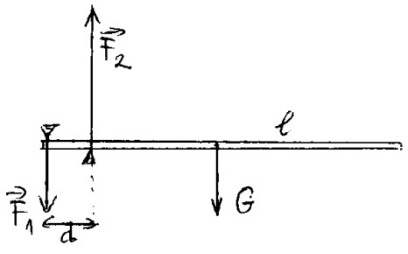
l = 3 m

m = 6 kg , G = 60 N

d = 0,15 m

F_1 = ?

F_2 = ?



KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

A rúdra írjuk fel az egyensúly feltételét. A forgatónyomatékokat a rúd végére írjuk fel.

$$F_1 + G = F_2$$
$$F_2 d = G\, l/2$$

Az egyenletrendszerből kapjuk

$$F_1 = 540 \text{ N}, F_2 = 600 \text{ N}.$$

A vendégoldal végét 540 N erővel kellett lefelé nyomni, míg az alátámasztási felületen 600 N erővel kellett felfelé nyomni.

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Merev testek forgása (alapozó feladatok)

M.2.130.
Adatok:
R = 0,15 m
m = 150 kg
w = 30 1/s
Θ = ?

A henger forgástengelyen átmenő tehetetlenségi nyomatéka a $\Theta = 1/2mR^2$ összefüggésből számítható ki:

$$\Theta = 1{,}6875 \text{ kgm}^2.$$

A fékpadhenger perdülete:

$$N = \Theta w = 50{,}625 \text{ kgm}^2/\text{s}.$$

A fékpadhenger tehetetlenségi nyomatéka 1,6875 kgm², a perdülete 50,625 kgm²/s.

M.2.131.
Adatok:
m = 4 kg
r = 0,05 m
w = 3 1/s
Θ = ?
N = ?

A gömb forgástengelyen átmenő tehetetlenségi nyomatéka $\Theta = 2/5mR^2$ összefüggésből számítható ki.

$$\Theta = 4 \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2.$$

A vasgolyó perdülete:

$$N = \Theta w = 1{,}2 \cdot 10^{-2} \text{ kgm}^2/\text{s}.$$

A vasgolyó tehetetlenségi nyomatéka $4 \cdot 10^{-3}$ kgm², a perdülete $1{,}2 \cdot 10^{-2}$ kgm²/s.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.2.132.
Adatok:
$l = 0{,}5$ m
$m = 0{,}5$ kg
$w = 5$ 1/s
N = ?

a. A tehetetlenségi nyomaték a felezőponton átmenő tengelyre: $\Theta = 1/12ml^2$, ahonnan

$$\Theta = 1{,}04 \cdot 10^{-2} \text{ kgm}^2.$$

A perdület:

$$N = \Theta w = 5{,}2 \cdot 10^{-2} \text{ kgm}^2/\text{s}.$$

A felezőponton átmenő tengelyre vonatkoztatott perdület értéke $5{,}2 \cdot 10^{-2}$ kgm²/s.

b. A tehetetlenségi nyomaték a végponton átmenő tengelyre: $\Theta = 1/3ml^2$, ahonnan

$$\Theta = 4{,}17 \cdot 10^{-2} \text{ kgm}^2.$$

A perdület:

$$N = \Theta w = 2{,}08 \cdot 10^{-1} \text{ kgm}^2/\text{s}.$$

A végponton átmenő tengelyre vonatkoztatott perdület értéke 0,208 kgm²/s.

M.2.133.
Adatok:
$\Theta = 150$ kgm²
$w = 2{,}8$ 1/s
$t = 40$ s
a. N = ?
b. M = ?

a. A perdület az $N = \Theta w$ összefüggéssel számítható ki.

$$N = 420 \text{ kgm}^2/\text{s}.$$

A kerék perdülete 420 kgm²/s.

b. A szöggyorsulás:

$$\beta = \Delta w/\Delta t = -0{,}07 \text{ 1/s}^2.$$

A fékező nyomaték az $M = \Theta\beta$ összefüggés alapján:

$$M = -10{,}5 \text{ Nm}.$$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

A 40 s alatti fékezőnyomaték nagysága 10,5 Nm.
Megjegyezzük, hogy a lendülettétel mintájára közvetlenül is kiszámíthatjuk a fékezőnyomatékot:

$$M = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{-420\,\frac{\mathrm{kgm^2}}{s}}{40\ \mathrm{s}} = -10{,}5\ \mathrm{Nm}.$$

M.2.134.
Adatok:
r = 0,09 m
K = 2 N
t = 5 s
w = 3 1/s
m = ?

A kötél forgatónyomatékot fejt ki a hengerre, amelyre felírható, hogy M = Θβ.
A szöggyorsulás értéke:

$$\beta = \frac{\Delta w}{\Delta t} = 0{,}6\ 1/s^2.$$

A Θβ = Kr mozgásegyenletből

$$\Theta = 0{,}3\ \mathrm{kgm^2}.$$

A henger tehetetlenségi nyomatéka 0,3 kgm². Tömör henger esetében Θ = mr²/2, amiből

$$m = 74\ \mathrm{kg}.$$

A henger tömege 74 kg.

M.2.135.

A mozgásegyenletek:

$$ma = mg - K$$
$$\Theta\beta = Kr.$$

A tehetetlenségi nyomaték: Θ = 2m(10r)². A kényszerfeltétel szerint a = βr.
A második mozgásegyenletből:

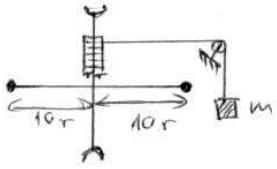
$$K = 200mr\beta = 200\ ma.$$

Behelyettesítve az első mozgásegyenletbe *a*-ra adódik:

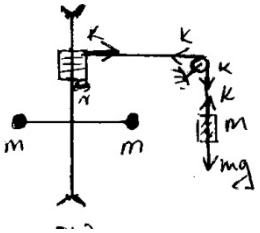
$$a = g - 200r\beta = g - 200a,$$

ahonnan

$$a = g/201 \approx 4{,}9\ \mathrm{cm/s^2}.$$



1. ábra



2. ábra

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

A zsinór végére függesztett test 4,9 cm/s² gyorsulással süllyed.

M.2.136.

A perdületmegmaradás törvényének értelmében

$$\theta_1\omega_1 = \theta_2\omega_2 ,$$

míg a gömb tehetetlenségi nyomatéka $\theta = \frac{2}{5}mR^2$.

A R sugár csökkenésével a gömb tehetetlenségi nyomatéka is csökkent, vagyis forgásának szögsebessége megnőtt, az $\omega = 2\pi/T$ összefüggés alapján periódusideje csökkent.

Az egyre nagyobb szögsebességgel forgó gázgömb gravitációs ereje egyre kevésbé volt képes az egyenlítője mentén az egyre növekvő szögsebességű részecskéket egyre kisebb sugarú körpályára kényszeríteni. Ennek következtében a gázgömb az „egyenlítőnél" kidudorodott, a „sarkokon" belapult.

Megjegyzés: A fenti érvelésben a számítás két különböző sugarú szilárd anyagból álló gömböt hasonlít össze. Gázgömbök esetén a különböző helyeken lévő anyag nem feltétlenül mozog azonos szögsebességgel, gondoljunk csak arra, ha a bolygók szögsebessége azonos lenne, akkor mindegyiknek megegyező lenne a keringési ideje. A felgyorsulási tendenciát azonban jól jelzi a merev testekre vonatkozó érvelés is.

M.2.137.

Tömegközéppontjának helyváltoztatásához lendületének megváltoztatására lenne szüksége, azaz sebességet kellene szereznie. Erre nem képes. Bár, ha vesz egy mély levegőt, amit adott irányba erősen kifúj, akkor a rakétaelvnek megfelelően az ellenkező irányba elmozdulhat. Vagy tenyerét lapátnak használva hajtja adott irányba az űrhajó kabinjában lévő levegőt, akkor is elmozdulhat lassacskán az ellenkező irányba.

A hossztengelye körüli forgáshoz elegendő, ha karjait testére merőlegesen kinyújtja, majd körbefordítja, ekkor törzse a perdület megmaradása értelmében ellentétes irányban elfordul, végül a karjait visszahúzza. Tehát el tud fordulni hossztengelye körül.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Newton I. törvénye (gyakorló feladatok)

2.138.

Az üllő nagy tömege miatt nagy tehetetlenséggel rendelkezik. Az üllőnek a külső hatásra igen kicsi az elmozdulása. A hanyatt fekvő ember nagy felületen érintkezik az üllővel, így az üllő elmozdulása nem jelent veszélyt az emberre, mert a fekvő ember mellkasán a nyomásnövekedés kicsiny.

2.139.

Mindkét tojást megforgatjuk, majd forgás közben egy pillanatra megfogjuk és azonnal elengedjük. A keményebb tojás nem forog tovább, míg a nyers tojás tovább forog, mert a benne lévő fehérje-folyadékot nem állítottuk meg.

2.140.

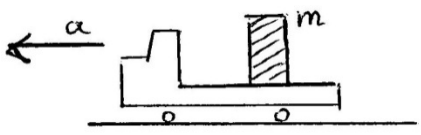
Dezső a három léggömböt különböző sűrűségű anyaggal töltötte meg.
Amelyik előre bukik, annak az ugyanakkora térfogatú levegőnél nagyobb a tehetetlensége, így a tömege is. Tehát ezt a léggömböt a levegőnél nagyobb sűrűségű anyaggal töltötték fel, ez a léggömb lóg a tartófonalán.
Amelyik helyben marad, annak sűrűsége megegyezik a levegőével.
A hátrafelé bukó léggömb tehetetlensége kisebb az ugyanakkora térfogatú levegőnél, emiatt a töltő gáz sűrűsége is kisebb. Ezt a léggömböt lefelé kell húznunk a tartófonala segítségével. Ha fékezés közben elengednénk a tartófonalát, akkor ez a léggömb ferdén hátrafelé emelkedne fel. A jelenséget a vasúti kocsiban fékezéskor kialakuló légnyomás és légsűrűség eloszlással is megmagyarázhatjuk.

2.141.

Valójában a drótkötél is rugalmasan viselkedett, de mivel a szakítószilárdsága igen nagy volt, ezért hirtelen rántáskor nem szakadt el, hanem ehelyett az összekötött autók egyikében okozott súlyos károkat (kiszakított egy darabot a gyengébb kocsiból vagy erősen deformálta az összekötött járművek csatlakozási elemeit). Tehát a műanyag kötelek használata valójában a gépkocsik szerkezeti elemeit védi.

2.142.

a. A kiskocsin lévő szekrény



KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

tehetetlensége folytán menetiránnyal ellentétes irányban dől el.
Ha a téglatestet görgőkre helyezzük, akkor a kiskocsit kirántva azt láthatjuk, hogy a téglatest lemarad, de nem borul fel. Könnyen rájöhetünk, hogy a téglatestet a súrlódási erő borítja fel, ami a kiskocsi gyorsulását akadályozza, a téglatestet pedig előrefelé gyorsítja. (A gyorsulástól, a súrlódástól és a téglatest méreteitől függően számos eset valósulhat meg:

- kis gyorsulás és nagy tapadás esetén a téglatest a kiskocsival együtt mozog;
- nagy gyorsulás és nagy tapadás esetén a téglatest a hátsó éle körül borul hátra, de nem csúszik meg;
- nagy gyorsulás és kis tapadás esetén a téglatest megcsúszva borul hátra;
- kis gyorsulás és kis tapadás esetén a téglatest nem borul fel, de megcsúszik hátrafelé.)

b. Falnak ütközéskor tehetetlensége következtében a menetirányba dől a test.
A borulás feltétele az, hogy a téglatestre ható, hátrafelé mutató súrlódási erő forgatónyomatéka a test tömegközéppontjára nézve elegendően nagy legyen.

Newton II. törvénye

2.143.

Adatok:
m = 1400 kg
s = 150 m
v = 72 km/h = 20 m/s
ΣF = ?

A személygépkocsi egyenletesen gyorsul, így a gyorsulása a $v=\sqrt{2as}$ összefüggésből számítható ki:

$$a = v^2/2s = 4/3 \text{ m/s}^2.$$

Az eredő erő

$$\Sigma F = ma = 1870 \text{ N}.$$

A személygépkocsi gyorsításához 1870 N erőre van szükség.

2.144.

Adatok:

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

m = 3500 kg
v_1 = 36 km/h = 10 m/s
v_2 = 72 km/h = 20 m/s

a. ΔI = ?
b. a = ?
c. ΣF = ?

a. A kisteherautó lendületváltozása:

$$\Delta I = m\Delta v = 35\,000 \text{ kgm/s}.$$

A kisteherautó lendülete 35 000 kgm/s –mal változik.

b. A gyorsulást az $a = \Delta v/\Delta t$ összefüggéssel számíthatjuk ki.

$$a = \Delta v/\Delta t = (v_2 - v_1)/\Delta t = 1 \text{ m/s}.$$

A kisteherautó gyorsulása 1 m/s².

c. Az eredő erő Newton II. törvénye alapján:

$$\Sigma F = ma = 3\,500 \text{ N}.$$

A kisteherautót 3 500 N eredő erő gyorsítja.

2.145.

Adatok:
m = 1 500 kg
s = 100 m
v = 54 km/h = 15 m/s
ΣF = ?

A személygépkocsi egyenletesen gyorsuló mozgást végez, ezért a sebessége a $v = \sqrt{2as}$ összefüggéssel írható fel, amelyből a gyorsulás meghatározható.

$$a = v^2/2s = 1{,}125 \text{ m/s}^2.$$

Az eredő erő:

$$\Sigma F = ma = 1690 \text{ N}.$$

A személygépkocsi gyorsításához 1690 N eredő erőre van szükség.

2.146.

Adatok:
m_2 = 8 kg
m_1 = 20 g = 0,02 kg
v_1 = 600 m/s
u_1 = 250 m/s

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$\underline{d = 0{,}25\ \text{m}}$

a. $u_2 = ?$
b. $t = ?$
c. $F = ?$

a. A lövedék és a hasáb között lassított, nem tökéletesen rugalmatlan ütközés játszódik le. Erre felírva a lendületmegmaradás törvényét:

$$m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2$$

$$u_2 = 0{,}875\ \text{m/s}.$$

A hasáb legnagyobb sebessége 0,875 m/s.

b. A lövedék belépési sebessége 600 m/s, míg a kilépési 250 m/s. Így a hasábban a lövedék átlagsebessége $v_{átl} = 425$ m/s. Miközben a lövedék áthatol a hasábon, a hasáb nulla sebességről $u_2 = 0{,}875$ m/s sebességre gyorsul egyenletesen, vagyis a hasáb átlagsebessége ennek fele: 0,4375 m/s. A lövedék útja tehát az álló asztalhoz viszonyítva $s = d + (0{,}4375\ \text{m/s})\cdot t$
A hasábon az áthaladás ideje:

$$t = s/v_{átl} = (d + (0{,}4375\ \text{m/s})\cdot t)/v_{átl}$$

amiből

$$t = 5{,}89\cdot 10^{-4}\ \text{s}.$$

A lövedék a hasábon $5{,}89\cdot 10^{-4}$ s alatt haladt át.

c. A lövedékre ható erő hatására a lövedék lendülete megváltozott, így az erőlökésre vonatkozó összefüggés alapján:

$$F = \Delta I/\Delta t = m_1 \Delta v/\Delta t = -\ 11\,888\ \text{N}.$$

A negatív előjel azt fejezi ki, hogy a lövedékre fékező erő hatott. Ennek ellenereje gyorsította a hasábot:

$$F = \Delta I'/\Delta t = m_2 \Delta v'/\Delta t = 11\,888\ \text{N},$$

így lehetőségünk nyílt eredményünk ellenőrzésére.
A lövedéket 11 888 N ≈ 11 900 N erő fékezte. (Megjegyezzük, hogy a lövedék olyan gyorsan hatolt át a hasábon, hogy eközben a hasáb mindössze negyed milliméterrel mozdult el, ami elhanyagolható a hasáb hosszához képest, így közelítő számítással is ugyanarra a végeredményre juthatunk.)

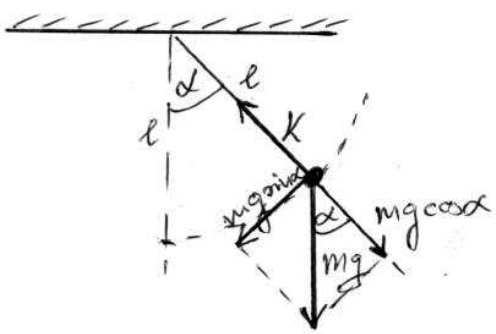
2.147.

Adatok:
$l = 0{,}8$ m
$\underline{\alpha = 45^\circ}$
$a = ?$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Az ingatestre a nehézségi erő és a kötél K kényszerereje hat. A nehézségi erő kötélirányú összetevője a K kényszererővel tart egyensúlyt, míg a nehézségi erő érintő irányú összetevője gyorsítja az ingát.



Mozgásegyenletek:

$$F_e = mg\sin\alpha$$
$$0 = K - mg\cos\alpha$$

Az első egyenletből az a gyorsulásra ezt kapjuk:

$$a = g\sin\alpha = 7{,}07\ m/s^2.$$

Az ingatest érintő irányban 7,07 m/s² gyorsulással indul el. Vegyük észre, hogy az ingatest gyorsulása nem függ a fonál hosszától.

2.148.

Adatok:

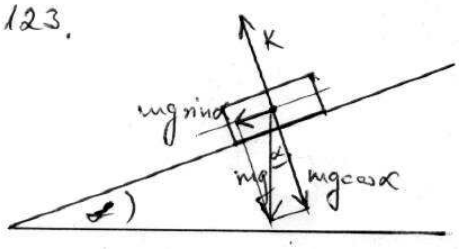
m = 20 kg

α = 30°

s = 8 m

a. a = ?

b. v = ?



a.

A kocsira ható erők:

1. nehézségi erő ($F_{neh} = mg$)
2. lejtő nyomó ereje (K)

A nehézségi erő F_2 lejtőre merőleges összetevőjét a lejtő K nyomóereje egyensúlyozza ki.

Az áruszállító kocsit a lejtőn a nehézségi erő lejtőirányú F_1 összetevője gyorsítja:

$$F_1 = mg\sin\alpha.$$

A gyorsulás:

$$a = g\sin\alpha = 5\ m/s^2.$$

A kocsi gyorsulása 5 m/s².

b. A lejtőn a kocsi sebessége egyenletesen növekszik. A megtett útra az $s = a/2\ t^2$ összefüggés érvényes, amelyből a lejtőn történő lecsúszás ideje:

$$t = \sqrt{2s/a} = 1{,}8\ s.$$

A lejtő alján a sebesség:

$$v = at = 8{,}9\ m/s.$$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Az áruszállító kocsi a lejtő alján 8,9 m/s sebességgel halad. Vegyük észre, hogy az eredményeink nem függnek a kocsi tömegétől.

Newton III. törvénye

2.149.

Mindkét leírt esetben a mágnes és az ember, illetve az ember és a haja zárt rendszert alkot. Ebben a zárt rendszerben a mágnes és az ember, illetve a haj és az ember között fellépő erők belső erők, amelyek nem változtatják meg a rendszer tömegközéppontjának mozgásállapotát. Ehhez külső erőre lenne szükség.

Lendület, lendületmegmaradás törvénye (gyakorló)

2.150.

Adatok:
m = 0,45 kg,
h = 20 m
I = ?

A futball-labda függőleges hajítást végez felfelé. Kezdősebességét a $v = \sqrt{2gh}$ összefüggéssel számíthatjuk ki, ha a légellenállástól eltekintünk:

$$v = 20 \text{ m/s}.$$

Lendülete:

$$I = mv = 9 \text{ kgm/s}.$$

A futball-labda lendülete legalább 9 kgm/s. A valóságban sokkal nagyobb kezdeti lendületre van szükség ahhoz, hogy a viszonylag nagy méretű futball-labda 20 méter magasra emelkedjen, mert a légellenállás fékező hatása igen jelentős.

2.151.

Adatok:
I = 2 kgm/s
m = 0,1 kg
s = ?

A petárda függőleges hajítást végez felfelé.
Kezdősebessége:

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$v_0 = I/m = 20$ m/s.

Az emelkedés ideje a $v = v_0 - gt$ összefüggésből ($v = 0$)

$t = v_0 / g = 2$ s.

Az emelkedés magassága a $h = v_0 t - g/2\, t^2$ összefüggés alapján:

$s = 20$ m.

2.152.

Adatok:

$M = 250$ kg

$v_1 = 54$ km/h $= 15$ m/s

$m = 10$ kg

$\underline{v_2 = 25 \text{ m/s}}$

$u = ?$

Válasszuk a kocsi menetirányát pozitív iránynak! A lendületmegmaradás törvényét a földhöz képest felírva:

$$Mv_1 = (M-m)u - mv_2,$$

amelyből

$u = 16{,}7$ m/s.

A kocsi sebessége a rakéta kilövése után 16,7 m/s lesz.

2.153.

Adatok:

$v_1 = 0{,}3$ m/s

$M = 250$ kg

$\underline{m = 150 \text{ kg}}$

$\Delta v = ?$

Legyen a csille töltés utáni sebessége v_2.

A szén nem változtatja meg a csille lendületét, mert sebességének nincs vízszintes irányú összetevője.

A jelenség rugalmatlan ütközés.

Így a lendületmegmaradás törvényét rugalmatlan ütközésre írjuk fel:

$$Mv_1 = (M + m)v_2,$$

ahonnan

$$v_2 = (M/M+m)v_1 = 0{,}19 \text{ m/s}.$$

A sebességváltozás: $\Delta v = 0{,}11$ m/s.

A csille sebessége a töltés következtében 0,11 m/s-mal csökkent.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

2.154.

Adatok:

d= 3 m

m = 2 kg

M_1 = 40 kg

M_2 = 46 kg

a. u_1 = ?, u_2 = ?

b. s = ?

a. Kornél sebessége a labda eldobása után legyen u_1, Tamásé u_2, a labdáé u_3.

A labda sebességének vízszintes összetevője:

$$u_3 = 3/0{,}5 = 6 \text{ m/s}.$$

Mindkét fiúnál a labda eldobásakor, illetve elkapásakor felírható a lendületmegmaradás törvénye.

Kornél a labda eldobása előtt áll, a labda eldobása utáni sebessége:

$$0=M_1 u_1 - mu_3,$$

ahonnan

$$u_1 = 0{,}3 \text{ m/s}.$$

Tamás sebessége a labda elkapása után:

$$mu_3 = (M_2 + m_3)u_2,$$

amelyből

$$u_2 = 0{,}25 \text{ m/s}.$$

Kornél 0,3 m/s, míg Tamás 0,25 m/s sebességgel kezdenek el csúszni egymással ellentétes irányban.

b. Kornél megtett útja 3 másodperc alatt legyen s_1:

$$s_1 = u_1 t = 0{,}9 \text{ m}.$$

Mivel a labda 0,5 másodpercet repül, így Tamás csak 2,5 s ideig csúszik előre, vagyis az általa megtett távolság:

$$s_2 = u_2 (t - 0{,}5 \text{ s}) = 0{,}625 \text{ m}.$$

A távolságuk a labda eldobása után 3 s-mal: $s = d + s_1 + s_2 = 4{,}525 \text{ m} \approx 4{,}5$ m.

2.155.

Ha a golyó útjába nagy tömegű acéltömböt teszünk, akkor a golyó az acéltömbbel rugalmasan ütközik, majd ugyanolyan sebességgel indul visszafelé.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Ha a golyó útjába azonos tömegű acélgolyót teszünk, akkor is rugalmas ütközés következik be. Ekkor a lendületmegmaradás törvényét alkalmazva azt kapjuk, hogy az egyenlő tömegű testek lendületet cserélnek, vagyis a guruló golyó megáll, míg a acélgolyó ugyanakkora sebességgel elindul.

Tehát a golyó útjába ugyanakkora tömegű acélgolyót kell tennünk.

Megjegyzés: A fent leírt kísérletet elvégezve azt figyelhetjük meg, hogy az acéltömbről visszapattanó golyó csak eredeti sebességének 3/7 részével fog visszafelé gurulni, míg az azonos tömegű acélgolyó nem marad állva, hanem eredeti mozgásirányában fog előre gurulni eredeti sebességének 2/7 részével. Ennek oka az, hogy az ütköző golyó nem tisztán transzlációs mozgással halad, hanem tiszta gördüléssel. Az ütközés után közvetlenül a golyók tömegközépponti sebességére érvényesek a fenti megállapítások, azonban az ütközések nem befolyásolják a golyók forgását. A súrlódás miatt a golyók rövid „köszörülő" mozgás után ugyanúgy tiszta gördüléssel fognak mozogni, mint az ütközés előtt, azonban lecsökkent sebességgel. A köszörülő mozgás olyan gyorsan és olyan rövid úton játszódik le, hogy csak lassított videofelvétellel lehet láthatóvá tenni ezt az érdekes jelenséget.

2.156.

Adatok:

$d = 0{,}5$ m

$m_1 = 0{,}6$ kg

$m_2 = 0{,}4$ kg

$m_3 = 1$ kg

$\underline{v_1 = 6 \text{ m/s}}$

a. $\Delta t = ?$
b. v-t grafikon

a. Írjuk fel a lendületmegmaradás törvényét rugalmatlan ütközésre, amikor az első kocka a másodikkal, továbbá amikor a két mozgó kocka a harmadikkal ütközik.

Az első és második kocka ütközése utáni közös sebesség u'. A lendületmegmaradás törvénye:

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2)u',$$

amelyből

$$u' = 3{,}6 \text{ m/s}$$

A két kocka közös sebességgel halad tovább, majd ütközik a harmadikkal. Ekkor a három kocka közös sebessége u".

$$(m_1 + m_2)u' = (m_1 + m_2 + m_3)u'',$$

ahonnan

$$u'' = 1{,}8 \text{ m/s}.$$

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Az első ütközésig eltelt idő legye t_1.

$$t_1 = d/v_1 = 0{,}5/6 = 0{,}08 \text{ s.}$$

A második ütközésig eltelt idő:

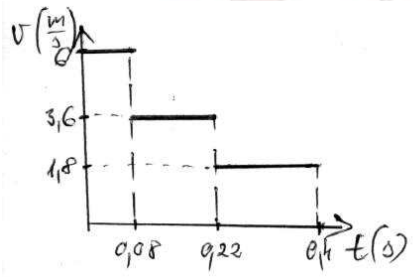
$$t_2 = d/v_2 = 0{,}5/3{,}6 = 0{,}14 \text{ s.}$$

Az első és harmadik ütközés között eltelt idő:

$$t = t_1 + t_2 = 0{,}22 \text{ s.}$$

Az első és a harmadik kocka elindulása között 0,22 s telt el.

b. Az első hasáb sebesség-idő grafikonja:



SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

2.157.

Adatok:

M = 0,8 g

m = 0,08 g

l = 22 cm = 0,22 m

d = ?

A hangyából és a szívószálból álló rendszer közös tömegközéppontja (TKP) a hangya mozgása során nem mozdul el. A szívószál TKP-ja pedig a közös TKP-ra vonatkozóan szimmetrikusan mozdul el.

Kiinduláskor a szívószál TKP-jának a közös TKP-tól való távolsága legyen x, amire felírhatjuk a következő mérleg egyenletet:

$$Mx = m(l/2-x),$$

amelyből

$$x = 1 \text{ cm}.$$

A hangya elindulásakor a szívószál tömegközéppontja 1 cm-re van a közös TKP-tól.

A hangya átmászik a szívószál másik végére, mialatt a szívószál TKP-ja 2x távolságot mozdul el. Így a szívószál 2 cm-t mozdul el eredeti helyéről.

2.158.

Adatok:

$m_2 = 2m_1$,

$v_1 = 3$ m/s

u =1,2 m/s

a. v=?

b. v'=?

a. Ha a test a kocsiról nem csúszik le, az azt jelenti, hogy a kocsival közös sebességet ér el. Ez lassított rugalmatlan ütközés, melyre a lendületmegmaradás törvénye felírható.

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2)v,$$

$$v = 1 \text{ m/s}.$$

b. Ha a test a v' sebességgel haladó kocsit – a kocsihoz viszonyított – u sebességgel hagyja el, akkor sebessége v'+u, és a lendületmegmaradás miatt

$$m_1 v_1 = m_1(v'+u) + m_2 v',$$

ahonnan

$$v' = \frac{m_1(v_1-u)}{m_1+m_2} = 0{,}6 \text{ m/s}.$$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Dinamika alapegyenlete

2.159.

Adatok:

$F_1 = 3N$

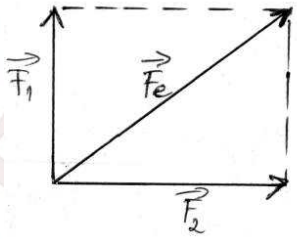
$F_2 = 4N$

$\underline{m = 4\ kg}$

$a = ?$

Az eredő erő

$$F_e = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = 5N.$$



A test gyorsulásának nagysága

$$a = \frac{F_e}{m} = 1{,}25\ m/s^2.$$

A test gyorsulása 1,25 m/s^2.

2.160.

Adatok:

$I_1 = 60\ kgm/s$

$I_2 = 180\ kgm/s$

$\underline{t = 3\ s}$

$F_{átl} = ?$

A testre ható átlagos eredő erő

$$F_{átl} = \frac{\Delta I}{\Delta t} = 40\ N.$$

A testre 40 N átlagos eredő erő hatott. (Egyenletesen gyorsuló mozgás esetén 40 N állandó eredő erő hat a testre.)

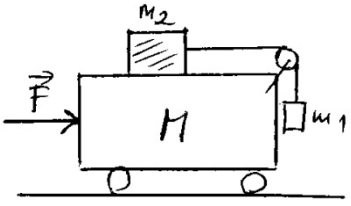
2.161.

$M = 5\ kg$

$m_1 = 1\ kg$

$\underline{m_2 = 2\ kg}$

$F = ?$



KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Az m_1 és m_2 tömegű testek nem mozdulnak el a M tömegű kocsin, ezért a három test vízszintes irányban azonos gyorsulással együtt mozog.
Az m_1 tömegű test függőleges irányban nem mozdul el, ezért a fonálerő m_1g.
Így az m_2 tömegű testre m_1g húzóerő hat, vagyis az m_2 test mozgásegyenlete

$$m_2a = m_1g,$$

amelyből az m_2 (illetve az összes többi test) gyorsulása

$$a = \frac{m_1}{m_2}g.$$

Írjuk fel a dinamika alapegyenletét az egész rendszer vízszintes mozgására:

$$F = (m_1 + m_2 + M)\, a = (M + m_1 + m_2)\frac{m_1}{m_2}g = 40 \text{ N}.$$

A tolóerő értéke F = 40 N.

2.162.

Adatok:
m= 75 kg
$\alpha = 30°$
$\underline{a = 0{,}8 \text{ m/s}^2}$

a. $F_e = ?$
b. $F_s = ?$

a. A bobra ható erők eredője

$$F_e = ma = 60 \text{ N}.$$

A bobra ható erők eredője 60 N.

b. A lejtőn lefelé haladó bob mozgásegyenletei

$$ma = mg\sin\alpha - F_s$$
$$0 = mg\cos\alpha - F_n$$

Az első mozgásegyenletből

$$F_s = -315 \text{ N}.$$

A súrlódási erő a mozgásiránnyal ellentétes irányú, nagysága 315 N.

c. Ha kiszámítjuk a súrlódási tényezőt, akkor

$$\mu = F_s/F_n = 0{,}485$$

értéket kapunk, ami arra utal, hogy bizony aggódik az utas a 30°-os lejtőn, és használja a féket.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Nehézségi erő, súly és súlytalanság

2.163.

Adatok:

$a = 2{,}5\ m/s^2$

$\underline{m = 40\ kg}$

a. $G_1 = ?$

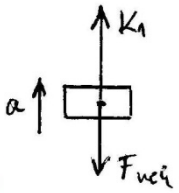
b. $v = 8\ m/s$, $G_2 = ?$

c. $G_3 = ?$

a. Írjuk fel a gyermekre ható erők eredőjét!

$$F_e = K_1 - F_{neh}$$

$$ma = K_1 - mg,$$



amelyből

$$K_1 = m(g+a),$$

vagyis

$$K_1 = 500\ N.$$

A mérleg a gyermek súlyát méri, vagyis a gyermek súlya $G_1 = 500$ N.

b. A gyermek súlya $G_2 = 400$ N.

c. Szabadeséskor a mérlegre nem hat a gyermek, ezért a mérleg $K_3 = 0$ N erőt mutat, a gyermek súlytalan. Ekkor a gyermek súlya $G_3 = 0$ N. (Nem kell azonban aggódnunk, mert már a XIX. század végétől minden liftbe be van építve egy olyan biztonsági berendezés, ami lefékezi a liftet, ha a tartókötele elszakad.)

2.164.

Adatok:

$mg = 800$ N

$t_1 = 5$ s, $K_1 = 680$ N,

$t_2 = 50$ s, $K_2 = 800$ N,

$\underline{t_3 = 5\ s,\ K_3 = 920\ N}$

$s = ?$

a. Induláskor $K_1 < mg$, ezért az eredőerő és a gyorsulás lefelé mutat. Így a lift lefelé indult el.

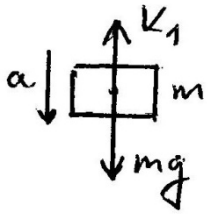
b. Határozzuk meg az első 5 másodpercben a lift gyorsulását, elért sebességét és a megtett utat!

Az utasra felírva a mozgásegyenletet:

1. ábra

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$$F_e = F_{neh} - K_1$$
$$ma_1 = mg - K_1$$
$$a = (mg - K_1)/m = 1{,}5\ m/s^2.$$



Az első szakaszon a lift egyenletesen gyorsulva mozog.
Elért legnagyobb sebessége:

$$v_1 = a_1 t_1 = 7{,}5\ m/s.$$

A megtett út:

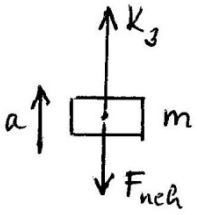
$$s_1 = (a_1/2)\, t^2 = 18{,}75\ m.$$

A második szakaszon a lift állandó 7,5 m/s sebességgel egyenletesen halad.

$$s_2 = v_1 t_2 = 375\ m.$$

A harmadik szakaszon a lift fékez, azaz egyenletesen lassul.
A utasra felírva a mozgásegyenletet:

$$F_e = K_3 - F_{neh}$$
$$ma_3 = K_3 - mg.$$
$$a = (K_3 - mg)/m = 1{,}5\ m/s^2.$$



2. ábra

A harmadik szakaszon a megtett út:

$$s_3 = (a_3/2)t^2 = 18{,}75\ m.$$

A lift által megtett út:

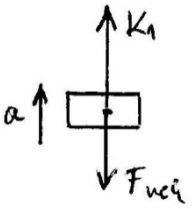
$$s = s_1 + s_2 + s_3 = 412{,}5\ m.$$

A Kalifa-torony magassága a lift által megtett út kétszerese h = 825 m.

2.165.

Az m tömegű testre a nehézségi erő (F_{neh}) és a fonál által kifejtett függőlegesen felfelé ható fonálerő (K) hat.

a. Ha a testet felfelé emeljük, akkor a testre ható erők eredője felfelé mutat.
A mozgásegyenletet felírva:

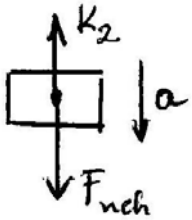


$$F_e = K_1 - F_{neh},$$
$$ma = K_1 - mg.$$

K_1-t kifejezve:

$$K_1 = m(g+a).$$

b. Ha a testet lefelé engedjük, akkor a testre ható erők eredője lefelé mutat.



KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

A mozgásegyenletet felírva:

$$F_e = K_2 - F_{neh},$$
$$ma = K_2 - mg.$$

K_2-t kifejezve:

$$K_2 = m(g-a).$$

Az erőmérő a K_1, illetve a K_2 erőt jelzi.

2.166.

Adatok:
h = 60 m
m = 400 kg

A kötél súlya 60 m mélység esetén:

$$G = 60.20 = 1\,200 \text{ N}.$$

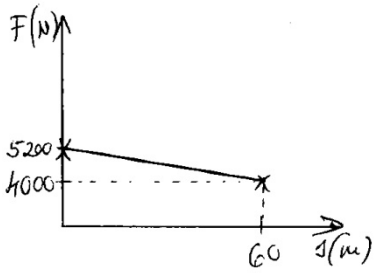
Az akna mélyéről az érccel töltött csille és a kötél súlyát kell együttesen emelni:

$$F_1 = 4\,000 \text{ N} + 1\,200 \text{ N} = 5\,200 \text{ N}.$$

Az akna feszíni nyílásánál csak a csille súlyát kell emelni:

$$F_2 = 4\,000 \text{ N}.$$

Az emelőerő az út függvényében lineárisan csökken:



3. ábra

Rugóerő (gyakorló)

2.167.

Adatok:
l_0 = 0,3 m
D = 200 N/m
m = 2 kg
l = ?

Mindkét rugóra írjuk fel a mozdulatlanság egyenletet! A rugó erőtörvénye alapján $F_{r,1} = D \cdot \Delta x_1$, $F_{r,2} = D \cdot \Delta x_2$.

Az alsó rugóra

$$mg = D \cdot \Delta x_1,$$

ahonnan

$$\Delta x_1 = 0{,}025 \text{ m}.$$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

A felső rugóra

$$mg + D\cdot\Delta x_1 = D\cdot\Delta x_2,$$

ahonnan

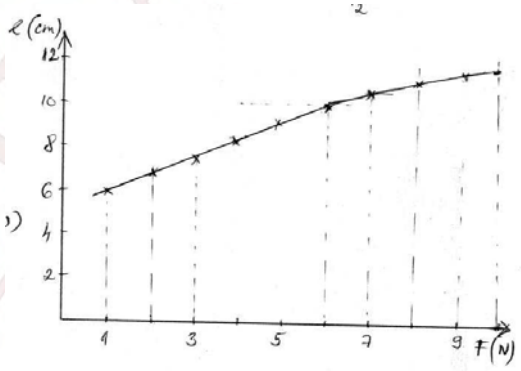
$$\Delta x_2 = 0{,}05 \text{ m}.$$

A két rugó együttes megnyúlása 0,075 m (7,5 cm).
A rugólánc eredeti hossza 3 m, a teljes lánc megnyújtott hossza 4 m.

2.168.

erő F (N)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
rugó hossza l (cm)	6	6,8	7,5	8,3	9,1	9,9	10,5	10,9	11,2	11,4

a. A grafikon kezdeti szakaszán a rugó megnyúlása egyenesen arányos az F erővel, vagyis a megnyúlás követi a rugó erőtörvényét. A grafikon 6 N feletti szakaszára már nem érvényes az egyenes arányosság, a rugóra nem teljesül a Hook-törvény. Ez a rugalmasság határa.



b. A rugóállandót a grafikonról leolvasva:

$$D = F/\Delta x,$$

ahonnan

$$D = \frac{6-1}{0{,}091-0{,}06} = 130 \text{ N/m}.$$

A rugó rugóállandója 130 N/m.

c. A rugó nyújtatlan hossza az $l = l_0 + \Delta x$ összefüggésből számítható.
A számítást több értékpárra elvégezve:

$$l_0 = l - \Delta x = l - F/D = 0{,}052 \text{ m}.$$

A rugó nyújtatlan hossza 5,2 cm.

2.169.

Adatok:
$m = 60 \text{ t} = 6 \cdot 10^4 \text{ kg}$
$\underline{D = 10^5 \text{ N/m}}$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

a. $\Delta x = ?$, $F_r = ?$
b. $D_e = ?$

a. A 32 db rugó egyenlő mértékben nyomódik össze, mivel a vasúti kocsi mindvégig vízszintes marad. A 6 10^5 N nyomóerő a 32 rugó által kifejtett erővel egyezik meg.

$$mg = 32\, D\Delta x,$$

amelyből

$$\Delta x = 0{,}1875 \text{ m}.$$

Az egyes rugók által kifejtett erő:

$$F = D\Delta x = 18\,750 \text{ N}.$$

A rugók 18,75 cm-t nyomódnak össze, az egyes rugókban fellépő rugóerő nagysága 18 750 N.

b. A 32 db rugót olyan rugóállandójú egyetlen rugóval lehet helyettesíteni, amelynek pontosan ugyanakkora a megnyúlása, mint amennyi a fenti rugórendszeré.
A rugóerőre vonatkozó $F = D\Delta x$ összefüggés alapján

$$D_e = F/\Delta x = 3{,}2 \cdot 10^6 \text{ N/m}.$$

Egy $3{,}2 \cdot 10^6$ N/m rugóállandójú rugóval lehetne helyettesíteni a 32 db rugót, ami meglehetősen logikus, hiszen az egyetlen rugónak 32-szer kell erősebbnek lennie.

2.170.

Adatok:
$D_1 = 100$ N/m
$\underline{D_2 = 300 \text{ N/m}}$
$D_e = ?$

Newton III. törvénye alapján mindegyik rugóban ugyanakkora nagyságú erő lép fel.

Az egyes rugókra felírva az erőtörvényt:

$$F = D_1 \cdot \Delta x_1, \text{ illetve } F = D_2 \cdot \Delta x_2.$$

A két rugót helyettesítsük egy $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2$ megnyúlást biztosító rugóval.
A Δx megnyúlású D_e rugóállandójú rugóban is F nagyságú erő lép fel, így a $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2$ összefüggésbe beírva a fenti összefüggéseket:

$$F/D_e = F/D_1 + F/D_2,$$

amelyből

az eredő rugóállandó és az egyes rugóállandók közötti összefüggést kapjuk:

$$1/D_e = 1/D_1 + 1/D_2.$$

A rendszer rugóállandója

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$D_e = 75$ N/m.

A rendszer rugóállandója 75 N/m.

2.171.

Adatok:

$\Delta x_1 = 0{,}025$ m

$\underline{m = 1 \text{ kg}}$

a. $m_2 = ?$, ha $\Delta x_2 = 0{,}045$ m

b. $D = ?$

a. A rugó rugóállandója az $F = D\Delta x$ összefüggésből

$$D = mg/\Delta x = 400 \text{ N/m}.$$

b. A keresett tömeget az $F = D\,\Delta x = mg$ összefüggéssel számoljuk ki.

$$F = 18 \text{ N},$$

ahonnan

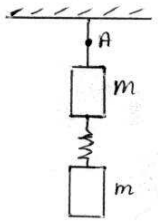
$$m = 1{,}8 \text{ kg}.$$

A rugóra 1,8 kg tömegű testet kell akasztanunk.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

2.172.

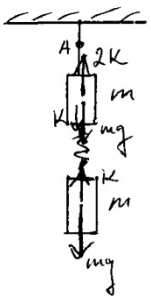


Mindkét testre írjuk fel a mozgásegyenleteket!

$$ma = mg + K - 2K \qquad (1)$$

$$ma = mg - K \qquad (2)$$

Az elvágás előtt a mozdulatlanságegyenletekben a gyorsulások értéke 0, vagyis



$$a = 0.$$

Az elvágás pillanatában a 2K nagyságú erő megszűnik, így a felső test gyorsulása (1) egyenletből

$$ma = mg + K,$$

mivel K =mg, így

$$ma = 2\,mg,$$

vagyis

$$a = 2g.$$

Az alsó test gyorsulása (2) egyenletből mivel K = mg, így

$$a = 0.$$

A felső test gyorsulása 2g, az alsó test gyorsulása 0.

2.173.

Adatok:

$D = 300$ N/m

$\underline{l = 0{,}15\text{ m}}$

a. $D_1 = ?$, $D_2 = ?$

b. $D_3 = ?$, $D_4 = ?$

a. A rugó szétvágása után a kapott két rugó megnyúlása legyen Δx_1, míg az eredeti rugó megnyúlása Δx. Ugyanakkora erő hatására a szétvágott rugók fele annyira nyúlnak meg, mit az eredeti hosszúságú rugó ($\Delta x_1 = \Delta x/2$).
Így a $F = D\Delta x$ erőtörvény alapján a rugóállandó kétszeresére nő:

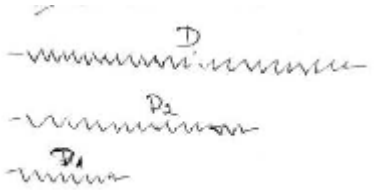
$$D_1 = D_2 = 2D = 600 \text{ N/m}.$$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

b. Hassunk képzeletben az eredeti rugóra és a szétvágás után kapott két rugóra is ugyanakkora erővel. Írjuk fel mindhárom esetben a rugókra az F= DΔx erőtörvényt!

Eredeti rugóra:



$$F = D\,\Delta x, \qquad (1)$$

míg a szétvágás után kapott rugókra

$$F = D_1\,\Delta x_1, \qquad (2)$$

$$F = D_2\,\Delta x_2, \qquad (3)$$

A szétvágás utáni rugók megnyúlásai az eredeti rugóval kifejezve:

$$\Delta x_1 = \Delta x/3, \qquad \Delta x_2 = 2/3\,\Delta x.$$

Az (1) és (2), majd az (1) és (3) összefüggésből kapjuk

$$D_1 = 3\,D, \qquad D_2 = 3/2\,D,$$

ahonnan

$$D_1 = 900\ \text{N/m}, \quad D_2 = 450\ \text{N/m}.$$

Egyenlő hosszúságú darabokra vágáskor a két rugó rugóállandója 600 N/m, míg a másik esetben 900 N/m és 450 N/m.

Súrlódás (gyakorló feladatok)

2.174.

Adatok:

$m = 2\,200$ kg

$v_1 = 90$ km/h $= 25$ m/s

$v_2 = 36$ km/h $= 10$ m/s

$\underline{s = 50\ \text{m}}$

$\mu_o = ?$

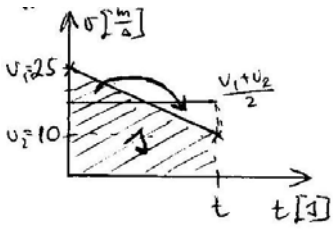
A kisteherautó egyenletes lassul v_1-ről v_2-re. Ezen idő alatt megtett út úgy is felírható mintha $\frac{v1+v2}{2}$ állandó sebességgel tette volna meg ugyanazt az utat.

A megállásig eltelt idő az $s = \frac{v1+v2}{2} \cdot t$ összefüggésből:

$$t = \frac{2s}{v1+v2} = 2{,}86\ \text{s}.$$

A kisteherautó lassulása:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{10-25}{2{,}86} = -5{,}25\ \text{m/s}^2.$$



4. ábra

Az autó mozgásállapotát a tapadási súrlódási erő változtatja meg. A mozgásegyenletet felírva:

$$F_e = F_{t,max},$$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$ma = \mu_o\, mg.$

A tapadási súrlódási erő értéke:

$\mu_o = a/g = 0{,}54.$

A kerekek és az úttest között a tapadási súrlódási együttható értéke 0,54. Vegyük észre, hogy az eredmény nem függ a kisteherautó tömegétől.

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

2.175.

Adatok:

$v = 50$ km/h $= 13{,}9$ m/s

$s = 20$ m

$\mu = 0{,}7$

a. Fékezéskor az autó mozgásállapotát a vízszintes irányban fellépő csúszási súrlódási erő változtatja meg. A blokkolásos fékezés azt jelenti, hogy az autó kereke megcsúszik az aszfalton.

A testre ható erők eredője:

$$F_e = F_s,$$

$$ma = \mu mg,$$

amelyből:

$$a = \mu g = 7 \text{ m/s}^2.$$

A v_o kezdősebességről egyenletesen lassulva megálló test mozgására fennáll a $v = \sqrt{2as}$ összefüggés, amelyből

$$v_o = 16{,}7 \text{ m/s} \approx 60 \text{ km/h}.$$

A személygépkocsi hozzávetőlegesen 60 km/h sebességgel haladt, így nem közlekedett szabályosan!

b. A kerék ABS használat esetén fékezés közben túlnyomórészt gördül az úttesten, nem csúszik meg, a gépkocsi irányítható marad.

A testre ható erők eredője:

$$F_e = F_{t,max},$$

$$ma = \mu_o mg,$$

amelyből:

$$a = \mu_o g = 9 \text{ m/s}^2.$$

A megállásig eltelt idő a $v = at$ összefüggésből kifejezve:

$$t = v/a = 1{,}86 \text{ s}.$$

A személygépkocsi ezen idő alatt egyenletesen lassuló mozgást végez, a megtett útja:

$$s = \frac{a}{2}t^2 = 15{,}6 \text{ m}.$$

A személygépkocsi 60 km/h sebességgel haladva blokkolásgátlóval ellátva 15,6 m úton állt volna meg.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

2.176.

.

Adatok:

$v = 5$ m/s

$\underline{s = 12{,}5 \text{ m}}$

$\mu = ?$

A korong mozgásállapotát a korongra ható fékezőerő változtatja meg. A fékezőerő:

$F_s = \mu mg$. A korongra a mozgásegyenletet felírva:

$$F_e = - F_s,$$

ahonnan a gyorsulás:

$$a = - F_s / m = - \mu g.$$

A megállás feltétele: $v_o - \mu g t = 0$,

innét a fékezés ideje: $t = v_o/\mu g$.

A megtett út összefüggésébe a fékezés idejére felírt kifejezéseket beírva:

$$s = v_o t - \frac{\mu g}{2} t^2 = v_o^2/\mu g - v_o^2/2\mu g = v_o^2/2\mu g.$$

Innét a csúszási súrlódási tényező:

$$\mu = v_o^2/2sg = 0{,}1.$$

A csúszási súrlódási tényező értéke 0,1.

2.177.

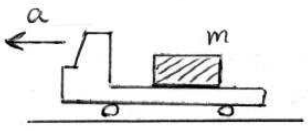
Adatok:

$m = 80$ kg

a. $a_1 = 1{,}2$ m/s²

b. $\underline{a_2 = 6 \text{ m/s}^2}$

$\mu_o = ?$

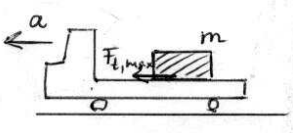


a. A ládára vízszintes irányban gyorsuláskor a tapadási súrlódási erő maximuma ($F_{t,max}$) hat, melynek iránya a menetiránnyal megegyező.

A ládára felírhatjuk a mozgásegyenletet:

$$F_e = F_{t,max},$$

$$ma = \mu_o mg.$$



A tapadási súrlódási együttható értékét kifejezhetjük:

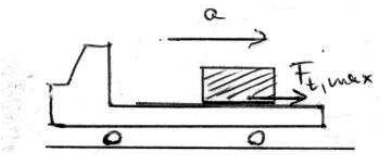
$$\mu_o = a/g = 0{,}12.$$

Legalább 0,12-nak kell lennie a tapadási súrlódási együtthatónak ahhoz, hogy a láda a kisteherautón ne csússzon meg.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

b. A kisteherautó lassul, ekkor a láda a menetirányban haladna tovább. A tapadási súrlódási erő iránya a menetiránnyal ellentétes lesz.



6. ábra

A ládára felírhatjuk a mozgásegyenletet:

$$F_e = F_{t,max},$$

$$ma = \mu_o mg.$$

A tapadási súrlódási együttható értékét megkapjuk:

$$\mu_o = a/g = 0{,}6.$$

Legalább 0,6-nak kell lennie a tapadási súrlódási együtthatónak ahhoz, hogy a láda fékezéskor a kisteherautón ne csússzon meg.

2.178.

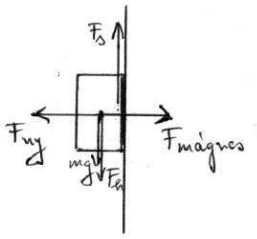
Adatok:

$m = 0{,}1$ kg

$F_h = 1{,}6$ N

a. $F_{mágnes} = ?$

b. $F_h = ?$



7. ábra

a. A mágnesre vízszintes irányban a mágnestábla által kifejtett $F_{mágnes}$ mágneses vonzóerő és ellenkező irányban a mágnestábla F_{ny} nyomóereje hat.

$$F_{mágnes} - F_{ny} = 0.$$

A mágnesre függőleges irányban a felfelé ható F_s súrlódási erővel az mg nehézségi erő és a F_h húzóerő eredője tart egyensúlyt. Mozgásegyenletet függőleges irányban felírva:

$$0 = mg + F_h - F_s,$$

ahonnan:

$$F_s = 2{,}6 \text{ N}.$$

Az F_s súrlódási erő:

$$F_s = \mu F_{ny},$$

amelyből az F_{ny} tábla nyomóereje:

$$F_{ny} = 13 \text{ N}.$$

A mágnes által kifejtett vonzóerő:

$$F_{mágnes} = 13 \text{ N}.$$

b. Vízszintes irányban az F_{ny} felületre merőleges nyomóerőt az érintkező felületek között fellépő kölcsönhatás szolgáltatja.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Vízszintes irányban fellépő erők eredője ebben az esetben is nulla:

$$0 = F_{mágnes} - F_{ny}.$$

A függőleges irányban fellépő súrlódási erő:

$$F_s = \mu \cdot F_{ny} = 2{,}6 \text{ N}.$$

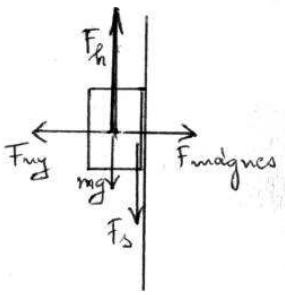
A mágnes függőleges irányban egyenletesen mozog, így a mágnesre függőleges irányban felfelé ható F_h húzóerő tart egyensúlyt a mg nehézségi erő és az F_s súrlódási erő eredőjével.

$$0 = F_h - F_s - mg,$$

ahonnan:

$$F_h = 3{,}6 \text{ N}.$$

A húzóerő nagysága 3,6 N.



8. ábra

KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

2.179.

Adatok:

$a_1 = 1{,}4\ m/s^2$

$\underline{a_2 = 2{,}2\ m/s^2}$

$\mu_o = ?$

Írjuk fel gyorsításkor és lassításkor is a mozgásegyenleteket!

Gyorsításkor a dobozra ható erők:

1. F_t tapadási súrlódási erő,
2. nehézségi erő
3. csomagtartó nyomóereje

A nehézségi erő és a csomagtartó nyomóereje kiegyenlíti egymást, mert függőleges irányú elmozdulás nincs. Vízszintes irányban felírva a mozgásegyenletet:

$$F_t \le F_{t.max},$$

$$ma_1 \le \mu_o\, mg,$$

amelyből

$$a_1/\, g \le \mu_o,$$

azaz

$$0{,}14 \le \mu_o.$$

Fékezéskor a valóságos maximális tapadási súrlódási erőnél nagyobb, hátrafelé mutató tapadási erőre lenne szükség, hogy a doboz ne csússzon meg. Ezt a feltételezett erőt jelöljük F_2-vel, és segítségével írjuk fel vízszintes irányban a mozgásegyenletet:

$$F_2 > \mu_o\, mg,$$

$$ma_2 > \mu_o\, mg,$$

amelyből

$$a_2/g > \mu_o,$$

azaz

$$0{,}22 > \mu_o.$$

A tapadási súrlódási együttható értékére kapjuk, hogy $0{,}22 > \mu_o \ge 0{,}14$.

2.180.

Adatok:

$\underline{\mu = 0{,}35}$

$F_h = ?$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

a. A munkalap mindkét oldalán fellép a csúszási súrlódási erő. A felső lapján felett egy munkalap van, így a felső és a második lap között fellépő súrlódási erő:

$$F_{s,1} = \mu mg = 120 \text{ N}.$$

A második munkalap alsó felülete felett két munkalap van ,így a fellépő súrlódási erő:

$$F_{s,2} = \mu 2mg = 240 \text{ N}.$$

A kihúzáshoz szükséges erő a két súrlódási erő összege:

$$F_h = 360 \text{ N}.$$

b. Az n-edik munkalap felett (n-1) db m tömegű munkalap van, így a súrlódási erő:

$$F_{(k-1)} = (n-1)\,\mu mg.$$

Az n-edik munkalap alsó lapját nmg erő nyomja, így a súrlódási erő:

$$F_k = n\mu mg.$$

Az n-dik munkalap kihúzásához szükséges erő a két súrlódási erő összege:

$$F_{hn} = (n-1)\mu mg + n\mu mg = \mu mg(2n-1).$$

Az n-dik munkalap egyenletes kihúzásához $\mu mg(2n-1)$ nagyságú erő szükséges.

2.181.

Adatok:

$v_2 = v_1 / 3$

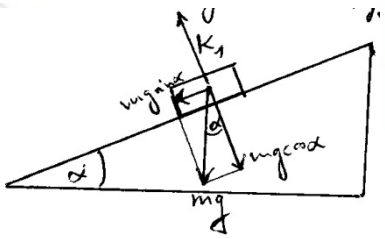
$\underline{\alpha = 30°}$

$\mu = ?$

Ha a doboz súrlódásmentes lejtőn csúszik lefelé. akkor a mozgásegyenleteket így írhatjuk fel:

$$ma_1 = mg\sin\alpha$$

$$0 = K_1 - mg\cos\alpha.$$



9. ábra

Innét a gyorsulás $a_1 = g\sin\alpha$ (= 5 m/s²).

A sebesség a $v = \sqrt{2as}$ összefüggéssel számítható:

$$v_1 = \sqrt{2 \cdot 5 \cdot s}\sqrt{2gs\sin\alpha}. \quad (1)$$

Súrlódás esetén a mozgásegyenletek:

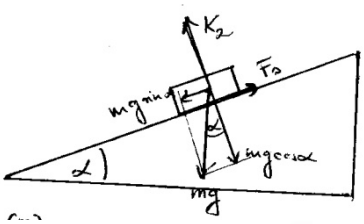
$$0 = K_2 - mg\cos\alpha$$

$$ma_2 = mg\sin\alpha - F_s.$$

A súrlódási erő:

$$F_s = \mu mg\cos\alpha.$$

A gyorsulás:



10. ábra

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$$a_2 = g\,(\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

A sebesség:

$$v_2 = \sqrt{2g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)s}. \quad (2)$$

Mivel $v_1 = 3\,v_2$, így az (1) és (2) összefüggésből kapjuk:

$$\mu = (8\,\mathrm{tg}\alpha)/9 = 0{,}51.$$

A lejtő és a doboz közötti csúszási súrlódási együttható 0,51.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Szabaderők ,kényszererők (gyakorló feladatok)

2.182.

Adatok:

$\alpha = 30°$

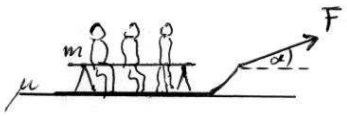
$F = 250$ N

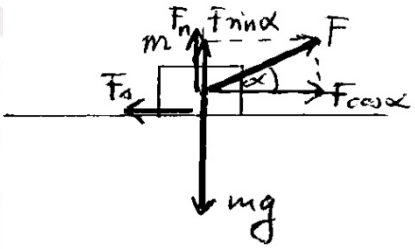
$m = 200$ kg

$\mu = 0{,}05$.

a. $F_s = ?$, $a = ?$

b. $v = ?$, ha $t = 8$s





a. A szánkóra a nehézségi erő mg, a talaj nyomóereje F_n, a vízszintessel 30°-os szöget bezáró F húzóerő és az F_s súrlódási erő hat.
A mozgásegyenletek:

$$F_e = F\cos\alpha - F_s$$
$$0 = mg - F_n - F\sin\alpha$$

A súrlódási erő:

$$F_s = \mu F_n = \mu(mg - F\sin\alpha) = 94 \text{ N}.$$

A szánkó gyorsulása:

$$a = (F\cos\alpha - \mu F_n)/m = 0{,}61 \text{ m/s}^2.$$

A súrlódási erő nagysága 94 N, a gyorsulás 0,61 m/s².

b. A szánkó sebessége:

$$v = at = 4{,}9 \text{ m/s}.$$

A szánkó sebessége 4,9 m/s.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

2.183.

Adatok:

$v = 36$ km/h $= 10$ m/s

$\underline{\alpha = 12°}$

$h_1 = ?$

$\mu_g = 0{,}08$

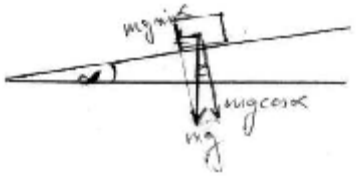
$h_2/h_1 = ?$

a. A kerékpárosra ható erőket az ábra mutatja. A kerékpárosra lejtőirányban a nehézségi erő lejtőirányú összetevője hat, így az eredő erő:

$$ma_1 = mg\sin\alpha,$$

ahonnan

$$a_1 = 2 \text{ m/s}^2.$$



A mozgás legmagasabb pontjába érés időtartama:

$$t_1 = v/a_1 = 5 \text{ s}.$$

A lejtőn megtett út:

$$s_1 = a_1/2\, t_1^{\,2} = 25 \text{ m}.$$

Az emelkedés magassága

$$h_1 = s_1/2 = 12{,}5 \text{ m}.$$

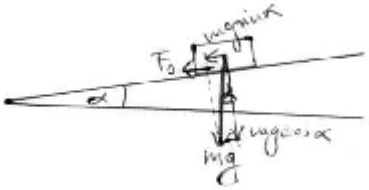
A kerékpáros 12,5 m magasra tud feljutni a lejtőre.

b. A kerékpárosra ható erőket az ábra mutatja. A kerékpárosra lejtőirányban a nehézségi erő lejtőirányú összetevője és a gördülési ellenállásból származó súrlódási erő hat.

$$F_e = mg\sin\alpha + \mu_g\, mg\cos\alpha,$$

ahonnan

$$a_2 = g\,(\sin\alpha + \mu_g\cos\alpha).$$



A gyorsulás értéke

$$a_2 = 2{,}9 \text{ m/s}^2.$$

A mozgás legmagasabb pontjába érés időtartama:

$$t_2 = v/a_2 = 3{,}4 \text{ s}.$$

A lejtőn megtett út:

$$s_2 = a_2/2\, t_2^{\,2} = 16{,}7 \text{ m}.$$

Az emelkedés magassága

$$h_2 = s_2/2 = 8{,}4 \text{ m}.$$

Az emelkedési magasság $h_2/h_1 = 0{,}7$ részére csökkent.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Pontrendszerek (gyakorló feladatok)

2.184.

Adatok:

$m_1 = 3$ kg

$m_2 = 4$ kg

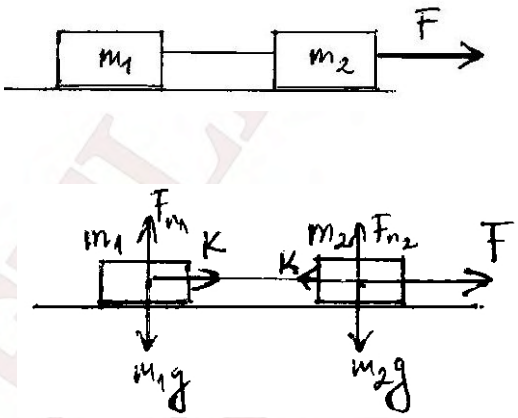
$t = 3$ s

$\underline{F = 3{,}5\ N}$

a. a = ?

b. K = ?

c. v = ?



11. ábra

a. A súrlódás elhanyagolható, így a rendszert az F húzóerő gyorsítja.

$$F = (m_1 + m_2)a,$$

ahonnan

$$a = 0{,}5\ m/s^s.$$

A rendszer gyorsulása 0,5 m/s^2.

b. Az m_1 tömegű testet a fonalat feszítő K erő gyorsítja.

$$K = m_1 a = 1{,}5\ N.$$

A fonalat feszítő erő 1,5 N.

c. A sebességet a v=at összefüggéssel határozzuk meg.

$$v = 1{,}5\ m/s.$$

A rendszer sebessége 3 s múlva 1,5 m/s lesz.

d. A kísérlet elvégzéséhez szükséges asztal hossza $s = a/2\ t^2$ összefüggés alapján:

$$s = 2{,}25\ m.$$

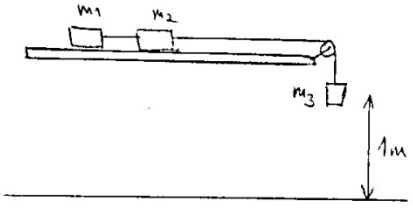
Legalább 2,25 méter hosszú súrlódásmentes asztalra van szükség.

2.185.

Adatok:

$m_1 = 2$ kg

$m_2 = 4$ kg



KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$m_3 = 5$ kg
$h = 1$ m
$\mu = 0{,}2$

a. $a = ?$
b. $K_1 = ?$ $K_2 = ?$
c. $t = ?$

a. A mozgásegyenleteket felírva

$$m_1 a = K_1 - F_{s,1}$$
$$m_2 a = K_2 - K_1 - F_{s,2}$$
$$m_3 a = m_3 g - K_2$$

A súrlódási erők nagysága:

$$F_{s,1} = \mu m_1 g = 4 \text{ N},$$
$$F_{s,2} = \mu m_2 g = 8 \text{ N}.$$

A gyorsulás

$$a = 3{,}45 \text{ m/s}^2.$$

b. A kötélerőket a mozgásegyenletekből fejezhetjük ki

$$K_2 = m_3(g-a) = 32{,}75 \text{ N},$$
$$K_1 = m_1 a + F_{s,1} = 10{,}9 \text{ N}.$$

c. Az m_3 tömegű test földre érkezésének ideje az $s = a/2\, t^2$ összefüggésből

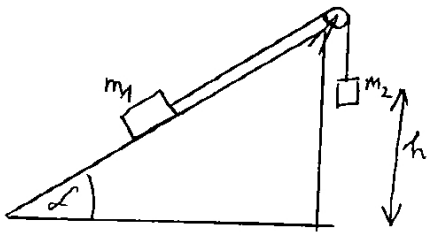
$$t = 0{,}76 \text{ s}.$$

A rendszer gyorsulása 3,45 m/s², a kötélerők nagysága 10,9 N és 32,75 N, míg az m_3 tömegű test földre érkezésének ideje 0,76 s.

2.186.

Adatok:
$m_1 = 5$ kg
$m_2 = 4$ kg
$h = 1{,}6$ m

a. $a = ?$
b. $K = ?$
c. $v = ?$
d. $t = ?$



a. Mivel $m_1 g \sin\alpha < m_2 g$, ezért a lejtőn lévő test a lejtőn felfelé indul el.
A pozitív irányt a mozgásirányban felvéve, a mozgásegyenletek így írhatók fel:

$$m_2 a = m_2 g - K$$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$$m_1 a = K - m_1 g \sin\alpha$$

A gyorsulás értéke

$$a = 1{,}7 \text{ m/s}^2.$$

b. A kötélerő az első mozgásegyenletből

$$K = m_2(g-a) = 33{,}3 \text{ N}.$$

c. A talajra érkezés sebessége a $v = \sqrt{2as}$ összefüggésből

$$v = 2{,}3 \text{ m/s}.$$

d. a leérkezés ideje a $v = at$ összefüggésből

$$t = 1{,}4 \text{ s}.$$

A rendszer gyorsulása 1,7 m/s², a kötélerő nagysága 33,3 N, míg az m_3 tömegű test földre érkezésének sebessége 2,3 m/s, végül a földre érkezés ideje 1,4 s.

2.187.

Adatok:

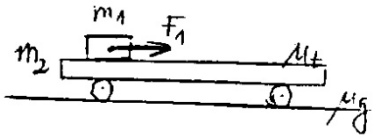
$m_1 = 5$ kg

$m_2 = 50$ kg

$F_1 = 18$ N

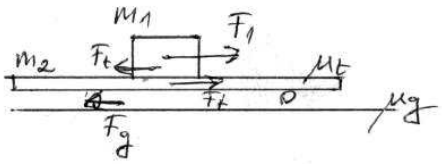
$\mu_g = 0{,}02$

$\mu_t = 0{,}3$



$a_1 = ?$, $a_2 = ?$

Először határozzuk meg, hogy a két test együtt vagy külön mozog. Ehhez szükséges lesz a súrlódási erők meghatározása.



A súrlódási erők nagysága

$$F_s = \mu m_1 g = 15 \text{ N},$$

$$F_g = \mu(m_1 + m_2)g = 11 \text{ N}.$$

Először tegyük fel, hogy együtt mozognak. Az egész rendszerre vízszintesen ekkor az

$$Fe = F_1 - F_g = 18 \text{ N} - 11 \text{ N} = 7 \text{ N}$$

eredő erő hatna.

Ekkor az eredő erő által létrejött gyorsulás

$$a = F_e/m = 7/55 \text{ m/s}^2 = 0{,}13 \text{ m/s}^2.$$

Így az m_1 testre ható eredő erőnek

$$F_{e,1} = m_1 \cdot a_1 = 5 \text{ kg} \cdot 0{,}13 \text{ m/s}^2 = 0{,}65 \text{ N}$$

nagyságúnak kellene lenni.

Ehhez az m_1 tömegű testre ható tapadási súrlódási erőnek

$$F_t = 18 \text{ N} - 0{,}65 \text{ N} = 17{,}35 \text{ N}$$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

nagyságúnak kellene, de ennek maximális értéke mindössze

$$F_{t,max} = \mu_t m_1 g = 15 \text{ N}.$$

Tehát biztosak lehetünk abban, hogy a test megcsúszik a kocsi platóján.

A mozgásegyenletek

$$m_1 a_1 = F_1 - F_s$$
$$m_2 a_2 = F_s - F_g,$$

ahonnan

$$a_1 = 0{,}6 \text{ m/s}^2 \text{ és } a_2 = 0{,}08 \text{ m/s}^2.$$

A láda megcsúszik a kiskocsin, láda gyorsulása 0,6 m/s²,
a kiskocsié 0,08 m/s².

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

2.188.

Adatok:

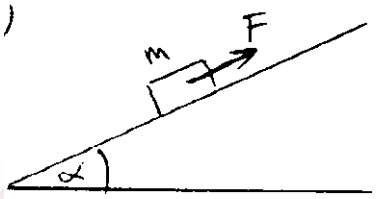
$\alpha = 30°$

$m = 25$ kg

$a = 0{,}3$ m/s²

$\mu = 0{,}15$

$F = ?$



A pozitív irányt vegyük fel az ábra szerint lejtővel párhuzamosan és lejtőre merőlegesen felfelé mutató irányban.

A mozgásegyenletek:

$$0 = F_n - mg\cos\alpha$$

$$ma = F - mg\sin\alpha - F_s.$$

A súrlódási erő: $F_s = \mu mg\cos\alpha$.

A második mozgásegyenletből F kifejezhető:

$$F = m(a + g\sin\alpha + \mu g\cos\alpha),$$

ahonnan

$$F = 165 \text{ N}.$$

A F erőnek lejtővel párhuzamosan 165 N nagyságúnak kell lennie.

2.189.

Adatok:

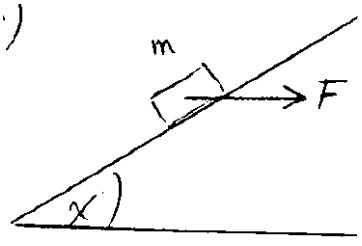
$\alpha = 30°$

$m = 20$ kg

$a = 0{,}2$ m/s²

$\mu = 0{,}2$

$F = ?$



A pozitív irányt vegyük fel az ábra szerint lejtővel párhuzamosan és lejtőre merőlegesen felfelé mutató irányban.

A mozgásegyenletek:

$$ma = F\cos\alpha - mg\sin\alpha - \mu F_n$$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$$0 = F_n - mg\cos\alpha - F\sin\alpha.$$

A második mozgásegyenletből F_n-t kifejezzük:

$$F_n = mg\cos\alpha + F\sin\alpha.$$

majd az elsőbe behelyettesítjük:

$$ma = F\cos\alpha - mg\sin\alpha - \mu(mg\cos\alpha + F\sin\alpha).$$

Innét F-t kifejezve kapjuk:

$$F = \frac{m(a+g\sin\alpha+\mu g\cos\alpha)}{\cos\alpha-\mu\sin\alpha},$$

ahonnan

$$F = 181 \text{ N}.$$

A lejtőn az F erőnek 181 N nagyságúnak kell lennie 0,2 m/s² gyorsulás esetén.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Egyenletes körmozgás dinamikája (gyakorló feladatok)

2.190.

Adatok:

$f_1 = 15\ \frac{1}{s}$

$f_2 = 40\ \frac{1}{s}$

r=

0,7

m

---

a, v_1= ?

v_2= ?

b, v-t grafikon

c, F = ?

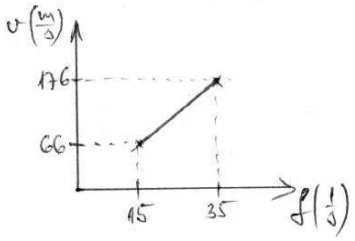
a, A kerületi sebességre fennáll v= wr= 2π f * r összefüggés. A légcsavarlapát végpontjának kerületi sebessége:

$v_1 = 66\ \frac{m}{s}$

$v_2 = 176\ \frac{m}{s}$

b,

A sebesség a fordulatszám függvényében



c, A légcsavarlapát végpontjára ható erő:

$F_{cp} = ma_{cp} = m\frac{v^2}{r}$ összefüggés alapján

F_{cp1}= 620N

F_{cp2}= 4420N.

A légcsavarlapát végpontjára ható erő $15\frac{1}{s}$ - nál 620 N, míg $40\frac{1}{s}$ -nál 4420 N.

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

2.191.

Adatok:

r= 0,2m

m= 0,1kg

a_{cp}

=

2g

a, f= ?

b, $F_{cp=}$?

a, A centripetális gyorsulás és a fordulatszám közötti összefüggés:

$$a_{cp}= w^2r= 4\,\pi^2 f^2\, r,$$

amelyből -> $f= 1{,}58\frac{1}{s}$

A korong fordulatszám: $1{,}58\frac{1}{s}$.

b, A centripetális erő az $F_{cp}= ma_{cp}$ összefüggésből:

$$F_{cp}\approx 2N.$$

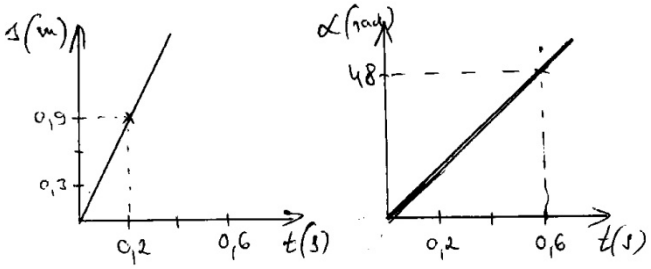
A korongra ható eredő erő nagysága 2N.

2.192.

Adatok:

$m = 5\ g = 5 \cdot 10^{-3}\ kg$

a. r= ?
b. w = ?
c. f = ?
d. T = ?
e. a_{cp} = ?
f. F_{cp} = ?

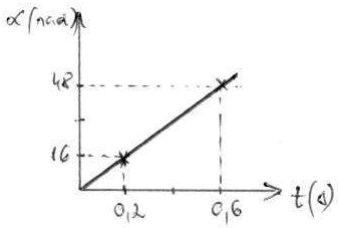


a. A pálya sugara az s =αr összefüggésből:

r = 0,056 m = 5,6 cm.

b. A szögsebesség a szögelfordulás-idő grafikon adatai alapján az w =2π/T összefüggésből:

$$w = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = 80\ 1/s.$$



KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

c. A fordulatszám:

$$f = w/2\pi = 12{,}73\ 1/s.$$

d. A periódusidő:

$$T = 1/f = 7{,}85 \cdot 10^{-2}\ s.$$

e. a centripetális gyorsulás:

$$a_{cp} = w^2\ r = 360\ m/s^2.$$

f. A gyorsulást létrehozó eredő erő:

$$F_{cp} = ma_{cp} = 1{,}8\ N.$$

2.193.

Adatok:

m= 0,05kg

r= 0,2m

T=

1,5

s

---

a, I= ?

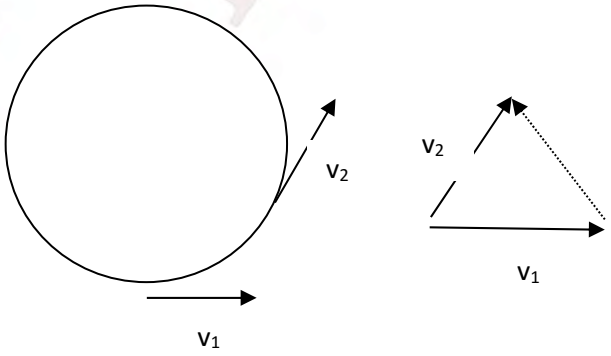
b, ΔI= ?

a, A lendület:

$I = mv = m\ \frac{2r\pi}{T} = 0{,}042\ kg\ \frac{m}{s}$

A rulettgolyó lendületének nagysága 0,042 kg $\frac{m}{s}$

b, A lendület vektormennyiség. Egyenletes körmozgás közben a lendület nagysága nem változik, iránya azonban igen. 60°-os elfordulás esetén a régi és az új lendületvektor, valamint a lendületváltozás-vektor szabályos háromszöget alkot, ezért ebben a speciális esetben a lendületváltozás nagysága is 0,042 kgm/s.



KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

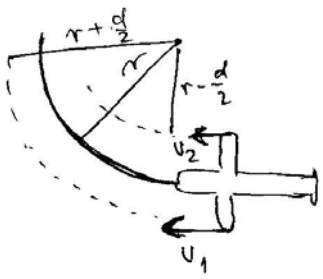
2.194.

Adatok:

v= 468 $\frac{km}{h}$ = 130 $\frac{m}{s}$

d= 65 m

m= 2,8 · 10^5 kg



---

a, r= ?, ha $\frac{v_1}{v_2} = \frac{10}{9}$

b, t= ?

c, F_{cp}= ?

a, A repülőgép minden pontjának azonos a szögsebessége, ez legyen „w”, a géptörzs körívének sugara „r”. A szárnyvégek pályasugarai: r_1= r + $\frac{d}{2}$; r_2= r - $\frac{d}{2}$, míg a sebességek rendre v_1 és v_2.

Így

v_1= w (r + $\frac{d}{2}$) és v_2= w (r - $\frac{d}{2}$).

Mivel $\frac{v_1}{v_2}$ = 101/100, ezért $\frac{(r+\frac{d}{2})w}{(r-\frac{d}{2})w}$ =101/100, ahonnan r = 201 · d/2= 6532,5 m.

A gép törzse által befutott körív sugara 6532,5m.

b, A gép a fordulás ideje alatt $^1/_4$ körívet tesz meg, amelyhez 130 $\frac{m}{s}$ sebességgel „t” idő szükséges.

t= $\frac{\frac{2r\pi}{4}}{v}$= 315 s.

c, A centripetális erő nagysága:

F_{cp}= m$\frac{v^2}{r}$ = 7,2 · 10^5 N.

A Boeing által befutott körív sugara 6532,5 m, a gép fordulási ideje 315 s, a rá ható centripetális erő nagysága 7,2 · 10^5 N.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

2.195.

Adatok:

R = 1000 m

A pálya legfelső pontján a pilótára csak a nehézségi erő hat. A mozgásegyenlet:

$$m\frac{v^2}{R} = mg$$

ahonnan $v = \sqrt{Rg} \approx 100$ m/s.

A pálya legfelső pontján a pilóta sebessége **100 m/s** .

2.196.

Adatok:

m = 0,1 kg

r = 0,165 m

$\mu_o = 1{,}4$

$f_{max} = 6$ 1/s

$f_{max} = ?$

Megforgatjuk a korongot, így a rajta lévő lap egyenletes körmozgást végez. Az agyagdarabra ható tapadási súrlódási erő biztosítja a körmozgás fenntartásához szükséges erőt.

A tapadási súrlódási erő az $F_{t.max} = \mu_o mg$ összefüggésből

$$F_{t,max} = 1{,}4 \text{ N}.$$

A maximális fordulatszám a $v = 2r\pi f$ és az $F_{cp} = F_{t.max}$ összefüggésből

$$m(2r\pi f_{max})^2/r = \mu_o mg,$$

ahonnan

$$f_{max} = 1{,}47 \text{ 1/s}.$$

A korongról 1,47 1/s fordulatszám felett lerepül a 0,1 kg tömegű agyagdarab.

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy az eredmény nem függ a kisméretű agyagdarabka tömegétől.

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

2.197.

Adatok:

l = r = 0,4 m

m = 0,2 kg

f = 3 1/s

a. v = ?

b. h = ?

c. K = ?

a. A kerületi sebesség a v =2rπf összefüggéssel számítható ki.

$$v = 7{,}54 \text{ m/s}.$$

Az elengedés pillanatában a tolltartó 7,54 m/s sebességgel rendelkezik.

b. A tolltartó függőleges hajítást végez felfelé.

Az emelkedés ideje a $v = v_o - gt$ összefüggésből

$$t = v_o/g = 0{,}77 \text{ s}.$$

Az emelkedés magassága

$$h = v_o t - \frac{g}{2}t^2 = 2{,}9 \text{ m}.$$

Az emelkedés magassága 2,9 m.

Ha a tolltartó forgásának középpontja 0,7 m-nél alacsonyabban van, akkor nem éri el a mennyezetet a tolltartó.

c. Az elengedés előtti pillanatban a tolltartóra két erő hat: a K fonálerő és az mg nehézségi erő. Ezek eredője adja az $F_{cp} = mv^2/r$ centripetális erőt, ami ebben a pillanatban vízszintes irányú, a kör középpontja felé mutat. Ez úgy lehetséges, hogy a fonálerő ferdén felfelé mutat, és függőleges összetevője a nehézségi erővel tart egyensúlyt, míg vízszintes összetevője adja a centripetális erőt (lásd az ábrát). Tehát a fonál a vízszintessel olyan α szöget zár be, melyre: tg α =

$$\frac{mg}{m\frac{v^2}{r}} = \frac{gr}{v^2} = 0{,}069.$$

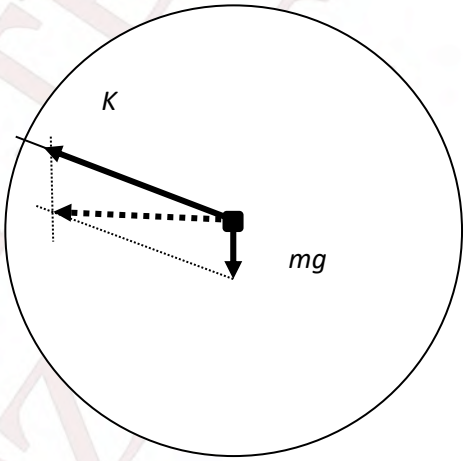
KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

A kérdéses szög nagyjából 4°. A tolltartóra ható nehézségi erő: mg ≈ 2N, a centripetális erő: $F_{cp} = mv^2/r = 28{,}4$ N. A fonálerőt a Pitagorasz-tétel segítségével kaphatjuk meg:

$$K = \sqrt{(mg)^2 + (F_{cp})^2} = 28{,}5 \text{ N}.$$

Az elengedés előtti pillanatban a fonál 4°-os szöget zár be a vízszintessel, és benne 28,5 N erő ébred, ami több, mint 14-szerese a tolltartó súlyának. A testet nagyon gyorsan forgatjuk, ezért ilyen nagy a fonálerő. Érdemes észrevenni, hogy függőleges síkban úgy lehet egy fonál végén lévő testet egyenletes körmozgásra kényszeríteni, ha kezünkkel megfelelő módon mozgatjuk a fonál másik végét, és mindig a szükséges feszítőerőt fejtjük ki.



KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

2.198.

Adatok:

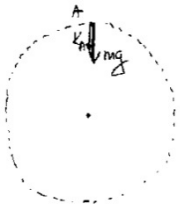
$v = 288 \text{ km/h} = 80 \text{ m/s}$

$R = 400 \text{ m}$

$\underline{m = 75 \text{ kg}}$

a. $K_A = ?$

b. $K_B = ?$



1. ábra

a. A legfelső pontban a repülőgép ülése a pilóta felett helyezkedik el (pilóta fejjel lefelé ül az ülésben), ezért a pilótát a kör középpontja felé nyomja.

$$mv_A^2/R = K_A + mg,$$

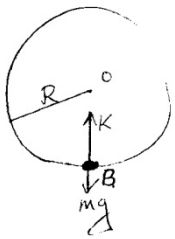
amelyből

$$K_A = m(v_B^2 /R - g).$$

$$K_A = 450 \text{ N}.$$

A pilótát a legfelső pontban az ülés 450 N erővel nyomja a kör középpontja felé.

b. A legalsó pontban a pilótára hat az ülés K_B nyomóereje és a nehézségi erő.



2. ábra

$$mv_B^2/R = K_B - mg,$$

amelyből

$$K_B = m(v_A^2 /R + g).$$

$$K_A = 1950 \text{ N}.$$

A pilótát a pálya legalsó pontban 1950 N erővel nyomja az ülés a kör középpontja felé (ez a pilóta súlyának 2,6-szerese).

2.199.

Adatok:

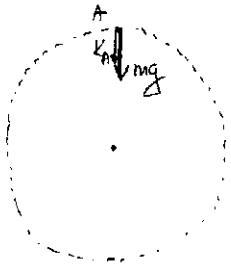
$m = 75 \text{ kg}$

$R = 490 \text{ m}$

$K = 0 \text{ N}$

a. $v_A = ?$

b. $K_B = ?$



KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

a. A feladat feltétele szerint a körpályán egyenletes sebességgel halad a repülőgép. A legfelső pontban a feladat szerint K_A = 0 N.
Így

$$mv_A^2/R = mg,$$

ahonnan

$$v_A = \sqrt{Rg} = 70 \text{ m/s}.$$

A körpálya legfelső pontjában a repülőgép sebessége 70 m/s.

b. A pálya legalsó pontjában

$$mv_B^2/R = K_B - mg$$

amelyből

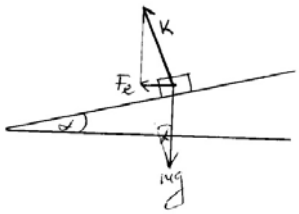
$$K_B = m(v_A^2/R + g).$$
$$K_A = 1500 \text{ N}.$$

A pilótát a pálya legalsó pontjában 1500 N erő nyomja a kör középpontja felé.

2.200.

Adatok:
v = 90 km/h = 25 m/s
r = 150 m
α = ?

Vízszintes pályán az autó körpályán haladásához a tapadási súrlódási erő biztosítja az eredő erőt, azaz a centripetális erőt. Ha a külső oldalt megemeljük, akkor akár súrlódásmentes esetben is kanyarodhatunk, mert az eredő erőt a talaj nyomóereje és a nehézségi erő adja:



3. ábra

$$F_e = F_{cp}.$$

Az ábrából leolvasható, hogy

$$tg\alpha = F_{cp}/mg,$$

ahonnan

$$tg\alpha = v^2/rg = 0{,}42.$$
$$\alpha = 23°.$$

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Az út külső oldalát 23°-kal kell megemelni, hogy a feladatban lévő feltételek teljesüljenek.

2.201.

Adatok:

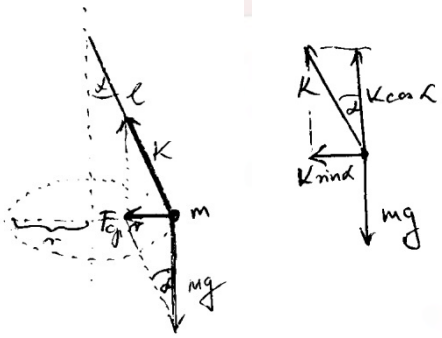
l = 1,2 m

r = 0,3 m

m = 0,25 kg

a. K = ?

b. T = ?



a. Írjuk fel az m tömegű testre ható erőket!
A testre az mg nehézségi erő és a fonál által a testre kifejtett erő hat, amely a fonál egyenesébe esik.
A fonálban ható erő függőleges összetevője egyensúlyozza ki a nehézségi erőt. A fonálerő vízszintes összetevője szolgáltatja a körpályán tartáshoz szükséges centripetális erőt.
A mozgásegyenletek:

$$K \cos\alpha = mg$$

$$mv^2/r = K \sin\alpha.$$

Az α szög meghatározható:

$$\sin\alpha = r/l = 0{,}25,$$

amelyből

$$\alpha = 14{,}5°.$$

Az első mozgásegyenletből

$$K = 2{,}6 \text{ N}.$$

A fonalat feszítő erő 2,6 N.

b. A második mozgásegyenletből az m tömegű test kerületi sebessége meghatározható

$$v = 0{,}88 \text{ m/s}.$$

A köringa egyenletes körmozgást végez, így a $v = 2r\pi/T$ összefüggésből a keringési idő kiszámítható.

$$T = 2{,}1 \text{ s}.$$

A fonálinga keringési ideje 2,1 s.

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Egyenletesen változó körmozgás (gyakorló feladatok)

2.202.

Adatok:

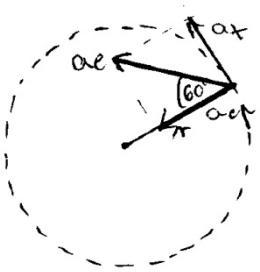
$a_e = 3{,}6\ m/s^2$

$\underline{v = 30\ m/s}$

a. $a_{cp} = ?$, $a_t = ?$

b. $s = ?$

c. $r = ?$



4. ábra

a. Az érintő irányú és a sugárirányú gyorsulás

$$a_t = a_e \sin 60^\circ = 3{,}12\ m/s^2,$$

$$a_{cp} = a_e \cos 60^\circ = 1{,}8\ m/s^2.$$

A személygépkocsi érintő irányú gyorsulása 1,8 m/s^2, míg a sugárirányú gyorsulása 3,12 m/s^2.

b. Érintő irányban a tangenciális gyorsulással gyorsul a gépkocsi, így $v = a_t\, t$ és az $s = a_t/2\, t^2$ összefüggésekből határozhatjuk meg a keresett mennyiségeket.

$$t = 9{,}6\ s,$$

$$s = 144\ m.$$

A személygépkocsi gyorsulva 144 m út megtétele után éri el a 30 m/s sebességet.

c. A gépkocsi sebessége egyben a körpályán a kerületi sebessége is, így az $a_{cp} = v^2/r$ összefüggésből

$$r = 500\ m.$$

A körpálya sugara 500 m.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

2.203.

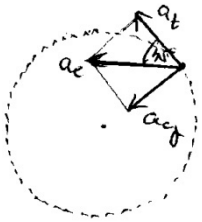
r = 100 m

t = 10 s

v_1 = 36 km/h = 10 m/s

$\underline{v_2 = 72 \text{ k/h} = 20 \text{ m/s}}$

a_e = ?



A gépkocsi eredő gyorsulásához a centripetális és a tangenciális gyorsulást kell meghatároznunk.

A centripetális gyorsulás

$$a_{cp} = v^2/r = 1 \text{ m/s}^2.$$

A körív menti gyorsulást a tangenciális gyorsulás szolgáltatja.

$$a_t = \Delta v/\Delta t = 1 \text{ m/s}^2.$$

Az eredő gyorsulás

$$a_e = \sqrt{a_{cp}^2 + a_t^2} = \sqrt{2}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 1{,}4\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

A Suzuki gyorsulása $1{,}4\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, iránya a kör érintőjével 45°-os szöget zár be.

2.204.

Adatok:

v = 25 m/s

$a = 1{,}8 \text{ m/s}^2$

$\underline{r = 0{,}36 \text{ m}}$

β = ?

A gyorsulás időtartama a v = at összefüggésből

$$t = v/a = 13{,}9 \text{ s}.$$

A szögsebesség a mozgás végén

$$w = v/r = 38{,}6 \text{ 1/s}.$$

A keresett szöggyorsulás

$$\beta = \frac{\Delta w}{\Delta t} = \frac{38.6-0}{13.9-0} = 2{,}8 \text{ 1/s}^2.$$

A Mercedes kerekeinek szöggyorsulása $2{,}8 \text{ 1/s}^2$.

2.205.

Adatok:

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

r = 0,015 m

t = 3 s

$\underline{a_t = 1{,}2\ m/s^2}$

a. β = ?, f = ?

b. s = ?

a. A szöggyorsulás

$$\beta = a_t / r = 80\ 1/s^2.$$

A szögsebesség és a fordulatszám

$$w = \beta t = 240\ 1/s,$$

$$f = w/2\pi = 38{,}2\ 1/s.$$

A cérnaorsó szöggyorsulása 80 1/s², a fordulatszáma pedig 38,2 1/s.

b. A letekeredett fonál hossza

$$s = a_t/2\ t^2 = 5{,}4\ m.$$

A cérnaorsóról 5,4 m hosszú cérna tekeredik le.

2.206.

Adatok:

r = 2 m

$\underline{\beta = 1{,}6\ 1/s^2}$

t = ?

a_e = ?

a. A feladat állítása szerint

$$a_{cp} = 6\ a_t,$$

amelyből

$$\omega^2 r = (\beta t)^2 r = 6\ \beta r.$$

Az keresett időtartam

$$t = 1{,}94\ s.$$

A centripetális gyorsulás 1,94 s múlva lesz hatszor akkora, mint az érintő irányú gyorsulás.

b. Határozzuk a centripetális gyorsulást és az érintő irányú gyorsulást!

$$a_t = \beta r = 3{,}2\ m/s^2,$$

$$a_{cp} = 6\ a_t = 19{,}2\ m/s^2.$$

Az eredő gyorsulás az $a_e = \sqrt{a_{cp}^2 + a_t^2}$ összefüggésből

$$a_e = 19{,}5\ m/s^2.$$

A hajlásszög

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$\cos \alpha = a_{cp}/a_e = 0.986$,

$\alpha = 9{,}5°$.

Az eredő gyorsulás 19,5 m/s², iránya a kör sugarával 9,5°-os szöget zár be.

2.207.

$w_2 = 150$ 1/s

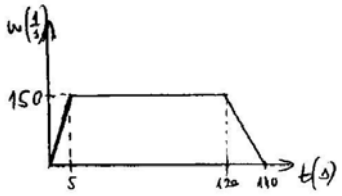
$t_1 = 5$ s

$t_2 = 115$ s

$t_3 = 20$ s

a. β-t grafikon

b. $w_{átl}$ = ?



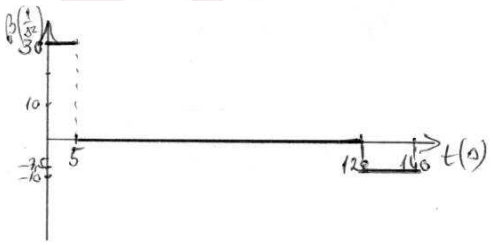
a. A szöggyorsulást a $\beta = \frac{\Delta w}{\Delta t}$ összefüggés alapján határozzuk meg.

$$\beta_1 = \frac{150-0}{5-0} = 30 \text{ 1/s}^2,$$

$$\beta_2 = 0 \text{ 1/s}^2,$$

$$\beta_3 = \frac{0-150}{140-120} = -7{,}5 \text{ 1/s}^2.$$

A szöggyorsulás az első szakaszon 30 1/s², a második szakaszon 0, a harmadik szakaszon -7,5 1/s².



b. Az átlagos szögsebességhez határozzuk meg az egyes szakaszokon a szögelfordulásokat!

$\alpha_1 = 375$ rad, $\alpha_2 = 17\,250$ rad, $\alpha_3 = 1500$ rad,

$\sum \alpha = 19\,125$ rad.

$$w = \frac{\Delta \alpha}{\Delta t} = 136{,}6 \text{ 1/s}.$$

A légcsavar végpontjának átlagos szögsebessége 136,6 1/s.

2.208.

Adatok:

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$r_{z=}$ 0,6 m

$w_{z=}$ 2 $\frac{1}{s}$

r_p=

0,4m

β_p=

0,8 $\frac{1}{s^2}$

---

a, v-t, s-t grafikon

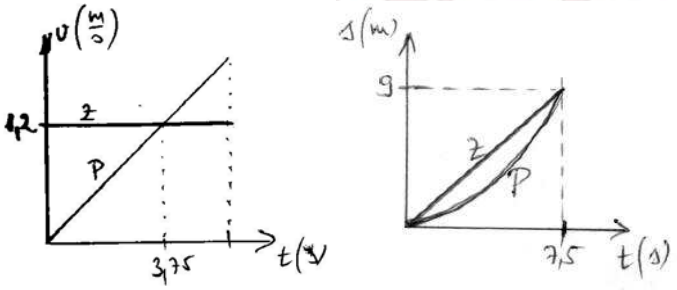
b, t= ?

a, A zöld színű golyó kerületi sebessége:

$V_t = r_z w_z = 1{,}2 \frac{m}{s}$

A piros golyó kerületi sebessége:

$V_p = r_p * w_p = r_p * \beta t = 0{,}32 * t.$



b, A befutott ívhosszak egyenlők:

$(w_z * t)\, r_z = (\frac{\beta_z}{2} * t^2)\, r_p$

ahonnan -> t= 7,5s

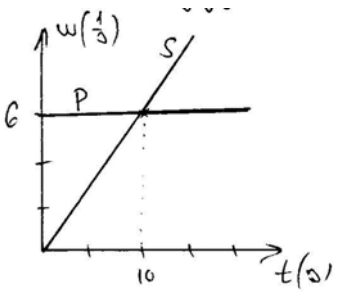
A megtett ívhosszuk:

s_t= 9 m, s_p= 9 m

A befutott ívhosszuk 7,5 s múlva lesz azonos, mégpedig 9 m.

2.209.

Adatok:



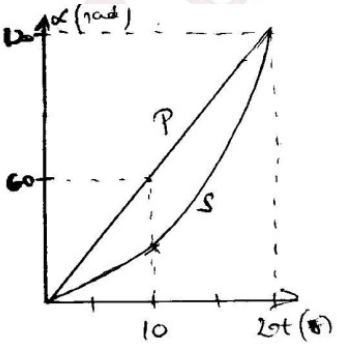
SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

W_p
= 6
$\frac{1}{s}$

---

a, α – t, β - t grafikon

b, t= ?, $\alpha_s = \alpha_p$



a,

$\beta_S = \Delta\omega/\Delta t = 0{,}6 \frac{1}{s^2}$

t= 10s-nál:

α_P= W_P * t= 60 rad,

$\alpha_S = \frac{\beta_S}{2} t^2$=30 rad.

b, $\alpha_P = \alpha_S$

$w_p \cdot t = \frac{\beta_S}{2} * t^2$

ahonnan -> t= 20s

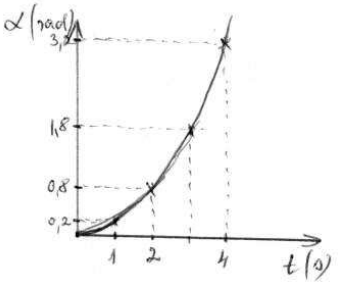
A két szögelfordulás 20 s múlva lesz azonos (120 radián).

2.210.

Adatok:

m= 0,15 kg

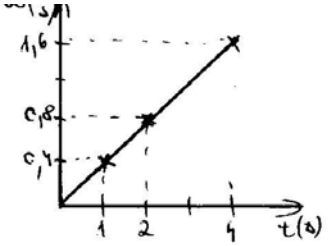
r= 0,3 m



a,

b, w –t, $\alpha - t$ grafikon

c, F_e= ?



a, A golyó egyenletesen gyorsuló körmozgást végez az első négy másodpercben, mert a grafikon egy parabolaív. Így $\alpha \sim t^2$.

b, A szöggyorsulás állandó, az $\alpha = \frac{\beta}{2} t^2$ –ből β= 0,4 $\frac{1}{s^2}$.

A szögsebesség:

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

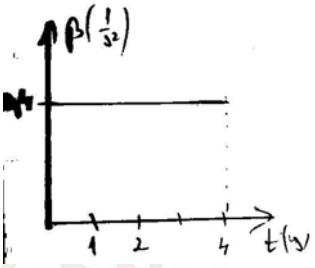
SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

t = 1 s ω_1 = 0,4 1/s

t= 2s w_2= 0,8$\frac{1}{s}$

t= 3s w_3= 1,2 $\frac{1}{s}$

t= 4s w_4= 1,6$\frac{1}{s}$



c, A golyó érintőleges (tangenciális) gyorsulása:

$a_t = \beta r$= 0,12 m/s²

A golyó centripetális gyorsulása:

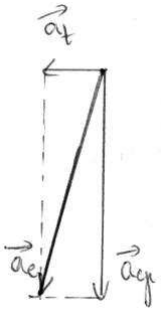
A szögsebesség a 4. s. végén w= 1,6 $\frac{1}{s}$,

így $a_{cp} = w^2 r$= 0,768 m/s²

Az eredő gyorsulás:

$a_e = \sqrt{a_{cp}^2 + a_t^2}$= 0,777 $\frac{m}{s^2}$

$F_e = ma_e$= 0,117 N.



Az eredő erő iránya az eredő gyorsulással megegyezik

$\cos\alpha = \frac{a_{cp}}{a_e}$ – ből → α= 8,88°.

Az eredő erő nagysága 0,117 N, iránya a kör sugarával 8,88°- ot zár be.

KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Tehetetlenségi erők (gyakorló feladatok)

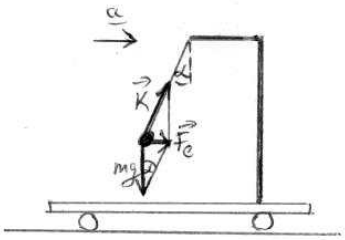
M.2.211.
Adatok:
$\alpha = 18°$
a = ?

a. Úttesthez rögzített vonatkoztatási rendszerben

Az úttesthez képest a fonálinga a gyorsulással mozog.
A fonálingára ható erők:

- mg nehézségi erő,
- K fonál húzóereje a fonál irányában.

A két erő eredője a gyorsulás irányába mutat.
Az ábra alapján felírhatóak a mozgásegyenletek



1. ábra

$$ma = K\sin\alpha$$
$$0 = mg - K\cos\alpha$$

A két egyenletből levezethető

$$tg\alpha = a/g,$$

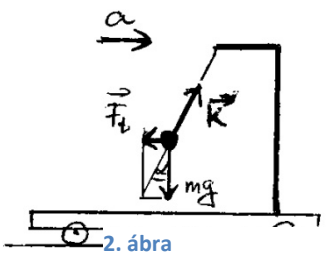
ahonnan

$$a = 3{,}19\ m/s^2.$$

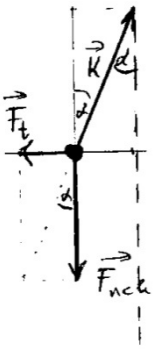
A személygépkocsi 3,19 m/s² gyorsulással halad.

b. személygépkocsihoz rögzített vonatkoztatási rendszerben

A kocsihoz képest a golyó nyugalomban van. Ahhoz, hogy a Newton törvényeket alkalmazni tudjuk és felírhassuk a mozgásegyenleteket a ténylegesen ható erők mellé fel kell vennünk egy $F_t = - ma_o$ tehetetlenségi erőt, ahol a_o a gépkocsi gyorsulása.
A mozgásegyenletek:



2. ábra



$$mg - K\cos\alpha = 0$$
$$K\sin\alpha - ma_o = 0$$

A két egyenletből levezethető

$$tg\alpha = a_o/g,$$

ahonnan

$$a_o = 3{,}19\ m/s^2.$$

A személygépkocsi 3,19 m/s² gyorsulással halad.

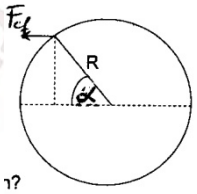
Megjegyzés: A valóságban ez a jelenség úgy hajtható végre, hogy az utas előre tudja az inga későbbi „egyensúlyi" helyzetét, oda beállítja az ingát, majd az indulást követően elengedi az általa már 18°-ban kitérített ingát, ami a kocsihoz képest addig marad nyugalomban, ameddig a jármű gyorsulása le nem csökken.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Ha az autó úgy kezd gyorsulni, hogy az inga függőleges helyzetű, akkor az inga a 18°-os helyzet körül enyhén csillapodó lengésbe kezd, vagyis először nagyjából 36°-os szögben tér ki.

M.2.212.
R = 6370 km = 6,37 · 10^6 m
α = 46,6°
F_{cf}/mg = ?



Az F_{cf} centrifugális erő és az F_{neh} erő arányát kell meghatároznunk:

$$\frac{F_{cf}}{mg} = \frac{mw^2 R\cos\alpha}{mg} = 2{,}37 \cdot 10^{-3}.$$

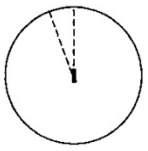
A fenti összefüggésben ω a Föld szögsebessége: ω = 2π/1nap = 2π/86164s = 7,29 · 10^{-5} 1/s.
A centrifugális erő és a nehézségi erő aránya 2,37 10^{-3}.

Megjegyzés: Mivel a Föld nemcsak a tengelye körül forog, hanem a Nap körül is kering, ezért deleléstől delelésig a Föld nagyjából 361°-ot fordul el. A 360°-os elforduláshoz így kb. 4 perccel kevesebb időre van szükség, ezért nem a pontosan 24 órás (86 400 másodpercből álló) nap szerepel a Föld szögsebességének nevezőjében, hanem a valamivel rövidebb, úgynevezett csillagnap.

M.2.213.
Adatok:
d = 10 km = 10^4 m
t = 10 s
T = 86 400 s
s = ?

a. *Földhöz rögzített vonatkoztatási rendszerben (inerciarendszerben)*

Az ágyúlövedék, miközben megtesz 10 km utat, a Föld alatta elfordul.
A cél egy északi sark középpontú, d sugarú köríven mozog, melyen t/T ideig halad.
A cél által megtett út:



4. ábra

$$s = 2d\pi\frac{t}{T} = 7{,}27\ 10^{-3}\ \text{km} = 7{,}27\ \text{m}.$$

A célt 7,27 m-rel téveszti el a lövedék.

b. *Földhöz rögzített forgó vonatkoztatási rendszerben*

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

A lövedék mozgására merőleges, vízszintes irányú Coriolis-erőt kell felvennünk. A lövedékre ható F_e eredő erő vízszintes összetevője az F_C Coriolis-erő lesz

$$F_{ex} = F_C. \quad (1)$$

A lövedék sebessége

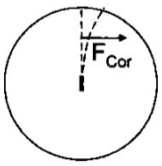
$$v = s/t = 1\,000 \text{ m/s}.$$

A Föld szögsebessége

$$w = 2\pi/T = 7{,}27 \cdot 10^{-5} \text{ 1/s}.$$

A Coriolis-erő

$$F_C = 2m(v \times w) = 2mvw.$$



5. ábra

Az (1) egyenletből

$$a_C = F_C/m = 2v\,w = 14{,}54\ 10^{-2} \text{ m/s}^2.$$

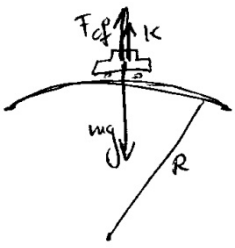
A cél által megtett út:

$$s = (a_C/2)\,t^2 = 7{,}27 \text{ m}.$$

A célt 7,27 m-rel téveszti el a lövedék.

Megjegyzés: A feladat megoldása során számos közelítést alkalmaztunk. A Föld szögsebességének kiszámításakor nem a csillagnapot, hanem a pontosan 24 órás napot használtuk (lásd 3.131. feladat). A ballisztikus pályán haladó lövedéknek a sebessége nagyobb, mint a vízszintes elmozdulásból számított sebesség. A légellenállás hatása sokkal nagyobb, mint a Föld forgásából származó eltérítő hatás. A Coriolis-erő mindig merőleges a sebességre, vagyis az elforduló lövedék pályájára, mi viszont állandó nagyságú és állandó irányú erővel számoltunk.
A feladat mondanivalója az, hogy a Coriolis-erő a Földön csak nagy távolságokon érvényesül, tehát például egy laboratóriumon belül (ha a sebességek kicsik), akkor alig vesszük észre a hatását, ezért a talajhoz rögzített koordinátarendszerek jó közelítéssel inerciarendszerek.

M.2.214.
Adatok:
r = 160 m
v = 72 km/h = 20 m/s
m = 1 400 kg
K = ?



6. ábra

A személygépkocsival együtt forgó vonatkoztatási rendszerben a személygépkocsi nyugalomban van.
A személygépkocsira a nehézségi erő és a híd nyomóereje és a sugár irányban kifelé mutató $F_{cf} = mw^2r = m\frac{v^2}{r}$ centrifugális erő hat.
A mozgásegyenlet

$$o = mg - K - mw^2r,$$

ahonnan

$$K = m(g - v^2/r).$$

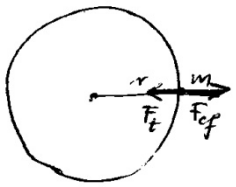
$$K = 10\,500 \text{ N}.$$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

A Mercedest 10 500 N erővel nyomja a híd.

M.2.215.
Adatok:
m = 2 600 kg
r = 120 m
$\underline{\mu = 0{,}5}$
v_{max} = ?



7. ábra

A forgó vonatkoztatási rendszerben a kisteherautó nyugalomban van. A kisteherautóra vízszintesen, sugárirányban az F_t tapadási súrlódási erő és a sugárirányban kifelé mutató $F_{cf} = mrw^2$ centrifugális erő hat. A két erő egyenlőségét felírva:

$$0 = mrw^2 - \mu_0 mg,$$

ahonnan

$$w = \sqrt{\frac{\mu_0 g}{r}}.$$

A sebesség maximuma

$$v = wr = \sqrt{\mu_0 g r} = 24{,}3 \text{ m/s}.$$

Az Opel maximális sebessége 24,3 m/s.

Newton-féle gravitációs törvény, mesterséges égitestek (gyakorló feladatok)

M.2.216.
Adatok:
$g_0 = 9{,}81 \text{ m/s}^2$
$\underline{h = 10\,000 \text{ m} = 10^4 \text{ m} = 10 \text{ km}}$
$g' = ?$

A gravitációs gyorsulás értéke a Földtől való távolság növekedésével a $g_h = \gamma \frac{M_F}{(R+h)^2}$ összefüggés szerint csökken, ahol R a Föld sugara (R = 6370 km), M_F a Föld tömege, γ pedig az egyetemes tömegvonzási állandó ($\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$). Az összefüggésből jól látszik, hogy a nehézségi gyorsulás a Föld középpontjától mért távolság négyzetével fordítottan arányos:

$$g_h = g_0 \frac{R^2}{(R+h)^2} = 9{,}78 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

A gravitációs gyorsulás értéke 9,78 m/s², ami alig több, mint 3 ezrelékkel kisebb a földfelszíni értéknél. Ez azt jelenti, hogy akár 10 km magasságig ilyen pontossággal homogénnek tekinthetjük a gravitációs teret a Föld egy adott helyén.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Megjegyzés: A fentivel megegyező értéket kapjuk, ha helyes adatokat helyettesítünk be közvetlenül a Newton-féle gravitációs erő kifejezésén alapuló fenti képletbe (γ, M_F, R, h).

M.2.217.
Adatok:
R_1 = 0,1 mű
R_2 = 0,08 m
r = 0,25 m
ρ = 8920 kg/m^3
F_g = ?

A vörösréz golyók tömege az $m = \rho 4/3 R^3 \pi$ összefüggéssel számítható ki.
A tömegek:

m_1 = 37,36 kg,
m_2 = 19,13 kg.

A két golyó között a gravitációs vonzóerő lép fel.

$F_g = \gamma m_1 m_2 / r^2 = 7{,}62\ 10^{-7}$ N.

A vörösréz golyók $7{,}62\ 10^{-7}$ N erővel vonzzák egymást 0,25 m távolságról.

M.2.218.
Adatok:
M =$6\ 10^{24}$ kg
R = 6370 km = $6{,}37\ 10^6$ m
h = ?

Vegyünk a Föld felszíne felett h magasságban egy m tömegű testet, amely szabadon esik. A szabadon eső testre ható nehézségi erő és a gravitációs erő jó közelítéssel megegyezik:

$$mg/2 = = \gamma \frac{mM}{(R+h)^2},$$

ahonnan

$$h = \sqrt{\frac{2\gamma M}{g}} - R = 2{,}576\ 10^6 \text{ m}.$$

A h magasság és a Föld sugár hányadosa a keresett magasság

h/R = 0,4.

A h/R = 0,4, így a Föld sugár 0,4-ed részével kell felemelkednünk.
Megjegyzés: Mivel a nehézségi gyorsulás a Föld középpontjától mért távolság négyzetével fordítottan arányos, így $\sqrt{2}$ R ≈ 1,41 R távolságban lesz az értéke a földfelszíni érték fele, vagyis a Föld felszínétől h = 0,41 R magasságban.

M.2.219.
Adatok:

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

m = 70 kg
M = 6 10^{24} kg
R = 6370 km = 6,37 10^{6} m
h_1 = 1000 m
h_2 = 8800 m
g_2 / g_1 =?

A két magasságban határozzuk meg a nehézségi gyorsulás értékét!

$$g_1 = \gamma\frac{M}{(R+h_1)^2} = 9{,}8104 \text{ m/s}^2.$$

$$g_2 = \gamma\frac{M}{(R+h_2)^2} = 9{,}7864 \text{ m/s}^2.$$

A két nehézségi gyorsulás hányadosa

$$g_2 / g_1 = 0{,}9975 = 99{,}75\%.$$

A Himalája tetején a nehézségi gyorsulás 0,25 %-kal kisebb, mint a lábánál.

Megjegyzés:
1. A lényeges mondanivalója a feladatnak az, hogy ugyanannak a tömegnek a súlya szinte észrevehetetlen mértékben könnyebb a Himalája csúcsán, mint a hegy lábánál.
2. A Föld forgását nem érdemes figyelembe vennünk, mert nem változtat számottevően a gyorsulás arányon.

M.2.220.
Adatok:
R = 700 000 km = 7 10^{8} m
a = 274 m/s²
M = ?
ρ = ?

A Nap felszínén a gravitációs gyorsulás

$$g = \gamma\frac{M}{R^2},$$

ahonnan

$$M = gR^2/\gamma = 2\ 10^{30} \text{ kg}.$$

A Nap térfogata a $V = 4/3\ R^3\pi$ alapján

$$V = 1{,}44\ 10^{27} \text{ m}^3.$$

Az átlagsűrűség

$$\rho = M/V = 1\,392 \text{ kg/m}^3.$$

A Nap tömege 2 10^{30} kg, átlagos sűrűsége 1 392 kg/m³.

M.2.221.
Adatok:

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$R_G = 1{,}07\ 10^6$ km $= 1{,}07\ 10^9$ m
$T_G = 7{,}16$ nap $= 6{,}186\ 10^5$ s
$M_{Jup} = ?$

A Ganimedesz pályájának kerületi sebessége a $v = 2r\pi/T$ összefüggéssel számítható ki.

$$v_G = 1{,}087\ 10^4 \text{ m/s}.$$

A Ganimedesz és a Jupiter között fellépő gravitációs vonzóerő adja a körpályán tartáshoz szükséges erőt.

$$m_G v_G{}^2/R_G = \gamma\, m_G M_{Jup}/R_G{}^2.$$

Ebből

$$M_{Jup} = v^2R/\gamma = 1{,}895\ 10^{27} \text{ kg}.$$

A Jupiter tömege $1{,}895 \cdot 10^{27}$ kg, ami 318-szor nagyobb a Föld tömegénél.

M.2.222.
Adatok:
$r_K = 1{,}88\ 10^6$ km $= 1{,}88\ 10^9$ m
$r = 70\ 000$ km $= 7\ 10^7$ m
$T_K = 16{,}68$ nap $= 1{,}44\ 10^6$ s

a. $M_{Jup} = ?$
b. $\rho_{átl} = ?$
c. $g = ?$

a. A Kalisto pályamenti sebessége a $v = 2r\pi/T$ összefüggésből számítható.

$$v = 8203 \text{ m/s}.$$

A Jupiter és a Kalisto közötti gravitációs vonzóerő szolgáltatja a centripetális erőt:

$$m\frac{v^2}{r_K} = \gamma\frac{Mm}{r_K^2},$$

ahonnan

$$M = 1{,}896\ 10^{27} \text{ kg}.$$

A Jupiter tömege $1{,}896\ 10^{27}$ kg.

b. A Jupiter átlagos sűrűsége a $\rho = m/V$ és a $V = {}^3\ \pi$ összefüggésből:

$$\rho = 1320 \text{ kg/m}^3.$$

A Jupiter átlagos sűrűsége 1320 kg/m³.

c. A Jupiter felszínére képzeletben helyezzünk el egy m tömegű testet. Az m tömegű testre ható nehézségi erő egyenlő a Newton-féle gravitációs erőtörvény alapján számítandó gravitációs vonzóerővel.

$$mg = \gamma M_{Jup}\, m/r^2.$$

Ebből

$$g = \gamma\frac{M}{r^2} = 25{,}8 \text{ m/s}^2.$$

A Jupiter felszínén a gravitációs gyorsulás értéke 25,8 m/s².

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.2.223.
Adatok:

$m = 400\ t = 4\ 10^5\ kg$
$h = 360\ km = 3{,}6\ 10^5\ m$
$M_F = 6\ 10^{24}\ kg$
$\underline{R_F = 6380\ km = 6{,}38\ 10^6\ m}$

a. $v = ?$
b. $F_e = ?$
c. $a_{cp} = ?$

a. A Nemzetközi űrállomásra a Föld gravitációs ereje hat, mely a Föld középpontja, azaz az űrállomás körpályájának középpontja felé mutat.
Az űrállomásra felírva a mozgásegyenletet:

$$ma_{cp} = F_g,$$
$$mv^2/(R+h) = \gamma M_F m/(R+h)^2.$$

ahonnan

$$v = \sqrt{\gamma \frac{M_F}{R+h}} = 7{,}7\ 10^3\ m/s.$$

Az űrállomás sebessége $7{,}7\ 10^3$ m/s.

b. Az űrállomásra ható erők erdője

$$F_e = \gamma Mm/(R+h)^2,$$

ahonnan

$$F_e = 3{,}52\ 10^6\ N.$$

Az űrállomásra ható erők eredője $3{,}52\ 10^6$ N.

c. Az űrállomás gyorsulása a Föld középpontja felé mutat, így ez a centripetális gyorsulása:

$$a_{cp} = F_e / m = 8{,}81\ m/s^2.$$

Az űrállomás centripetális gyorsulása $8{,}81$ m/s^2.

M.2.224.
Adatok:
$r = 228$ millió km $= 2{,}28\ 10^{11}$ m
$\underline{M = 2\ 10^{30}\ kg}$
$T = ?$

A Mars bolygó pályáját a Nap körül közelítsük körrel. A gravitációs erő szolgáltatja a körpályán tartáshoz szükséges centripetális erőt.

$$m\ v^2/R = \gamma \frac{mM}{R^2},$$

ahonnan kerületi sebesség

$$v = \sqrt{\gamma \frac{M}{r}} = 2{,}42\ 10^4\ m/s.$$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

A keringési idő a $v=2R\pi/T$ összefüggésből

$$T = 5{,}92\ 10^7\ s = 685\ nap.$$

A Mars bolygó keringési ideje 685 nap.

M.2.225.
Adatok:
$M = 1{,}898\ 10^{27}$ kg
$T = 16{,}69$ nap $= 1{,}44\ 10^6$ s
$R = 2410$ km $= 2{,}41\ 10^6$ m
$\rho = 1834$ kg/m^3
$g = ?$

a. Először a Callisto térfogatát és tömegét határozzuk meg.

$$V = 4/3R^3\pi = 5{,}86\ 10^{19}\ m^3.$$
$$m = \rho \cdot V = 1{,}075\ 10^{23}\ kg.$$

A Callisto felszínén a gravitációs gyorsulás

$$g = \gamma\frac{m}{R^2} = \ m/s^2,$$

amelyből

$$g = 1{,}235\ m/s^2.$$

A Callisto felszínén a gravitációs gyorsulás nagysága 1,234 m/s^2.

b. A Callistot a Jupiter körüli pályán a Callisto és a Jupiter között ható gravitációs vonzóerő tartja. Ez egyben a Callistora ható eredő erő is.

$$F_{cp} = F_g,$$
$$m\ v^2/r = \gamma\frac{mM}{r^2},$$

amelyből v^2 –t kifejezve

$$v^2 = \gamma\frac{M}{r}. \quad (1)$$

A kerületi sebességre fennáll a $v = 2r\pi/T$ (2) összefüggés.

Az (1) és (2) –ből kapjuk

$$r = \sqrt[3]{\gamma\frac{MT^2}{4\pi^2}}.$$

A Callisto Jupitertől való távolsága ezek után az adatok behelyettesítésével kapható meg:

$$r = 1{,}88\ 10^9\ m.$$

A Callisto 1,88 millió km átlagos távolságra kering a Jupiter körül.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.2.226.
m = 900 kg
M = 6,42 10^{23} kg
r = 3400 km = 3,4 10^6 m
F_g = ?

A gravitációs vonzóerő a Curiosity és Mars között

$$F_g = \gamma\frac{mM}{r^2} = 3\,340 \text{ N}.$$

A Curiosityra a gravitációs vonzóerő a Földön mértnek valamivel több, mint a harmada, 3 340 N.

M.2.227.
Adatok:
M = 5,974 10^{24} kg
R_s = 6357 km = 6,357 10^6 m
R_e = 6378 km = 6,378 10^6 m
gs = 9,832 m/s2
g_e = ?

Az Egyenlítőn nyugvó testre eredő erő hat, ami biztosítja a körpályán tartáshoz szükséges centripetális erőt. A függőlegesen lefelé mutató gravitációs erőn kívül a test súlyának ellenereje, vagyis a tartóerő hat a testre:

$$\gamma\frac{mM}{R_e^2} - mg_e = mR\omega^2.$$

Ebből az egyenletből az egyenlítői nehézségi gyorsulás meghatározható:

$$g_e = \gamma\frac{M}{R_e^2} - R\omega^2 = 9{,}7998 \text{ m/s}^2 - 0{,}0339 \text{ m/s}^2 = 9{,}7659 \text{ m/s}^2.$$

A nehézségi gyorsulás értéke az Egyenlítőn 9,7659 m/s².

Megjegyzés: Ellenőrizzük a sarkokon mérhető nehézségi gyorsulás értékét (itt nincs centripetális gyorsulás, mert a sugár nulla):

$$g_s = \gamma\frac{M}{R_s^2} = 9{,}8647 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

ami nem egyezik a feladatban szereplő 9,832 m/s² értékkel. Ennek oka az, hogy a Newton-féle gravitációs törvényt vagy tömegpontokra vagy gömbszimmetrikus tömegeloszlású testekre alkalmazhatjuk csak pontosan. A Föld viszont kissé lapult, nem tökéletesen gömbszimmetrikus a tömegeloszlása. A sarkokon a gravitációs erő a számítottnál valamivel kisebb, ezért a sarkokon a nehézségi gyorsulás „csak" 9,832 m/s². Az Egyenlítő mentén a gravitációs erőből származó nehézségi gyorsulás a számítottnál valamivel több (9,815 m/s²), azonban a forgásból származó járulék megegyezik a számítottal: 0,034 m/s².

Tehát az Egyenlítő mentén a nehézségi gyorsulás így írható fel:

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$$g_e = g_{grav.} - R\omega^2 = (9{,}815\ m/s^2) - (0{,}034\ m/s^2) = 9{,}781\ m/s^2.$$

Megállapíthatjuk, hogy a nehézségi gyorsulás a sarkokon valamivel nagyobb, az Egyenlítőn kisebb, a két érték különbsége: 0,051 m/s² = 5,1 cm/s², ami azt jelenti, hogy a különbség nagyjából a nehézségi gyorsulás értékének fél százaléka. A különbség 2/3 része (3,4 cm/s²) a Föld forgásából származik, míg 1/3 része (1,7 cm/s²) a Föld lapultságának, úgynevezett geoid alakjának a következménye.

Amikor a nehézségi gyorsulás értékét 10 m/s²-re kerekítjük, akkor nagyjából 2%-kal nagyobb értékkel számolunk, mintha 9,81 m/s²-tel kalkulálnánk. Érdemes mindig a 9,81 m/s² értéket használni (mindössze 2-3 ezrelékes hibát eredményezhet), ha a jelenségek különböző földfelszíni pontokon játszódnak le.

M.2.228.
Adatok:
h = 200 km = 2 10^5 m
R = 6380 km = 6,38 10^6 m
M = 6 10^{24} kg

a. T = ?
b. n = ?

a. Az űrhajót a Föld és az űrhajó között fellépő gravitációs vonzóerő tarja körpályán.

$$F_{cp} = F_g,$$

$$m\frac{v^2}{R+h} = \gamma\ \frac{mM}{(R+h)^2}.$$

Ebből az űrhajó sebessége:

$$v = \sqrt{\gamma\frac{M}{R+h}},$$

$$v = 7{,}8\ km/s.$$

Az űrhajó sebessége 7,8 km/s, melyet majdnem első kozmikus sebességnek nevezünk.
Mivel

$$v = 2(R+h)\pi/T,$$

így T = 5300 s = 88 perc.

Az űrhajó 88 perc alatt kerülte meg a Földet.

Megjegyzés: Elvileg a Föld felszínén a szabad körberepüléshez 7,9 km/s sebesség szükséges, és ez az első kozmikus sebesség elfogadott értéke. Azonban a légellenállás miatt ez nem valósítható meg. A legalacsonyabb végrehajtható szabad körberepülés magassága nagyjából 200 km, amihez valóban 7,8 km/s sebességre van szükség.

b. A keringési idő 88 perc, míg a repülés ideje 108 perc. A kettő összevetéséből látszik, hogy egyszer kerülte meg a Földet a Vosztok-1. A különbség a pályára állás és a leszállás idejéből adódott.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$$\frac{v^2}{r}\frac{Mm}{r^2}\frac{M}{R^2}$$

M.2.229.
Adatok:
R= 6370km= 6,37 ·10^6 m
g= 9,81 $\frac{m}{s^2}$
M= ?

A Föld felszínén lévő „m” tömegű testre ható nehézségi erő egyenlő a gravitációs erővel.

$$mg= \gamma \frac{m^M}{R^2}$$

amelyből

$$M= \frac{g\,R^2}{\gamma}.$$

A Föld tömege:

$$M= 5{,}97 * 10^{24}\ \text{kg}.$$

Átlagos sűrűsége:

$$\rho = \frac{M}{V}= \frac{M}{\frac{4}{3}R^3\pi}= 5500\ \frac{kg}{m^3}.$$

A Föld tömege 5,96 * 10^{24} kg, átlagos sűrűsége 5500 $\frac{kg}{m^3}$.

M.2.230
Adatok:
M_v= 0,815 m_F
R_V
0,
94
9
R_F
g_v= ?

A Föld felszínén a gravitációs gyorsulás értéke:

$$g_F= \gamma \frac{M_F}{R_F^2}$$

A Vénusz felszínén a gravitációs gyorsulás értéke:

$$g_V= \gamma \frac{0{,}815\,M_F}{(0{,}949^2)R_F^2}= 0{,}905\ \gamma \frac{M_F}{R_F^2}= 0{,}905\ g_F \approx 8{,}88\ \text{m/s}^2.$$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

A Vénusz felszínén a gravitációs gyorsulás értéke a Földinek körülbelül 0,9-szerese, vagyis 8,88 $\frac{m}{s^2}$.

M.2.231.

I. megoldás

Adatok:

R= 150 millió km= $1{,}5 \cdot 10^8$ km

T= 1 év= $3{,}1536 \cdot 10^7$s

v= ?

A körmozgásra vonatkozó kinematikai összefüggéseket írjuk fel:

v= 2Rπ/T$\frac{2R\pi}{T}$ = 29,88$\frac{km}{s}$ ≈ 30 km/s.

A Föld pályamenti sebessége: 30 $\frac{km}{s}$.

II. megoldás

Adatok:

R = $1{,}5 \cdot 10^{11}$ m

M= $1{,}98 \cdot 10^{30}$ kg

v= ?

A körmozgásra vonatkozó dinamikai összefüggéseket írjuk fel:

$$m\frac{v^2}{R} = \gamma \frac{m*M}{R^2}$$

amelyből

$$v = \sqrt{\gamma \frac{M}{R}}.$$

$$v = \sqrt{6{,}67 * 10^{-11} * \frac{1{,}98 * 10^{30}}{1{,}5 * 10^{11}}} = 29{,}67\frac{km}{s} \approx 30 \text{ km/s}.$$

A Föld pályamenti sebessége: 30 km/s.

Megjegyzés: A Föld kis excentricitású ellipszis pályán mozog a Nap körül, és Kepler második törvényének megfelelően keringése közben pályamenti sebessége kismértékben, ámde periodikusan változik (a periódus 1 év).

M.2.232.

Adatok:

M= $6 \cdot 10^{24}$ kg

R= 6370 km= $6{,}37 \cdot 10^6$ m

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

T= 96 min 10 s=
5770s

a, v= ?

w= ?

b, h= ?

a, Az űrhajó szögsebessége az $w= \frac{2\pi}{T}$ összefüggéssel határozható meg.

$w= 1{,}089 \cdot 10^{-3} \frac{1}{s}$

Az űrhajó szögsebessége $1{,}09 \cdot 10^{-3} \frac{1}{s}$

b, A műhold és a Föld között fellépő gravitációs vonzóerő adja a műholdra ható eredő erőt, a centripetális erőt.

$m \frac{v^2}{R+h} = \gamma \frac{m M}{(R+h)^2}$ (1)

A körpályán keringő műhold kerületi sebességére fennáll:

$v= \sqrt{\gamma \frac{M}{R+h}}$. (2)

(1) és (2) – ből : h = 592 km

$v= 7{,}58 \frac{km}{s} \approx 7{,}6$ km/s.

A Sztyupik-1 mesterséges műhold 600 km magasságban 7,6 $\frac{km}{s}$ sebességgel keringett a Föld körül.

Megjegyzés:

1. A Szputnyik-1 elnyújtott ellipszispályán keringett a Föld körül. Számításunkban feltettük, hogy a műhold körpályán mozgott. Átlagos szögsebessége 10^{-3} 1/s volt, ha ugyanekkora keringési idővel körpályán mozgott volna, akkor majdnem 600 km lett volna a pályamagassága, a világ első műholdjának pályamenti átlagsebessége 7,6 km/s körül lehetett.

2. Mivel a Szputnyik-1 pályamagassága az ellipszispályán 215 km és 939 km között változott, ezért sem a szögsebesség, sem a pályamagasság, sem pedig a kerületi sebesség 3-4 értékes jegy pontossággal megadott értékeinek nincs értelme fizikailag.

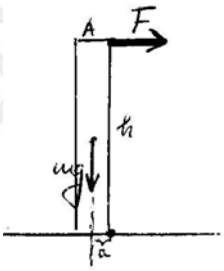
A forgatónyomaték, a merev testre ható erőrendszerek (gyakorló feladatok)

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.2.233.
Adatok:
A= 0,16 m^2
h= 1,2 m
ρ= 2500 $\frac{kg}{m^3}$
F= ?

A hasáb tömege: m= ρV= 480 kg
A hasáb alapélének hossza az A= a^2összefüggésből:
a= 0,4 m



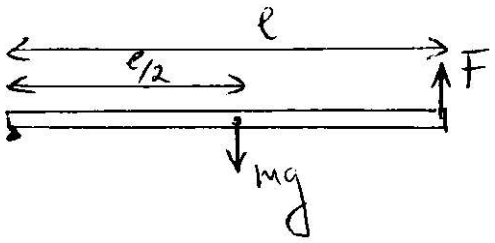
Az alsó oldalélre felírva a forgatónyomatékok egyenlőségét:
F* h= mg $\frac{a}{2}$
ahonnan F= 800 N.

A hasáb feldöntéséhez legalább 800 N erővel kell húzni a kötelet.

M.2.234.
Adatok:
F=
400
N
m= ?

Legyen a gerenda hossza: l. A gerenda tömegközpontja a talajon lévő végétől való távolsága: $\frac{l}{2}$.

A talajon lévő végére írjuk fel a forgatónyomatékok egyenlőségét.
Fl = mg $\frac{l}{2}$
amelyből m= 80 kg.



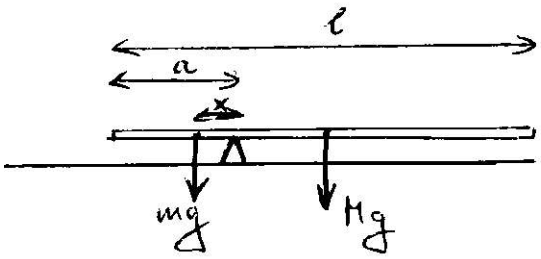
A tetőgerenda tömege 80 kg.

M.2.235.
Adatok:
l= 2,5m
M= 20 kg
a= 0,6 m
x=
0,25
m
m= ?

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Az ékre írjuk fel a forgatónyomatékok egyenlőségét!



$mg\,x = Mg\left(\frac{l}{2} - a\right)$,

ahonnan m= 52 kg.

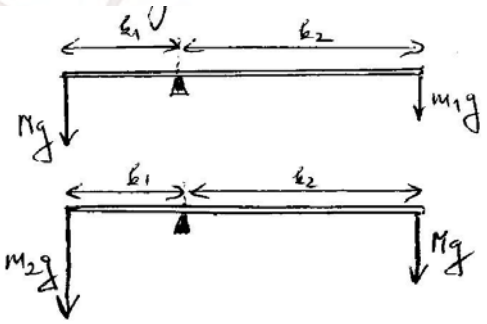
A segédmunkás 52 kg tömegű.

M.2.236.

Legyen a test tényleges tömege „M”. Az alátámasztásra felírva a forgatónyomatékok egyenlőségét:

$Mgk_1 = m_1gk_2$ (1)

$m_2gk_1 = Mgk_2$ (2)



(1) - ből: $\frac{k_1}{k_2} = \frac{m_1}{M}$

(2) – ből: $\frac{k_1}{k_2} = \frac{M}{m_2}$

Az (1) és (2) – ből kapjuk:

$M = \sqrt{m_1 m_2}$

A test tényleges tömege: $\sqrt{m_1 m_2}$, a két mért érték mértani közepe.

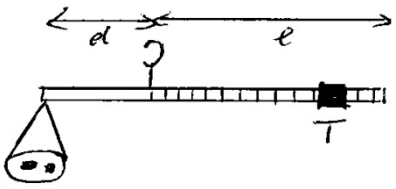
M.2.237.

d = 0,5 m

l = 0,45 m

m = 15 kg

M = ?



Maximális tömegű áru esetén a T tolósúly a skála végén helyezkedik el. A mérendő áru és a T tolósúly forgatónyomatékának egyenlőségét írjuk fel.

$m \cdot g \cdot d = M \cdot g \cdot l_1$

ahonnan

$m \cdot \frac{d}{l_1} = M$

M =1,67 kg.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

A tolósúlyt 1,67 kg tömegűre kell választanunk.

M.2.238.
Adatok:
r = 0,18 m
M = 220 Nm
F = ?

A személygépkocsi kormánykerekére erőpár hat, így a fellépő erő az M = Fd összefüggésből számítható ki.

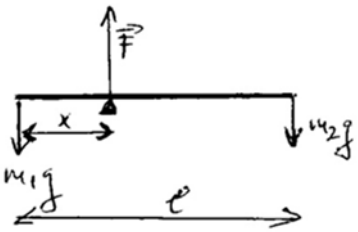
F= 1 222 N.

Mindkét kezünkkel a kormánykerékre 1 222 N erőt kell kifejtenünk érintőleges irányban.

Merev testek egyensúlya (gyakorló feladatok)

M.2.239.
l = 0,3 m
m_1 = 1 kg
m_2 = 0,6 kg
x = ?

A rúd végeire ható erőket az alátámasztási pontban ható erő egyensúlyozza ki.



$$m_1 \cdot g + m_2 \cdot g = F \cdot \quad (1)$$

Az alátámasztási pontra is fennáll a forgatónyomatékok egyenlősége:

$$m_1 \cdot g \cdot x = m_2 \cdot g \cdot (l-x) \quad (2)$$

Az (1) és (2) egyenletből

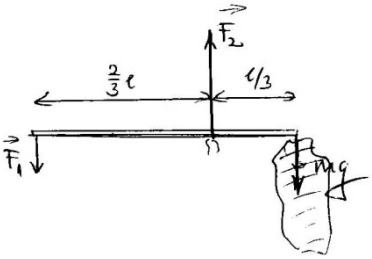
$$x = 0{,}1125 \text{ m} \approx 11 \text{ cm}.$$

A fogas akasztóját az 1 kg tömegű kabáttól 0,1125 m-re (≈ 11 cm-re) kell elhelyezni.

M.2.240.
Adatok:
m
=
6
kg

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

F_1= ?
F_2= ?



A vállal érintkező pontra írjuk fel a forgatónyomatékok egyenlőségét!

$$F_1 \cdot \frac{2}{3}l = mg \cdot \frac{l}{3}$$

$$F_1 = \frac{mg}{2} = 30 \text{ N}$$

A botra ható erők eredője nulla:

$$0 = F_2 - F_1 - mg$$

amelyből

$$F_2 = 90 \text{ N}.$$

A vándor vállát 90 N erővel nyomja a bot.

M.2.241.
Adatok:
k_1= 59m
k_2= 15,1m
k_3 = 2,5 m
M_2= 6t= 6 10^3 kg

M_1= ?

a, A toronydaru tartóoszlopára írjuk fel a forgatónyomatékok egyenlőségét!

$M_1k_1 = M_2gk_2$

ahonnan m_1= 1540 kg

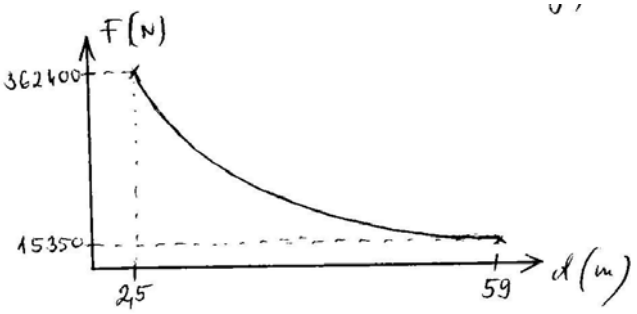
A toronydaru a futósín szélső helyzetében 1540 kg terhet emelhet fel.

b, A tartóoszloptól x távolság esetén az egyensúly maximális terhelésnél:

$$M_2g\,k_2 = M_1g\,x$$

$$\frac{M_2 \cdot k_2}{x} = M_1$$

vagyis: $M_1 = 90600 \cdot \frac{1}{x}$ (kg), $F = 906\,000 \cdot \frac{1}{x}$ (N).



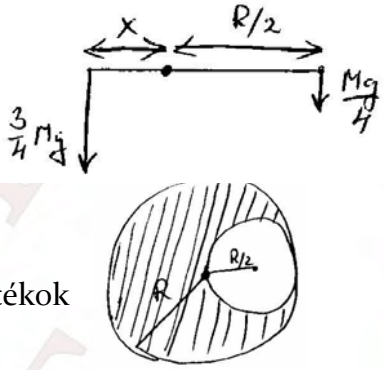
KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

A k_3= 2,5 m esetén: M_1= 36 240 kg, F_1= 362 400 N.

M.2.242.

Az eredeti lemez tömegközéppontja a kör középpontjában, míg a kivágott körlap tömegközéppontja a kivágott kör középpontjában található. A két tömegközéppont távolság: $\frac{R}{2}$.



Ha az eredeti körlap tömege M, akkor a kivágotté $\frac{M}{4}$.

A megmaradt rész tömege $\frac{3}{4}$ M. Tömegközéppontja a másik két tömegközéppontot összekötő egyenesen helyezkedik el.

Az eredeti test TKP-jára felírva a forgatónyomatékok egyenlőségét:

$$\frac{3}{4}Mg \cdot x = \frac{1}{4}Mg\,\frac{R}{2}$$

ahonnan

$$X = \frac{R}{6}.$$

A megmaradt rész tömegközéppontja az eredeti körlap középpontjától $\frac{R}{6}$ távolságra, az eredeti és a kivágott körlap tömegközéppontján átmenő egyenesen fekszik.

M.2.243.

Adatok:

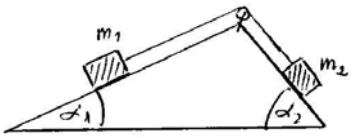
$\alpha = 30°$

$\beta = 45°$

$m_1 = 1$ kg

$\mu = 0{,}2$

$m_2 = ?$



A rendszer akkor van egyensúlyban, ha a tömegek állnak vagy ha egyenletesen mozognak. Rajzoljuk be az ábrába a testekre ható erőket, ha a rendszer balra, illetve jobbra indul el.

***a**, A testek balra indulnak el vagy még éppen állnak:*

A súrlódási erők:

$$F_{s1} = \mu \cdot m_1 g \cdot \cos\alpha$$

$$F_{s2} = \mu \cdot m_2 g \cdot \cos\beta$$

Az erőegyensúlyt kifejező egyenletek a lejtőkkel párhuzamos összetevői egyensúly esetén:

$$o \leq m_1 g \cdot \sin\alpha - K - F_{s1}$$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

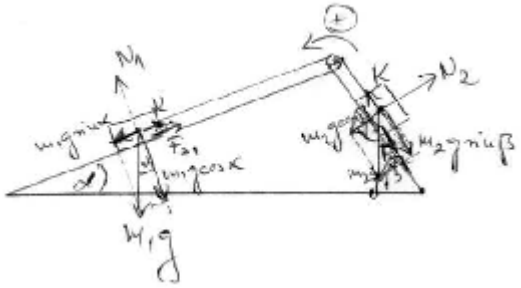
$o \leq K - F_{s2} - m_2 g \cdot sin\beta$

Az egyenletrendszer megoldva:

$$\frac{m_2}{m_1} \leq \frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\mu\cos\beta + \sin\beta},$$

ahonnan

$m_2 \leq 0{,}27$ kg.



b, *A testek jobbra indulnak el vagy állnak:*

Az erőegyensúlyt kifejező egyenletek a lejtőkkel párhuzamos összetevői egyensúly esetén:

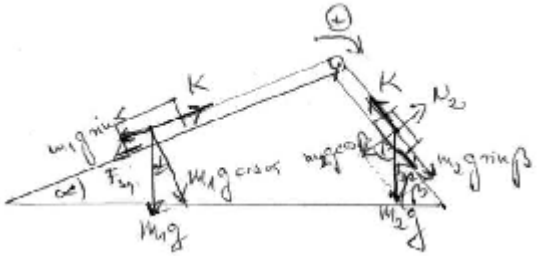
$$0 \leq m_2 g \sin\beta - K - F_{s2}$$
$$0 \leq K - F_{s1} - m_1 g \sin\alpha.$$

A egyenletrendszer megoldva:

$$\frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\sin\beta + \mu\cos\beta} \leq \frac{m_2}{m_1},$$

ahonnan

$1{,}19$ kg $\leq m_2$.



Összegezve:

A testek balra indulnak vagy éppen állnak, ha $m_2 \leq 0{,}27$ kg, jobbra indulnak vagy éppen állnak, ha $1{,}19$ kg $\leq m_2$.

M.2.244.

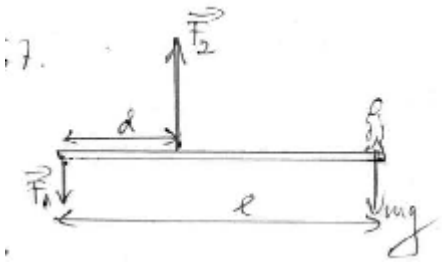
l=4m

d=1,2 m

m = 55 kg

F_1 = ?

F_2 = ?



A rúd egyensúlyának feltételei:

$$F_1 + mg = F_2$$
$$F_1 d = mg(l-d).$$

Az egyenletrendszerből levezethető

$F_1 = 1280$ N,

$F_2 = 1830$ N.

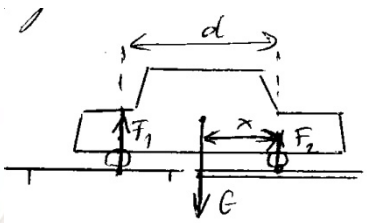
A deszka rögzítési pontjaiban 1280 N és 1830 N erők hatnak.

M.2.245.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

d=2,8 m
F_1 = 8 000 N
F_2 = 10 000 N
a. x=?
b. G=?



a. Hátsó kerékre írjuk fel a forgatónyomatékot!

$$F_1 d = Gx \qquad (1)$$

Első kerékre

$$F_2 d = G(d-x) \qquad (2)$$

Az (1) és (2) egyenletből

$$x = 1{,}24 \text{ m}.$$

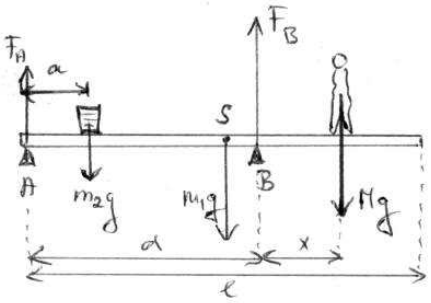
A hátsó keréktől 1,24 m-re van a súlypont.

b. A gépkocsi súlya: $G = F_1 + F_2$.

$$G = 18\,000 \text{ N}.$$

A gépkocsi súlya 18 000 N.

M.2.246.
l = 6m
M = 60 kg
m_1 = 25 kg
m_2 = 15 kg
d = 3,5 m
a = 1 m
x=?



A B alátámasztási pontra írjuk fel a forgatónyomatékok egyenlőségét!

$$m_1 g\,(d-l/2) + m_2 g\,(d-a) = Mgx,$$

ahonnan

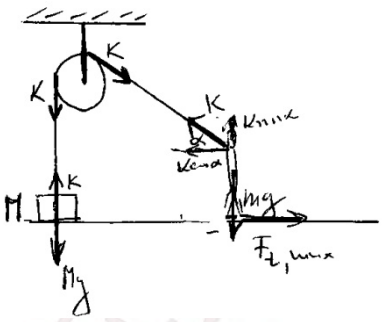
$$x = 0{,}83 \text{ m}.$$

A kőműves legfeljebb 83 cm-re állhat B alátámasztási ponttól jobbra.

M.2.247.
m = 75 kg
$\alpha = 45°$
μ_0= 0,35
M =?

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

A kötélerőt függőleges és vízszintes összetevőkre bontjuk fel. A függőleges összetevő a felületre merőleges nyomóerőt csökkenti.
A függőleges és vízszintes irányú erők egyensúlyát kifejezőegyenletek:



$$0 = F_{ny} - mg - K\sin\alpha$$
$$0 = K\cos\alpha - F_{t,max}$$

A súrlódási erő:

$$F_{t,max} = \mu_0 F_{ny} = \mu_0 (mg - K\sin\alpha).$$

A K kötélerő:

$$K =$$

ahonnan

$$K = 275 \text{ N}.$$

Az ember 27,5 kg tömegű terhet képes ilyen módon felemelni.

Merev testek forgómozgása (gyakorló feladatok) KIEG

M.2.248.
Adatok:
m = 1,8 kg
r = 0,3 m
N = 0,8 kgm²/s

a. Θ = ?
b. w = ?

a. Pontszerű testre a tehetetlenségi nyomaték $\Theta = mr^2 = 0{,}162$ kgm².
A pontszerű test tehetetlenségi nyomatéka 0,162 kgm².

b. A szögsebességet az $N = \Theta w$ alapján határozhatjuk meg.
w = 4,94 1/s.
A test szögsebessége 4,94 1/s.

M.2.249.
Adatok:
m = 2,5 kg
N = 81 kgm²/s
r = 6 m

a. Θ = ?
b. v = ?

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

c. F_{cp} = ?

a. A tehetetlenségi nyomaték $\Theta = mr^2 = 90\ kgm^2$.

b. A szögsebességet az $N = \Theta w$, míg a kerületi sebességet a $v = wr$ összefüggésből kaphatjuk meg.

$$w = 0{,}9\ 1/s,$$
$$v = 5{,}4\ m/s.$$

A pontszerű test pályamenti, azaz tangenciális sebessége 5,4 m/s.

c. A centripetális erő a testre ható erők eredője

$$F_{cp} = mw^2r = 12{,}15\ N.$$

A testet 12,15 N erő tartja körpályán.

M.2.250.
Adatok:
M = 10 kg
r = 0,1 m
m = 40 kg

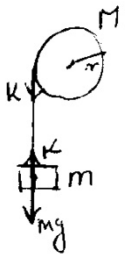


8. ábra

a. a = ?
b. β = ?

a. Írjuk fel a mozgásegyenleteket és a kényszerfeltételt!

$$ma = mg - K$$
$$Kr = \Theta\beta$$
$$a = r\beta$$



9. ábra

Az első mozgásegyenletből K kifejezve, majd a másodikba behelyettesítve

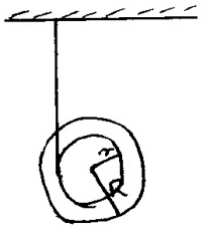
$$a = = 8{,}88\ m/s^2.$$

A meszes zsák gyorsulása 8,88 m/s^2.

b. A szöggyorsulás az $a = \beta r$ összefüggésből

$$\beta = 88{,}8\ 1/s^2.$$

A csiga szöggyorsulása 88,8 $1/s^2$.

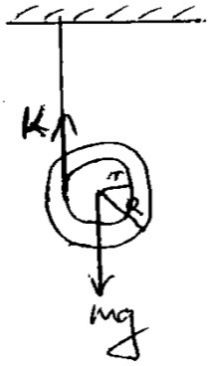


M.2.251.
Adatok:
s = 1 m
R = 0,05 m
r = 0,04 m

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

t = ?



Az jojóra a K kötélerő és az mg nehézségi erő hat. Az jojó lefelé egyenletesen gyorsuló mozgást és a tömegközéppontja körül forgómozgást végez. A két mozgás között fennáll a kényszerfeltétel.
A mozgásegyenletek

$$ma = mg - K$$
$$\Theta\beta = Kr$$
$$a = \beta r$$

A mozgásegyenletekből kapjuk, hogy

$$\beta = 140\ 1/s^2.$$

A gyorsulás

$$a = ßr = 5{,}6\ m/s^2.$$

A letekeredés ideje

$$t = 0{,}6\ s.$$

A cérna 0,6 s alatt tekeredik le a jojóról.

M.2.252.
Adatok:
M = 600 kg
r = 0,2 m
M = 1136 Nm
m = 5 500 kg

a. β = ?
b. a = ?

a. A portáldaru tehetetlenségi nyomatéka

$$\Theta = 1/2mr^2 = 12\ kgm^2.$$

Az emelőszerkezet eredő forgatónyomatékát a portáldaru villlanymotorjának M_1 és a teher M_2 fékezőnyomatákénak eredője adja: $M_e = M_1 - M_2$.
A M_2 fékezőnyomaték:

$$M_2 = m \cdot r = 1100\ Nm.$$

Az emelőszerkezet szöggyorsulása a $M_e=\Theta\beta$ összefüggésből

$$\beta = 3\ 1/s^2.$$

A csévélőhenger szöggyorsulása 3 $1/s^2$.

b. A teher gyorsulása

$$a = r\beta = 0{,}6\ m/s^2.$$

A teher gyorsulása 0,6 m/s^2.

M.2.253.
Adatok:

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

r = 0,3 m
m = 15 kg
$\beta = 0{,}8\ m/s^2$
<u>t = 8 s</u>

a. F = ?
b. w = ?
c. s = ?

a. A henger tehetetlenségi nyomatéka $\Theta = 1/2mr^2 = 0{,}675\ kgm^2$. A hengerre kifejtett F erő és a szöggyorsulás kapcsolatát az $M = \Theta\beta$ összefüggés adja meg.

$$Fr = \Theta\beta,$$

ahonnan

$$F = 1{,}8\ N.$$

A fonalat 1,8 N erővel kell húznunk.

b. A szögsebesség az $w = \beta t$ összefüggés alapján

$$w = 6{,}4\ 1/s.$$

A henger szögsebessége 8 s múlva 6,4 1/s.

c. A henger szöglefordulása

$$\alpha = \frac{\beta}{2}t^2 = 25{,}6\ (rad).$$

A lecsavarodott kötél hossza

$$s = \alpha r = 7{,}68\ m.$$

A lecsavarodott kötél hossza 7,68 m.

M.2.254.
Adatok:
r = 0,0575 m
r_t = 0,005 m
m = 0,1 kg
t = 2,5 s
<u>f = 8 000 1/s</u>

a. f = ?
b. F_s = ?

a. A korong szögsebessége a leállítás előtt

$$w = 2\pi f = 942\ \ 1/s.$$

A szöggyorsulás

$$\beta = \frac{\Delta w}{\Delta t} = 377\ \ 1/s^2.$$

A korong szöggyorsulása 377 $1/s^2$.

b. A forgórész tehetetlenségi nyomatéka $\Theta = 1{,}653\ 10^{-4}\ kgm^2$.
A súrlódási erő fékezőnyomatéka $M=F_s\ r$ állandó, így a korong egyenletesen lassuló mozgást végez. A forgómozgás alaptörvényét is felhasználva kapjuk

$$F_s\ r_t = \Theta\beta,$$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

ahonnan

$$F_s = 12{,}5 \text{ N}.$$

A fékezéskor fellépő súrlódási erő 12,5 N nagyságú.

M.2.255.
Adatok:
r = 0,36 m
t = 4 s
w = 30 1/s

a. β = ?
b. a = ?
c. α = ?

a. A szöggyorsulás $\beta = \frac{\Delta w}{\Delta t}$ összefüggésből meghatározható.

$$\beta = 7{,}5 \text{ 1/s}^2.$$

A kerék szöggyorsulása 7,5 1/s².

b. A kerék gördül a talajon, ezért a kerék szélső pontjának érintőleges (tangenciális) gyorsulása egyenlő a személygépkocsi gyorsulásával.

$$a_t = \beta r = 2{,}7 \text{ m/s}^2.$$

A személygépkocsi gyorsulása 2,7 m/s².

c. A szögelfordulást radiánban számítjuk ki az $\alpha = \beta/2\, t^2$ összefüggésből.

$$\alpha = 60 \text{ rad} = 3440°.$$

A gépkocsi kereke 3440°-al fordult el, a kerék 9,55 fordulatot tett meg.

M.2.256.
Adatok:
m = 0,3 kg
β = 0,6 1/s²
w = 0,9 1/s
r = 0,4 m

10

a. t = ?
b. a_t = ?
c. v_t = ?
d. w-t,v-t graf.

a. Az eltelt idő: t= w/β = 1,5 s. (A valóságban ennél sokkal rövidebb idő alatt forgatják meg a rulettkereket.)

b. Az érintő irányú gyorsulás:

$$a_t = \beta r = 0{,}24 \text{ m/s}^2.$$

c. A maximális sebesség:

$$v_{max} = a_t\, t = 0{,}36 \text{ m/s}.$$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

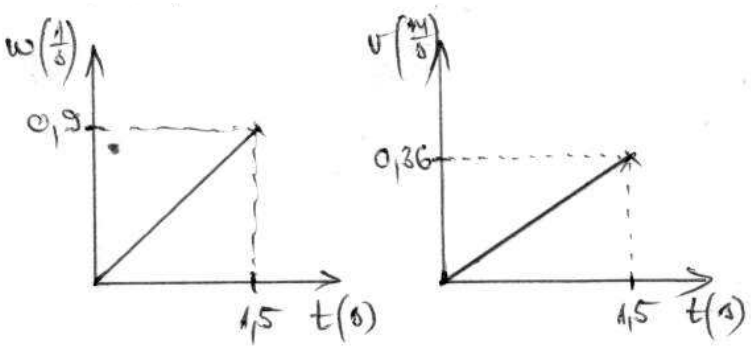
SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

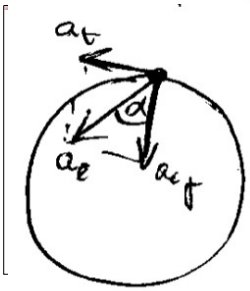
SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

d.



M.2.257.
Adatok:
$a = 0{,}3\ m/s^2$
$v = 0{,}5\ m/s$
$\alpha = 45°$

a.
b. $s = ?$
c. $r = ?$



11. ábra

a. Az egyenletesen gyorsuló körmozgást végző testnek a kör középpontja felé mutató a_{cp} centripetális gyorsuláson kívül a_t érintő irányú (tangenciális) gyorsulása is van.

$$a_{cp} = a \cdot \cos 60° = 0{,}15\ m/s^2.$$
$$a_t = a \cdot \sin 60° = 0{,}26\ m/s^2.$$

A szélső pont centripetális gyorsulása 0,15 m/s², míg a tangenciális gyorsulása 0,26 m/s².

b. A rulettkerék szélső pontja érintő irányban egyenletesen gyorsuló mozgást végez, ezért a megtett útra az $s = a/2\ t^2$ és a $v = at$ összefüggések érvényesek.

$$t = v/a_t = 1{,}92\ s.$$
$$s = a_t/2\ t^2 = 0{,}48\ m.$$

A szélső pont 1,92 s alatt, 0,48 m út megtétele után éri el az 0,5 m/s sebességet.

c. A pálya sugara a centripetális gyorsulásra vonatkozó $a_{cp} = v^2/r$ összefüggésből:

$$r = 0{,}55\ m.$$

A pálya sugara 0,55 m.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.2.258.
Adatok:
v= 63 km/h = 17,5 m/s
r = 0,3 m
a = 2,7 m/s²

a. s = ?
b. β = ?
c. M = ?
d. n= ?

a. A személygépkocsi egyenletesen lassuló mozgást végez.
A megállási eltelt idő

$$t = v/a = 6{,}48 \text{ s.}$$

A megállásig megtett út

$$s = a/2\ t^2 = 56{,}7 \text{ m.}$$

A Citroen 6,48 s alatt 56,71 m utat tesz meg.

b. A kerekek a talajon nem csúsznak meg, így egyenletesen lassulva forognak.
A kezdeti szögsebesség

$$w = v/r = 58{,}3 \text{ 1/s.}$$

A kerekek szöggyorsulása

$$\beta = \frac{\Delta w}{\Delta t} = \frac{0-58{,}3}{6{,}48} = -9 \text{ 1/s}^2.$$

A kerekek szöggyorsulása - 9 1/s².

c. A kerék kerülete által megtett út tiszta gördülés esetén megegyezik a gépkocsi által megtett úttal:

$$s = a/2\ t^2 = 56{,}7 \text{ m.}$$

A megtett fordulatok száma a megtett út és a kerék kerületének a hányadosa.

$$n = s/2r\pi = 30.$$

A kerék 30 fordulatot tesz meg a fékezés kezdetétől a megállásig.

M.2.259.
Adatok:
r = 0,075m
m =2 kg
a = 4 kg
f = 250 1/s

a. β = ?
b. t = ?
c. Θ = ?
d. M = ?

a. A szöggyorsulás
$\beta = a_t/r = 53{,}3$ 1/s².
A forgórész szöggyorsulása 53,3 1/s².

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

b. A 250 1/s fordulatszámnál a szögsebesség

$$w = 2\pi f = 1570\ 1/s.$$

A szögsebesség eléréséhez szükséges idő

$$t = w/\beta = 29{,}5\ s.$$

A 250 1/s fordulatszámot 29,5 s alatt éri el a forgórész.

c. A tehetetlenségi nyomatékot a henger tengelyén átmenő tengelyre számítjuk

$$\Theta = {}^{2} = 5{,}625\ 10^{-3}\ kgm^2.$$

A tehetetlenségi nyomaték $5{,}625\ 10^{-3}\ kgm^2$.

d. A forgórészre ható forgatónyomaték hozza létre a szöggyorsulást. A forgatónyomaték

$$M = \Theta\beta = 0{,}3\ Nm.$$

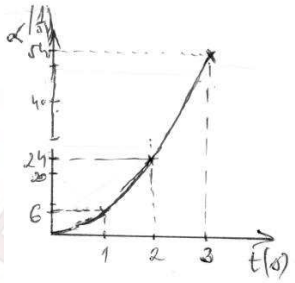
A forgórészre 0,3 Nm forgatónyomaték hat.

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.2.260.
Adatok:
m = 1,5 kg
r = 0,15 m

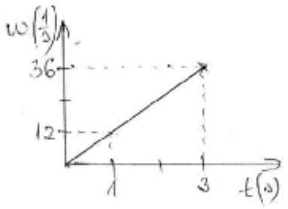
a.
b. w-t, β-t grafikon
c. v = ?

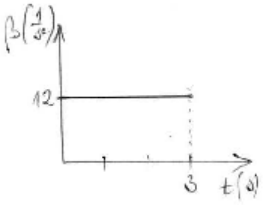


a. A féktárcsa egyenletesen gyorsuló mozgást végez, amit úgy igazolhatunk, hogy a szögsebességet ábrázoljuk az idő függvényében, és megvizsgáljuk, hogy az ábrázolt pontok egyenesen vannak-e.

b) A szöggyorsulást az $\alpha = \frac{\beta}{2}t^2$ összefüggésből számíthatjuk ki:

$$\beta = 12\ 1/s^2.$$





Ezek után a szögsebesség időfüggése: ω = βt, aminek a grafikonja egy origón átmenő, β meredekségű egyenes: t = 3 s esetén ω = 36 1/s.
A szöggyorsulás-idő grafikon állandó értéket β = 12 1/s² mutat.

c) Számítsuk ki az autó sebességét 3. másodperc végén, feltéve hogy rajta a szabványos, vagyis 660 mm átmérőjű „száraz" gumiabroncs van: A féktárcsa kerületi pontjának sebessége:

$$v = r\omega = 5{,}4\ m/s.$$

Mivel a gumiabroncs átmérője 660/300 = 2,2-szer nagyobb a féktárcsa átmérőjénél, így az autó sebessége a 3. másodperc végén:

$$v = 2{,}2 \cdot 5{,}4\ m/s = 11{,}9\ m/s \approx 43\ km/h.$$

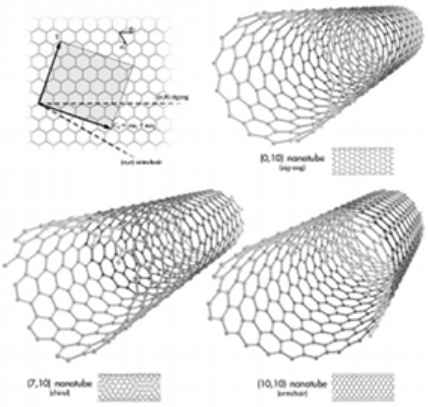
Láthatjuk, hogy a jármű gyorsul (a Forma-1 világában igencsak visszafogott gyorsulással), tehát nagy valószínűséggel a féktárcsa szélére semmilyen fékező erőt nem fejt ki a fékpofa.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

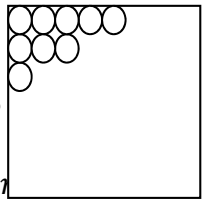
Szilárd testek rugalmas alakváltozásai

2.261.



Megoldás:

Adatok:



$\sigma_{sz} = 60\ GPa,$

$d = 1\ nm\ ,$

$d_{hajszál} = 100\ \mu m$

A szakítási szilárdság az anyag elszakadásakor fellépő húzási feszültség értéke, vagyis:

$$\sigma_{sz} = {F_{szakító}}/{A}.$$

Egy nanoszál elszakításához tehát:

$$F_{szakító} = \sigma_{sz} \cdot \frac{d^2\pi}{4} = 60 \cdot 10^9 Pa \cdot \frac{10^{-18} m^2 \pi}{4} = 4{,}71 \cdot 10^{-8} N$$

Ez az erő nagyságrendileg egy közepes méretű sejt súlyával egyenlő.

A $100\mu m$ átmérőjű hajszálkeresztmetszetének területe:

$$A_{hajszál} = \frac{d_{hajszál \cdot \pi}^2}{4} = \frac{10^4 \mu m^2 \cdot}{4} = 7850\ \mu m^2$$

Ezt a területet most képzeljük el egy négyzetként, aminek az oldala

$$a = \sqrt{A_{hajszál}} = 88{,}6 \mu m.$$

Egy ekkora oldalon $8{,}86 \cdot 10^4$ nanocsövet lehet elhelyezni, vagyis a teljes keresztmetszeten $N = (8{,}86 \cdot 10^4)^2 = 7{,}85 \cdot 10^9$.

Tehát egy hajszál vastagságú nanoszál elszakításához

$$N \cdot F_{szakító} = 7.85 \cdot 10^9 \cdot 4{,}71 \cdot 10^{-8} \sim 370N$$

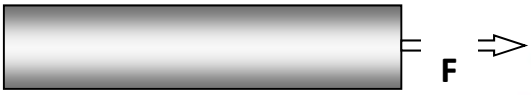
Vagyis két ilyen nanoszál elbír egy átlagos, 74 kg tömegű embert!

Megjegyzés: A szén nanocsövek gyakorlati hasznosítása azért késlekedik, mert csak meglehetősen rövid darabokat lehet egyelőre előállítani belőlük.

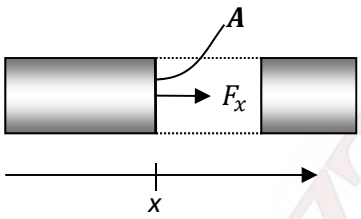
KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

2.262.



Számítsuk ki a feszültséget a rúd egy tetszőleges *x* helyén levő keresztmetszetén. Az ábrán jelölt *A* felületen akkora erőnek (F_x) kell hatni, amely a mögötte levő rúddarabot *a* gyorsulással gyorsítja.
A darab tömege: $m_x = \rho \cdot x \cdot A$, ahol ρ a rúd anyagának sűrűsége.



A gyorsító erő által keltett húzófeszültség tetszőleges *x* helyen tehát

$$\sigma_x = \frac{\rho \cdot x \cdot A \cdot a}{A} = \rho \cdot x \cdot a.$$

Tehát az állandó gyorsulással mozgó rúdban a gyorsulás irányában lineárisan növekvő húzófeszültség alakul ki.

Megjegyzés: Érdemes megvizsgálni, hogy alakul a feszültség a rúdban, ha toljuk egy állandó erővel!
Ugyanúgy lineáris feszültségeloszlás alakul ki. A rúd egyik végén a feszültség nulla, a másik végén F/A, vagyis az x tengely mentén a feszültség nagysága: $\sigma_x = \frac{Fx}{AL}$, ahol L a rúd hossza. Ugyanerre az eredményre juthatunk, ha a fenti képletbe behelyettesítjük az a = F/m összefüggést:

$$\sigma_x = \rho \cdot x \cdot a = \rho \cdot x \cdot \frac{F}{m} = \rho \cdot x \cdot \frac{F}{\rho AL} = \frac{Fx}{AL}.$$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

2.263.

Adatok:

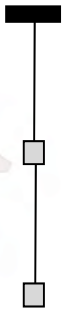
$l = 0{,}42\ m$

$A = 10^{-6}\ m^2$

$\underline{m = 5\ kg}$

a) Δl_1 = ?, Δl_2 = ?, Δl = ?

b) D = ?



a. A Függvénytáblázatból kikeresett érték: $E_{alu} = 70\ GPa$.

A felső huzalt mindkét test húzza, ezért megnyúlása: $\Delta l_1 = \frac{2 \cdot m \cdot g \cdot l}{E_{alu} \cdot A} = 6 \cdot 10^{-4}\ m$.

Az alsó huzalt csak egy tömeg terheli, ezért annak megnyúlása: $\Delta l_2 = 3 \cdot 10^{-4}\ m$.

$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = 9 \cdot 10^{-4}$ m.

A teljes megnyúlás tehát $9 \cdot 10^{-4}\ m$.

b. A helyettesítő rugó rugóállandója:

$$D = \frac{2 \cdot m \cdot g}{\Delta l_1 + \Delta l_a} = 1{,}1 \cdot 10^5\ \frac{N}{m}.$$

A huzalt $1{,}1 \cdot 10^5$ N/m rugóállandójú csavarrugóval lehetne helyettesíteni.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Dinamika alapjai

Tesztek

2.264. Egy test állandó gyorsulással mozog. Mit mondhatunk a testre ható erők erdőjéről?

a. A testre ható erők eredőjének nagysága változik, iránya állandó.
b. A testre ható erők eredőjének nagysága és iránya állandó.
c. A testre ható erők eredőjének nagysága állandó, iránya változik.
d. A testre ható erők eredőjének nagysága és iránya is változik.

(B, az állandó gyorsulás miatt a testre ható erők eredője is állandó, iránya megegyezik a gyorsulás irányával)

2.265. Egy test jobbra mozog, és balra gyorsul. Milyen irányba mutat a testre ható erők eredője?

a. Jobbra, a mozgás irányába.
b. Balra, a gyorsulás irányába.
c. Semerre, mert nagysága nulla.
d. Bármerre mutathat.

(B, a testre ható erők eredőjének iránya megegyezik a gyorsulás irányával)

2.266. Egy v sebességgel haladó golyó egyenes, tökéletesen rugalmas ütközéssel nekiütközik egy ugyanakkora tömegű álló golyónak. Mekkora lesz ütközés után a két golyó sebessége?

a. A v sebességgel haladó golyó ugyanakkora nagyságú v sebességgel visszapattan az álló golyóról.
b. A golyók együtt haladnak tovább, fele akkora sebességgel.
c. A golyók sebességet cserélnek.
d. Mindkét golyó mozogni fog, de ellentétes irányban.

(C, a lendület- és az energiamegmaradás törvénye miatt)

2.267. (E) A jégpályán egy ellökött jégkorong rövidebb-hosszabb úton megáll. A végsebessége nulla lesz. Minek adja át a lendületét?

a. A jégpályának és így az egész Földnek
b. Semminek
c. A jégkorongot ellökő testnek.
d. A lendülete ugyanannyi marad, mint kezdetben.

(A, a korongra ható súrlódási erő ellenereje a jégre hat, ennek erőlökése megegyezik a Föld lendületváltozásával, ami éppen a korong kezdeti

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

lendületével egyenlő)

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

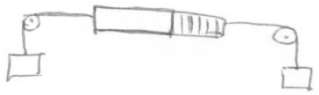
2.268. Egy Intercity szerelvényt a motorvonat állandó erővel húz. A szerelvény több kocsiból áll. A kocsik közötti kapcsok között mekkora erő lép fel?

a. Bármely két kocsi között ugyanakkora erő lép fel.
b. A motorvonat mögötti kapocsban lép fel a legnagyobb erő, a többiben a motorvonattól távolodva egyre kisebb erő lép fel.
c. A motorvonat mögötti kapocsban lép fel a legkisebb erő, a többiben a motorvonattól távolodva egyre nagyobb erő lép fel.
d. A kapcsokban állandó erő esetén nem lép fel erő.

(B, a kapcsokban ébredő erő a hátrább lévő kocsikat gyorsítja, illetve a fellépő légellenállási és gördülési ellenállási erőket egyenlíti ki; akár gyorsul a szerelvény, akár nem, minél hátrább vagyunk, annál kisebb összekötő erőre van szükség a kapcsokban)

2.269. Az ábra szerinti helyzetben egy rugós erőmérő mindkét végére 10 N - 10 N súlyú testet rögzítünk. Mekkora erőt mutat az erőmérő?

a. Az erőmérő 20 N nagyságú erőt mutat.
b. Az erőmérő 10 N nagyságú erőt mutat.
c. Az erőmérő 5 N nagyságú erőt mutat.
d. Az erőmérő nulla erőt mutat.



(B, Newton III. törvénye miatt, a fonalakban és a rugós erőmérőben mindenhol 10 N nagyságú feszítőerő ébred)

2.270. Két test tökéletesen rugalmatlanul ütközik egymással. Válasszuk ki a helyes állítást!

A) A testek különböző sebességgel haladnak tovább.
B) A testek összetapadnak, és közös sebességgel haladnak tovább.
C) A testek ilyen esetben mindig megállnak.
D) A testek ütközésére nem érvényes a lendület-megmaradás törvénye.
(B)

2.271. Egy 50 N/m és egy 100 N/m rugóállandójú, elhanyagolható tömegű rugós erőmérőt sorba kötünk. A nagyobbik rugóállandójú rugós erőmérő 15 N nagyságú erőt mutat. Mekkora erőt mutat a kisebbik rugóállandójú rugós erőmérő?

a. 15 N
b. 30 N
c. 7,5 N
d. 22,5 N

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

(A, a rendszerben mindenhol 15 N nagyságú feszítőerő lép fel)

2.272. (E) Ha egy D rugóállandójú rugóra m tömegű testet akasztunk, akkor a megnyúlása 3 cm lesz. Mekkora lesz a rendszer teljes megnyúlása, ha két azonos D rugóállandójú rugót sorbakötve akasztjuk rá az m tömegű testet?

a. 3 cm marad.
b. 1,5 cm
c. 6 cm
d. 4,5 cm

(C, mert mindkét rugóban azonos (mg) lesz a feszítőerő, vagyis mindkét rugó 3 cm-rel nyúlik meg; ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy az eredő rugóállandó a felére csökken)

2.273. Mekkora erővel nyomja a Föld körül keringő űrhajóban a széket a 75 kg tömegű űrhajós?

a. 750 N.
b. Kevesebb, mint 750 N,.
c. Több, mint 750 N.
d. 0 N.

(D, mert az űrhajóban súlytalanság van)

2.274. A Föld körül keringő űrhajóban rugós erőmérőre akasztott test tömegét szeretnénk meghatározni. Meg lehet-e ezzel a módszerrel mérni a tömeget? Miért?

a. Igen, mert ha gyorsítjuk a testet, közben megmérjük az elindulástól a távolságot és az időt. A kapott adatokból a gyorsulás, majd a tömeg meghatározható.
b. Nem, mert a testnek a Föld körül keringő űrhajóban nincs súlya.
c. Igen, mert a testre hat a Földön mért nehézségi erő.
d. Nem, mert a nehézségi gyorsulása nulla.

(A, mert gyorsítjuk a testet és a megtett távolságot és közben eltelt időt megmérjük. Ezt dinamikai tömegmérésnek nevezzük. Másik lehetőség, hogy rezgésbe hozzuk a testet és a rezgésidőt megmérjük. Ekkor egy vonalzó segítségével meg kell határoznunk a rugóállandót. Ebben az esetben a rezgésidő képletéből számítható ki a tömeg.)

2.275. A lift padlójára tett mérlegen egy 70 kg tömegű ember áll. A lift 5. emeletre érkezésekor a mérleg 780 N-t mutat. Milyen irányból érkezett a lift?

a. Az erő nagyságából nem lehet meghatározni az irányt.
b. Lentről érkezet a lift.
c. A felső emeletek felől érkezett a lift.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

(C, mert a súlynál nagyobb erő azt mutatja, hogy az ember felfelé gyorsult, ami a lefelé haladó liftben történik meg fékezéskor)

2.276. Egy asztallapra 0,3 kg tömegű könyvet helyezünk. Miért marad egyensúlyban az asztalra helyezett könyv?

a. A könyvre asztallap a nehézségi erővel ellentétes irányú erőt fejt ki.
b. A könyv nyugalomban van, így nem hat rá semmilyen erő.
c. A könyvre csak a nehézségi erő hat.
d. A könyvre csak az asztallap felfelé irányuló nyomóereje hat.

(A, mert az egyensúly feltétele az, hogy a testre ható erők eredője nulla legyen)

2.277. Lehet-e a súrlódási együttható 1-nél nagyobb érték?

a. Nem, csak kisebb lehet 1-nél az értéke.
b. Nem, mert a súrlódási erő sohasem lehet nagyobb. mint a testre ható nyomóerő.
c. Igen, ekkor az $F_s > F_{ny}$, vagyis könnyebb felemelni és vinni a testet, mint csúszva odébb tolni.
d. Igen, de a súrlódási erő nagysága és a talaj nyomóereje között nincs kapcsolat.

(C, semmi nem korlátozza a súrlódási együttható értékét, ami igen nagy lehet például akkor, ha az érintkező felületek között tépőzáras kapcsolat van)

2.278. Vízszintes úton egyenletesen gyorsuló mozgást végző teherautó platóján lévő láda a teherautóval együtt mozog. Milyen erő gyorsítja a ládát?

a. Semmilyen, hiszen a láda a platóhoz képest nyugalomban van.
b. A ládára ható nehézségi erő.
c. A láda és a platú között fellépő tapadási súrlódási erő.
d. A teherautó motorjának húzóereje.

(C, a láda ugyanakkora gyorsulással mozog, mint a teherautó, a láda vízszintes gyorsulását lényegében a tapadási súrlódási erő biztosítja, esetleg hat még a ládára a közegellenállási erő is)

2.279. Egy asztallapra m_1 és m_2 tömegű, súrlódásmentesen mozgó kiskocsit helyezünk és fonállal összekötjük őket. Az ábra szerint az m_2 tömegű kiskocsihoz egy fonállal egy m_3 tömegű testet kötünk, melyet csigán átvetve az asztal lapja mellett függőlegesen lelógatunk. Mekkora egymáshoz képest a két fonálban fellépő erő?

a. Minden esetben az m_1 és m_2 tömegű testek közötti fonálban lép fel kisebb erő.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

b. Minden esetben az m_2 és m_3 tömegű testek közötti fonálban lép fel kisebb erő.
c. A fonalakban fellépő erő a tömegektől függ, így az nem határozható meg.
d. A két fonálerő pontosan megegyezik.

(A, mert az m_2 és m_3 tömegű testek közötti fonálerő mindkét kiskocsit gyorsítja, míg az m_1 és m_2 tömegű testek közötti fonálerő csak az utolsó kiskocsit gyorsítja ugyanakkora gyorsulással)

2.280. Vízszintes síkban egyenletes körmozgást végez egy körhintán egy gyermek. Mit mondhatunk a gyermek gyorsulásáról.

a. Egyenletes körmozgás esetén a sebesség állandó, így gyorsulása nincs a gyermeknek.
b. Egyenletes körmozgás esetén a gyermekre ható erők eredője a kör középpontja felé mutat, így a gyermek a kör középpontja felé gyorsul.
c. Egyenletes körmozgás esetén a sebesség és a gyorsulás egyirányú, ezért a gyorsulás az érintő irányába mutat.
d. Egyenletes körmozgás esetén nincs gyorsulás.

(B)

2.281. Egy körhinta két egymás mellett lévő két ülésén egy-egy gyermek utazik. Mely állítás igaz rájuk menet közben?

A) A sebességvektoruk és gyorsulásvektoruk állandó.
B) A sebességük nagysága állandó és szögsebességük változik.
C) A sebesség nagysága állandó, de a gyorsulásuk nagysága változik.
D) A szögsebességük állandó és gyorsulásuk nagysága is állandó.

(D)

2.282. A tolltartómat függőleges síkban egy kezemben tartott rugós erőmérővel és hozzá kötött fonállal körbeforgatom. A mozgást úgy próbálom beállítani, hogy a legfelső pontban a rugóerő o N erőt mutasson. Eljuthat-e a körpálya legfelső pontjába a tolltartóm?

a. Nem juthat el a körpálya legfelső pontjáig a tolltartó.
b. A körpálya legfelső pontjába eljuthat a tolltartó, de ott a sebessége éppen nulla.

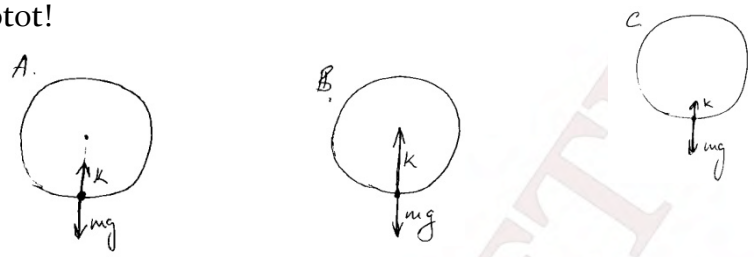
KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

c. A körpálya legfelső pontjába csak v ≠ 0 sebességgel juthat el a tolltartó.
d. Ezen adatok alapján nem dönthető el egyértelműen, hogy eljuthat-e a körpálya legfelső pontjába a tolltartó.

(C)

2.283. Függőleges síkban egy fonál végére akasztott test körmozgást végez. A mozgás legalsó pontjában a testre ható erőket berajzoltuk az alábbi ábrákba. Állapítsuk meg, hogy melyik ábra mutatja a helyes állapotot!



a. A
b. B
c. C
d. Egyik sem.

(B; A pálya legalsó pontjában a test érintőirányú gyorsulása nulla, sugárirányú gyorsulása – amit centripetális gyorsulásnak hívunk – a kör középpontja felé mutat. Ezért a K fonálerő nagyobb, mint az mg nehézségi erő.)

2.284. (E) Egy autó 36 km/h sebességgel halad. Mekkora a kerekén lévő szelep talajhoz viszonyított sebessége abban a pillanatban, amikor a szelep a pályájának legfelső pontján halad át?

a. 5 m/s
b. 10m/s
c. 0 m/s
d. 5 m/s és 10 m/s közötti érték
e. Megközelítőleg 20 m/s.

(E; A gépkocsi kerekének tengelye 36 km/h = 10 m/s sebességgel mozog. A tiszta gördülés miatt a gumiabroncs legalsó pontja áll, ami csak úgy lehetséges, hogy a kerék kerületi pontja ugyanekkora kerületi sebességgel végez egyenletes körmozgást a kerék középpontja körül. Így a gumiabroncs legmagasabb pontja a szuperpozíció szerint 20 m/s pillanatnyi sebességgel mozog előre. Mivel a szelep meglehetősen közel van a gumiabroncs futófelületéhez, így amikor a szelep pályájának legfelső pontjában van, akkor majdnem 20 m/s vízszintes pillanatnyi sebességgel mozog előrefelé.)

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

2.285.A tudományos felfedezések során a tudósok egymás eredményeire építve fedezik fel az addig ismeretlen összefüggéseket. Milyen sorrendben követték egymást Tycho de Brache csillagászati felfedezései (a), Kepler-törvényei (b) és Newton gravitációs törvénye (c)?

a. a-b-c
b. a-c-b
c. b-c-a
d. c-a-b

(A)

2.286. Két fiú egy nehéz táskát cipel. Egyikük a táska egyik, míg a társa a táska másik fülét fogja. Hogyan vigyék a táskát, hogy lehető legkönnyebb legyen számukra?

a. A két fiú által kifejtett erő nagysága független az erők hatásvonalától és a táskán lévő fülek elhelyezkedésétől.
b. A fiúk által kifejtett erők hatásvonala minél kisebb szöget zárjon be a függőlegessel.
c. A két fiú által kifejtett erő hatásvonala minél kisebb szöget zárjon be a vízszintessel.
d. A táska fülei által bezárt szög 45°-ot zárjon be a függőlegessel.

(B)

2.287. Egy merev test egyensúlyban van. Merev test esetén mikor *nem* valósulhat meg az egyensúly?

a. A merev test tömegközéppontja egyenletesen mozog (v = állandó), de a test a tömegközéppontján átmenő tengely körül nem forog (ω = 0).
b. A merev test tömegközéppontja egyenletesen mozog (v = állandó), és a test állandó szögsebességgel forog a tömegközéppontja körül (ω = állandó).
c. A merev test tömegközéppontja nyugalomban van (v = 0), és a test állandó szögsebességgel forog a tömegközéppontján átmenő tengely körül (ω = állandó).
d. A test a tömegközéppontján átmenő tengely körül nem forog (ω = 0).

(D)

2.288. Mi tartja a Földet Nap körüli pályán?

a. A Föld Nap körüli pályán kering külső erőhatás nélkül.
b. A Földet Nap körüli pályán a gravitációs vonzóerő tartja.
c. A Földre Nap körüli pályán csak a centripetális erő hat.

(B)

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

2.289. Egy rögzített tengely körül forgó merev testre erőpár hat. Mit mondhatunk a merev testre ható erőpár forgatónyomatékáról?

a. Az erőpár nem helyettesíthető egyetlen erővel, így forgatónyomatéka nem értelmezhető.
b. Az erőpár forgatónyomatéka függ a forgástengely helyzetétől.
c. Az erőpár forgatónyomatéka a merev testre ható F erő és a két erő hatásvonala közötti távolság a szorzata.
d. Az erőpár forgatónyomatékának értéke minden esetben nulla.

(C)

2.290. (E) Egy hosszú elvékonyodó homogén fémtárgyat támasztanak alá egy pontban úgy, hogy a fémtárgy vízszintes helyzetben, egyensúlyban legyen. Az alátámasztásnál a hosszára merőlegesen kettévágjuk a fémet. Mit mondhatunk az így létrejött két fémtárgy egymáshoz viszonyított tömegéről?

a. A két fémtárgy tömege egyenlő, hisz a tömegközéppontjában vágták el.
b. A vékonyabb rész tömege a nagyobb.
c. A vastagabb rész tömege a nagyobb.
d. A hosszabbik rész tömege a nagyobb.

(C)

2.291. Mikor van egy merev test egyensúlyban?

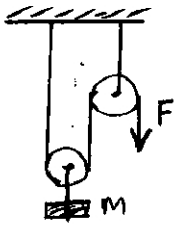
a. Ha a rá ható erők eredője nulla.
b. Ha csak erőpár hat rá.
c. Ha a ráható erők forgatónyomatékainak előjeles összege nulla.
d. Ha a ráható erők vektori összege és forgatónyomatékainak előjeles összege is nulla.

(D)

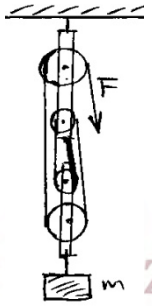
2.292. Egy állócsiga és egy mozgócsiga segítségével 500 N nagyságú terhet kívánunk felemelni. Mekkora erő szükséges ehhez?

a. 500 N
b. 250 N
c. 125 N
d. 67,5 N.

(B)



2.293. Az ábrán látható csigarendszerben két álló és két mozgócsiga van. Ezzel a csigasorral egy *m* tömegű terhet emelünk. Mennyivel könnyebb felemelni a terhet, mintha csigasor nélkül emelnénk?



KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

a. Ugyanakkora erővel lehet emelni, a csigarendszer semmit sem változtat.
b. Fele akkora erő elegendő az emeléshez.
c. Negyed akkora erő szükséges az emeléshez.
d. Nyolcad akkora erő szükséges az emeléshez.

(C)

2.294. Egy kerekes kút kerekén vízzel teli 250 N súlyú vödör lóg. Mekkora erővel tartható a vödör egyensúlyban, ha a henger sugara 0,15 m, a hengerkerék átmérője 1,2 m?

a. 62,5 N
b. 125 N
c. 1000 N
d. 31,25 N.

(A)

Esszékérdések Dinamika alapjai

2.295. Newton-törvények

Ismertesse a Newton-törvényeket! Példákkal mutassa be Newton I., II. és III. törvényét!
Mutassa meg, hogy az Arisztotelész (i.e. 384 – i.e. 322) által létrehozott világképhez képest a mozgások okának értelmezésében a newtoni mechanika miben hozott új értelmezést?
Arisztotelész úgy gondolta, hogy az élettelen tárgyak alapállapota a nyugalom, mozgásukhoz valamilyen külső hatásra van szükség. Mozgásuk kétféle lehet. A „kényszerített mozgást" más test okozza. Ekkor a test sebessége annál nagyobb, minél nagyobb a ráható „erő". A „természetes mozgásnál" a környezetüknél nehezebb testek lefelé esnek, és annál gyorsabban esik egy test, minél nehezebb.

2.296. Lendületmegmaradás törvénye

Ismertesse a rugalmas és rugalmatlan ütközés fogalmát! Definiálja a lendület-megmaradás törvényét! Általánosítsa zárt rendszerre!
Mutassa be a lendületmegmaradás törvényét a rugalmas és rugalmatlan ütközésre!
Adjon példát mindegyik esetre!

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

2.297. Súrlódás szerepe a mindennapi életünkben

Ismertesse a csúszási, tapadási és gördülési súrlódás fő jellemzőit, a rájuk vonatkozó összefüggéseket! Adjon egy-egy példát mindegyik esetre! Mutassa be az egyes súrlódási együtthatók egymáshoz való viszonyát! Adjon példákat az egyes súrlódási típusok hasznos és káros voltára a gyakorlatban! Milyen esetekben szükséges csökkenteni, illetve növelni a súrlódási erő nagyságát?

2.298. Körmozgás kinematikája és dinamikája

Ismertesse a periodikus mozgások legfontosabb jellemzőit!
Ismertesse a körmozgás kinematikai jellemzőit! Vezesse le a szögsebesség és a kerületi sebesség között fennálló összefüggést!
Ismertesse az egyenletes körmozgás esetén a centripetális gyorsulás jellemzőit és az egyenletes körmozgás dinamikai feltételét!

2.299. Merev testek egyensúlya, szerepük a mindennapjainkban

Mutassa be a merev testek egyensúlyához kapcsolódó fogalmakat: merev test fogalma, egyensúlya, nyugalom feltétele, merev test egyensúlyának feltétele.
Mutassa meg, hogy a párhuzamos hatásvonalú erők eredőjét milyen módon határozhatjuk meg! Definiálja az erőpár fogalmát!
Mutassa be az emelő típusú egyszerű gépeket: egyoldalú emelő, kétoldalú emelő, hengerkerék, állócsiga, mozgócsiga.

2.300. Világmodellek, a bolygók mozgása

Mutassa be Arisztotelész fizikai világképének legfontosabb elemeit! Fejtse ki Ptolemaiosz geocentrikus világképének főbb elemeit!
Mutassa be a heliocentrikus világképet! Miben hozott újat Kopernikusz és Galileo Galilei világfelfogása?
Ismertesse Kepler törvényeit! Írja fel a Kepler III. törvényére vonatkozó összefüggést! Ismertesse a Newton-féle gravitációs törvényt! Newton gravitációs törvénye mire adott új magyarázatot?
Milyen pályán mozoghatnak a mesterséges égitestek?

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

2.301. Egy rossz minőségű videofelvételen látható, hogy valamilyen „azonosíthatatlan" kisméretű test vízszintes talajon halad, és 16 m út megtétele után megáll. Az elindulástól a megállásig 4 másodperc telt el. Van-e kereke az „azonosíthatatlan" testnek?

M.

s = 16 m

t = 4 s

Az egyenletes lassulás során a gyorsulás abszolút értéke: $|a| = 2s/t^2 = 2\ m/s^2$.

Az azonosíthatatlan testet a súrlódási erő lassítja, így a mozgásegyenlet vízszintes irányban:

$$m|a| = \mu mg,$$

amelyből

$$\mu = 0{,}2.$$

A súrlódási együttható értéke 0,2, ami azt jelenti, hogy nincs kereke az azonosíthatatlan testnek, mert a gördülési súrlódási együttható értéke ennél rendszerint sokkal kisebb.

2.302.Arnold úgy akarja a jégpályán felgyorsítani az álló, vele együtt 31,2 kg össztömegű szánkóját, hogy a menetiránnyal ellentétesen elhajítja a szánkón elhelyezett hógolyókat. Melyik esetben ér el nagyobb sebességet a szánkó, ha:

a. egyszerre dob el két, egyenként 0,6 kg tömegű hógolyót a szánkóhoz viszonyított 10m/s sebességgel?

b. egymás után dobja el a két hógolyót a szánkóhoz viszonyítva mindig ugyanakkora 10 m/s sebességgel?

M. 2.114.

Adatok:

Δv= 10 m/s

M = 31,2 kg

m = 0,6 kg

a. u_1 = ?

b. u_1"=?

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

a. Ha a két golyót egyszerre dobja el, akkor a lendületmegmaradás törvényét így írhatjuk fel, ahol u_1 a szánkó sebessége az eldobás után, u_2 pedig a két eldobott hógolyó sebessége a talajhoz képest:

$$(M-2m)\,u_1 = 2mu_2$$

$$u_1 + u_2 = \Delta v,$$

amiből

$$u_1 = \frac{2m}{M}\Delta v = 5/13\ \mathrm{m/s} = 510/1326\ \mathrm{m/s}.$$

b. Ha a két golyót egymás után dobja el, akkor a szánkó első eldobás utáni sebessége legyen u_1', míg a második eldobás utáni sebessége u_1''.

Az első dobás utáni szánkósebességet az előzőekhez hasonlóan számíthatjuk ki:

$$(M-m)u_1' = m(\Delta v - u_1'),$$

$$u_1' = \frac{m}{M}\Delta v = u_1/2 = 5/26\ \mathrm{m/s}.$$

A második golyót a földhöz képest $\Delta v - u_1'$ sebességgel dobja ki Arnold:

$$(M-m)\,u_1' = (M-2m)u_1'' - m(\Delta v - u_1''),$$

ahonnan

$$u_1'' = \frac{m(2M-m)}{M(M-m)}\Delta v = 515/1326\ \mathrm{m/s}.$$

A két golyót egymás után kell kidobni a nagyobb sebesség eléréséhez. Ezt lényegében, úgy magyarázhatjuk, hogy a második golyónak is a szánkóhoz képesti sebessége a 10 m/s, és az első golyó kidobása után a szánkó már mozgott. A két eset között a különbség igen csekély, mindössze $u_1'' - u_1 = 5/1326$ m/s = 0,00377 m/s, ami gyakorlatilag elhanyagolható. A kiszámított különbségnek elvi jelentősége van csak. A feladat egyébként sem életszerű, mert ahhoz, hogy 1,2 kg tömeget mondjuk 1 méter úton 10 m/s sebességre egyenletesen felgyorsítsunk, 60 N erő és 0,2 s idő tartozik. Ha a szánkó tömege 5 kg, akkor Arnold mindössze 25 kg-os, akinek vasgyúrónak kell lennie, hogy a gyorsításhoz szükséges átlagosan 300 W-os, végállapotban 600 W-os teljesítményt az izmaival kifejtse, hiszen 600 W megfelel 0,8 lóerőnek (amekkora teljesítményre egy átlagos felnőtt is csak rövidebb ideig képes).

2.303. Egy 0,1 kg tömegű, tökéletesen rugalmas golyót 1,8 m magasságból ejtünk le. A talajjal tökéletesen rugalmasan ütközik, majd hosszabb ideig pattog. Mekkora átlagos erővel jellemezhetjük a golyó és a talaj közötti kölcsönhatást?

M.2.166.

m = 0,1 kg

h = 1,8 m

F = ?

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

A tökéletesen rugalmasan pattogó golyó periodikus mozgást végez. Akárhogyan is választjuk meg a periódus kezdőpillanatát, a kezdeti és a periódusvégi pillanatban a golyó ugyanúgy mozog, vagyis egy periódusra a teljes lendületváltozás nulla. Ez azt jelenti, hogy a golyóra ható átlagos eredő erő nulla kell, hogy legyen, hiszen $\Sigma F = \Delta I/\Delta t$. Mivel a golyóra állandóan hat az mg = 1 N lefelé mutató nehézségi erő, így a talajnak is átlagosan ugyanekkora, felfelé mutató erővel kell hatni a golyóra. A végeredmény nem függ attól, hogy milyen magasból engedtük el a golyót. A golyó és a talaj között 1 N átlagos erő lép fel.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

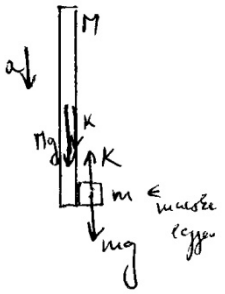
2.304. Egy m tömegű macska a padlásajtóban meglát egy egeret. A közelében egy fonállal felkötött, M tömegű függőleges rudat észlel, és hirtelen ráugrik. Ebben a pillanatban a fonál elszakad.

a. Milyen gyorsulással mozog a rúd, ha a macska úgy mászik rajta, hogy a padlótól mért távolsága nem változik?

b. Hogyan változik a végeredmény, ha a macska a talajhoz képest állandó a gyorsulással halad felfelé?

M.

a. A macskának a földtől mért távolsága nem változik, vagyis a földhöz viszonyítva nyugalomban van. Ekkor a rá ható erők eredője nulla. A macska a karmaival lefelé nyomja a rudat, ennek ellenereje (lényegében tapadási súrlódási erő) tartja meg a macskát.



A mozgásegyenletek:

$$0 = mg - K$$

$$Ma = Mg + K.$$

Innét a rúd gyorsulására ezt kapjuk:

$$a = \frac{M+m}{M} g.$$

A rúd $\frac{M+m}{M}$ g gyorsulással mozog lefelé.

KÉZIRAT

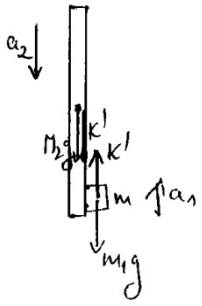
SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

b. A macska állandó a gyorsulással halad felfelé, így a mozgásegyenletek

$$ma_1 = K' - mg$$
$$Ma_2 = Mg + K'.$$

A mozgásegyenletekből levezethető

$$a_2 = \frac{(m+M)g+ma_1}{M}.$$

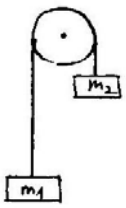


A rúd lefelé mutató gyorsulása: $\frac{(m+M)g+ma_1}{M}$.

Kihívást jelentő feladatok Dinamika alkalmazásai

2.305. Egy 0,2 m sugarú, 10 kg tömegű, súrlódásmentesen tengelyezett, tömör hengeren átvetett fonál végein 3 kg és 5 kg tömegű testek lógnak. A fonál nem csúszik meg a hengeren.

a. Mekkora az egyes testek gyorsulása?
b. Mekkora szöggyorsulással indul a henger?

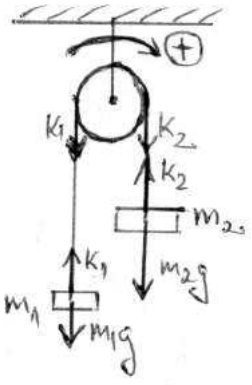


1. ábra

M.3.87.

Adatok:

$R = 0{,}2$ m
$M = 4$ kg
$m_1 = 3$ kg
$\underline{m_2 = 5 \text{ kg}}$
a. $a = ?$
b. $\beta = ?$



2. ábra

a. Kijelöljük a pozitív irányt. Ehhez képest írjuk fel a mozgásegyenleteket:

$$m_1 a = K_1 - m_1 g$$
$$m_2 a = m_2 g - K_2$$
$$\Theta\beta = (K_2 - K_1)R$$

Vegyük figyelembe az $a = R\beta$ kényszerfeltételt is, továbbá a tömör henger $\Theta = MR^2/2$ tehetetlenségi nyomatékát . A számítások elvégzése után a gyorsulás:

$$a = 2 \text{ m/s}^2.$$

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

A csigán függő testek 2 m/s^2 gyorsulással mozognak

b. A szöggyorsulást a $\beta = a/r$ összefüggésből számítjuk ki:

$$\beta = 10\ 1/s^2.$$

A henger 10 $1/s^2$ szöggyorsulással indul.

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT



A FELADATGYŰJTEMÉNY MEGOLDÁSAI

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

5-9. FEJEZETEK

OKTATÁSKUTATÓ ÉS FEJLESZTŐ INTÉZET, BUDAPEST

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Tartalom

NT-RE81540/2.RÉSZ

Az alábbi fejezetek megoldásai további kötetben találhatók.

1. **Kinematika – Mozgástan (dr. Fülöp Ferenc) 13**
2. **Dinamika – Erőtan (Csajági Sándor) 31**
3. **Munka, energia (Csajági Sándor, dr. Fülöp Ferenc).....69**
4. **Folyadékok és gázok mechanikája (Csajági Sándor, dr. Fülöp Ferenc) 87**

Ebben a kéziratban található megoldások oldalszáma (a feladatgyűjteményben)---a kéziratban

5. **Hőtani folyamatok (Póda László ..... (99).....3**
6. **Termodinamika (Póda László) .....(115).....48**
7. **Elektrosztatika (Urbán János).....(135).....136**
8. **Az elektromos áram (Urbán János).....(149)..... 163**
9. **Rezgések és hullámok (Simon Péter).....(161)..... 184**

Az alábbi fejezetek megoldásai további kötetben találhatók.

10. **Elektromágneses jelenségek (Dégen Csaba) 79**
11. **Optika (Simon Péter) 197**
12. **Atomfizika (Elblinger Ferenc) 217**
13. **Magfizika (Elblinger Ferenc) 233**
14. **Csillagászat (Dégen Csaba) 249**

Szerzők: CSAJÁGI SÁNDOR, DÉGEN CSABA, ELBLINGER FERENC, DR. FÜLÖP FERENC, PÓDA LÁSZLÓ, SIMON PÉTER, URBÁN JÁNOS

Alkotószerkesztő és lektor: DR. HONYEK GYULA

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

5. HŐTANI FOLYAMATOK

ALAPOZÓ FELADATOK

A HŐMÉRSÉKLET MÉRÉSE, HŐTÁGULÁS

M.5.1.

Megoldás:

Ikalmazzuk: T(K) = T(°C) + 273 !

a) 52 °C = (52+ 273) K = 325 K ; -134 °C = 139 K ; 245 °C = 518 K

b) 236 K = (236 - 273) °C = -37 °C; 318 K = 45 °C ; 185 K = -88 °C

M.5.2. Megoldás:

Alkalmazzuk: x °C = (1,8·x + 32) °F.

a) 30 °C = (30·1,8 + 32) = 86 °F ; -124 °C = -191,2 °F ; 325 °C = 617 °F

b) 160 °F = (160 – 32) :1,8 = 72,1 °C ; 72 °F = 22,2 °C ; -42 °F = -41.1 °C

M.5.3. Megoldás:

Alkalmazzuk: x °C = 0,8·x °R.

a) 15 °C = 15·0,8 = 12 °R ; (- 27 °C) = (-21,6 °R) ; 342 °C = 273,6 °R

b) 160 °R = 160 : 0,8 = 200 °C ; (-28) °R = (-35) °C

M.5.4. Megoldás:

Alkalmazzuk az átváltási egyenletet: x °C = (1,8·x + 32) °F.

Fejezzük ki x- et!

0,8x = (-32) ; x = (- 40) ; (-40 °C) = (-40 °F)

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.5.5. Megoldás:(100·1,8 + 32) = 212 °F

M.5.6. Megoldás:

a) x °C = (1,8·x + 32) °F 100,6 °F és 102,6 °F

b) x °C = 0,8·x °R 30,5 °R és 31,4 °R

M.5.7. Megoldás:

a) 30,4 °R = (30,4 : 0,8) = 38 °C -tól 39 °C-ig

b) (38 + 273) = 311 K-től 312K-ig

M.5.8. Megoldás:

a) 300,9 K = (300,9 – 273) = 27,9 °C

b) 300,9 K = 27,9 °C = 27,9 · 0,8 = 22,32 °R

c) 300,9 K = 27,9 °C = (27,9 ·1,8 + 32) = 82,22 °F

d)

M.5.9. Megoldás:

$l_0 = 75\ km = 75000\ m \quad \alpha = 2{,}4\cdot10^{-5}\ \frac{1}{^0C}$ $l_{38} = ?$ $l_{(-15)} = ?$

Alkalmazzuk az $\ell_T = \ell_0 (1 + \alpha \cdot \Delta T)$ összefüggést!

Nyáron: $l_{38} = 75000\cdot(1 + 2{,}4\cdot10^{-5}\ \frac{1}{^0C}\cdot 16\ ^oC) = 75028{,}8$ m hosszú a vezeték.

Télen: $l_{(-15)} = 75000\cdot(1 - 2{,}4\cdot10^{-5}\ \frac{1}{^0C}\cdot 53\ ^oC) = 74904{,}6$ m hosszú a vezeték.

M.5.10.* Megoldás:

$l_0 = 380\ m$; $\Delta T = 20\ ^oC$; $\alpha = 1{,}12\cdot10^{-5}\ \frac{1}{^0C}$

$\Delta l = ?$ Alkalmazzuk a $\Delta l = l_0\cdot\alpha\cdot\Delta T$ összefüggést!

$\Delta l = 380\ m\cdot1{,}12\cdot10^{-5}\ \frac{1}{^0C}\cdot 20\ ^oC = 0{,}085\ m = 8{,}5\ cm$ a híd hosszúságának változása.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.5.11. Megoldás:

$\Delta T = 30\ ^oC$; $\Delta l = 16{,}3$ cm

$l_o = ?$ Fejezzük ki az l_o –t a $\Delta l = l_o \cdot \alpha \cdot \Delta T$ képletből!

$$l_0 = \frac{\Delta l}{\alpha \cdot \Delta T} = \frac{16{,}3 \cdot 10^{-2}\, m}{1{,}1 \cdot 10^{-5}\, \frac{1}{^0C} \cdot 30\ ^0C} = 494 \text{ m hosszú a Rákóczi híd.}$$

M.5.12. Megoldás:

$l_o = 379$ m ; $\Delta T = 43\ ^oC$; $\Delta l = 18{,}4$ cm

$\alpha = ?$ Fejezzük ki az α–t a $\Delta l = l_o \cdot \alpha \cdot \Delta T$ képletből!

$$\alpha = \frac{\Delta l}{l_0 \cdot \Delta T} = \frac{18{,}4 \cdot 10^{-2}\, m}{379 m \cdot 43^0 C} = 1{,}13 \cdot 10^{-5}\, \frac{1}{^0C} \text{ a lineáris hőtágulási együttható.}$$

M.5.13. Megoldás:

$l_o = 334$ m ; $\Delta l = 13{,}1$ cm

$\Delta T = ?$ Fejezzük ki a ΔT –t a $\Delta l = l_o \cdot \alpha \cdot \Delta T$ képletből!

$$\Delta T = \frac{\Delta l}{\alpha \cdot l_0} = \frac{13{,}1 \cdot 10^{-2}\, m}{1{,}12 \cdot 10^{-5}\, \frac{1}{^0C} \cdot 334 m} = 35\ ^0C \text{ a hőmérséklet – változás.}$$

M.5.14 Megoldás:

$l_o = 320$ m ; $\Delta T = 85\ ^oC$; $\alpha = 1{,}17 \cdot 10^{-5}\, \frac{1}{^0C}$

$\Delta l = ?$ Alkalmazzuk a $\Delta l = l_o \cdot \alpha \cdot \Delta T$ összefüggést!

$\Delta l = 1{,}17 \cdot 10^{-5}\, \frac{1}{^0C} \cdot 320$ m $\cdot 85\ ^oC = 31{,}8$ cm – rel nőne a torony magassága.

M.5.15. Megoldás:

$l_o = 52$ cm ; $\Delta T = 16\ ^oC$; $\alpha = 1{,}89 \cdot 10^{-5}\, \frac{1}{^0C}$

$\Delta l = ?$ Alkalmazzuk a $\Delta l = l_o \cdot \alpha \cdot \Delta T$ összefüggést!

$\Delta l = 1{,}89 \cdot 10^{-5}\, \frac{1}{^0C} \cdot 52$ m $\cdot 16\ ^oC = 0{,}16$ mm – rel lett rövidebb a nyaklánc.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.5.16. Megoldás:

$\Delta T = 22\ ^oC$; $\Delta l = 0{,}2$ mm

l_o = ? Fejezzük ki az l_o –t a $\Delta l = l_o \cdot \alpha \cdot \Delta T$ képletből!

$$l_0 = \frac{\Delta l}{\alpha \cdot \Delta T} = \frac{0{,}2\,mm}{1{,}42 \cdot 10^{-5}\,\frac{1}{^0C} \cdot 22\ ^0C} = 64\,cm$$ hosszú Tamás nyaklánca.

M.5.17. Megoldás: $T_1 = 24\ ^oC$ $d_1 = 60$ mm $d_2 = 59{,}9$ mm $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}\,\frac{1}{^0C}$

T_2 = ?

A szegecs az átmérője mentén lineárisan „összehúzódik” !

Alkalmazzuk az $l_t = l_o \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta T)$ összefüggést!

$59{,}9\ \text{mm} = 60\ \text{mm} \cdot (1 + 1{,}2 \cdot 10^{-5}\,\frac{1}{^0C} \cdot \Delta T)$ Számítsuk ki a ΔT! $\Delta T = -139\ ^oC$

$\Delta T = T_2 - T_1$ összefüggésből: $T_2 = -115\ ^oC$-ra kell hűteni a szegecset.

M.5.18. Megoldás:

$l_o = 65{,}8$ m ; $\Delta T = 22\ ^oC$; $\alpha = 1{,}17 \cdot 10^{-5}\,\frac{1}{^0C}$ A mérőszalag hossza megnőtt!

Δl = ? Alkalmazzuk a $\Delta l = l_o \cdot \alpha \cdot \Delta T$ összefüggést!

$\Delta l = 1{,}17 \cdot 10^{-5}\,\frac{1}{^0C} \cdot 65{,}85\ \text{m} \cdot 22\ ^oC = 16{,}95$ mm, jó közelítéssel 17 mm a mérés hibája.

M.5.19. Megoldás:: $l_o = 42$ m ; $\alpha = 1{,}28 \cdot 10^{-5}\,\frac{1}{^0C}$; $\Delta T = 456\ ^oC$

l_T= ? Alkalmazzuk az $\ell_T = \ell_o\,(1 + \alpha \cdot \Delta T)$ összefüggést!

$l_T = 42\ \text{m} \cdot (1 + 1{,}28 \cdot 10^{-5}\,\frac{1}{^0C} \cdot 456\ ^oC) = 42{,}25$ m hosszú lesz a gőzvezeték.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.5.20. Megoldás:

$l_o = 650$ mm; $\Delta T = 590$ °C; $\alpha = 1{,}28 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^0C}$

$\Delta l = ?$ Alkalmazzuk a $\Delta l = l_o \cdot \alpha \cdot \Delta T$ összefüggést!

$\Delta l = 1{,}28 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^0C} \cdot 650 \text{ mm} \cdot 590 \text{ °C} = 4{,}9$ mm a tágulás nagysága.

M.5.21. Megoldás:: $l_o = 1600$ m ; $\alpha = 1{,}17 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^0C}$; $l_T = 1600{,}5$ m $T_1 = 14$ °C

$T_2 = ?$ Alkalmazzuk az $\ell_T = \ell_o (1 + \alpha \cdot \Delta T)$ összefüggést! Fejezzük ki a ΔT !

$1600{,}5 \text{ m} = 1600 \text{ m} \cdot (1 + 1{,}17 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^0C} \cdot \Delta T)$ $\Delta T = 26{,}7$ °C $= T_2 - 14$ °C

$T_2 = 40{,}7$ °C volt a sín hőmérséklete a legmelegebb órában.

M.5.22. Megoldás: $\Delta T = 35$ °C ; $V_o = 1{,}8$ dm³ ; $\beta = 3{,}6 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^0C}$

$\Delta V = ?$ Használjuk a $\Delta V = \beta \cdot V_o \cdot \Delta T$ összefüggést!

$\Delta V = 3{,}6 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^0C} \cdot 1{,}8$ dm³ $\cdot 35$ °C $= 2{,}3$ cm³ –rel nő a burkolólap térfogata.

M.5.23. Megoldás: $\Delta V = 32{,}4$ cm³ ; $V_o = 10$ dm³ ; $\beta = 7{,}2 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^0C}$

$\Delta T = ?$ Használjuk a $\Delta V = \beta \cdot V_o \cdot \Delta T$ összefüggést!

$$\Delta T = \frac{\Delta V}{\beta \cdot V_0} = \frac{32{,}4 \cdot 10^{-3}\, dm^3}{7{,}2 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^0C} \cdot 10\, dm^3} = 45 \text{ °C}$$ – kal lett melegebb.

M.5.24. Megoldás: $\Delta T = 85$ °C ; $V_o = 17$ dm³ ; $\beta = 3{,}6 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^0C}$

$\Delta V = ?$ Használjuk a $\Delta V = \beta \cdot V_o \cdot \Delta T$ összefüggést!

$\Delta V = 3{,}6 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^0C} \cdot 17$ dm³ $\cdot 85$ °C $= 52$ cm³ –rel nőt a bográcsok térfogata.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.5.25.

Megoldás: $\Delta T = 160\ ^oC$; $V_o = 8\ dm^3$; $\Delta V = 65{,}28\ cm^3$

$\beta = ?$ Használjuk a $\Delta V = \beta \cdot V_o \cdot \Delta T$ összefüggést!

$$\beta = \frac{\Delta V}{V_0 \cdot \Delta T} = \frac{65{,}28 \cdot 10^{-3}\, dm^3}{8\, dm^3 \cdot 160\, ^0C} = 5{,}1 \cdot 10^{-5}\, \frac{1}{^0C}$$

Bronzból készült a golyó.

M.5.26.

Megoldás: $V_o = 20\ dm^3$

$\beta = 4{,}8 \cdot 10\text{-}5\, \frac{1}{^0C}$; $\Delta V = 34{,}56\ cm^3$

$\Delta T = ?$ Használjuk a $\Delta V = \beta \cdot V_o \cdot \Delta T$ összefüggést!

$$\Delta T = \frac{\Delta V}{\beta \cdot V_0} = \frac{34{,}56 \cdot 10^{-3}\, dm^3}{4{,}8 \cdot 10^{-5}\, \frac{1}{^0C} \cdot 20\, dm^3} = 36\, ^oC$$

– kal csökkent a hőmérséklet.

M.5.27.

Megoldás: $V_o = 6\ dm^3$; $\Delta T = 9\ ^oC$

$V_T = ?$ Alkalmazzuk a $V_T = V_o (1 + \beta \cdot \Delta T)$ összefüggést!

$V_T = 6\ dm^3 \cdot (1 + 0{,}5 \cdot 10^{-3}\, \frac{1}{^0C} \cdot 9\ ^oC) = 6{,}03\ dm^3$ lesz a glicerin térfogata.

M.5.28.

Megoldás: $\Delta V = 0{,}015\ dm^3$; $V_o = 5\ dm^3$; $\beta = 0{,}3 \cdot 10^{-3}\, \frac{1}{^0C}$; $T_1 = 12\ ^oC$

$T_2 = ?$ Használjuk a $\Delta V = \beta \cdot V_o \cdot \Delta T$ összefüggést!

$$\Delta T = \frac{\Delta V}{\beta \cdot V_0} = \frac{0{,}015\, dm^3}{0{,}3 \cdot 10^{-3}\, \frac{1}{^0C} \cdot 5\, dm^3} = 10\ ^oC$$

; $T_2 - 12\ ^oC = 10\ ^oC$

$T_2 = 22\ ^oC$ a laboratórium hőmérséklete.

M.5.29.

Megoldás: $V_o = 3\ l$; $\beta = 0{,}13 \cdot 10^{-3}\, \frac{1}{^0C}$ $\Delta V = 6\ ml$

$\Delta T = ?$ Használjuk a $\Delta V = \beta \cdot V_o \cdot \Delta T$ összefüggést!

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$\Delta T = \frac{\Delta V}{\beta \cdot V_0} = \frac{6 \cdot 10^{-3}\ l}{0{,}13 \cdot 10^{-3}\ \frac{1}{^0C} \cdot 3\ l} = 15{,}4\ ^oC$ – kal csökkent a hőmérséklet.

M.5.30. Megoldás: $V_o = 15$ l ; $\beta = 0{,}13 \cdot 10^{-3}\ \frac{1}{^0C}$ $\Delta V = 0{,}039$ l

ΔT = ? Használjuk a $\Delta V = \beta \cdot V_o \cdot \Delta T$ összefüggést!

$\Delta T = \frac{\Delta V}{\beta \cdot V_0} = \frac{0{,}039\ l}{0{,}13 \cdot 10^{-3}\ \frac{1}{^0C} \cdot 15\ l} = 20\ ^oC$ – kal nőtt a hőmérséklet.

M.5.31. Megoldás: $\Delta T = 62\ ^oC$; $V_o = 6\ dm^3$; $\Delta V = 0{,}4645\ dm^3$

β = ? Használjuk a $\Delta V = \beta \cdot V_o \cdot \Delta T$ összefüggést!

$\beta = \frac{\Delta V}{V_0 \cdot \Delta T} = \frac{0{,}4645\ dm^3}{6\ dm^3 \cdot 62\ ^0C} = 1{,}25 \cdot 10^{-3}\ \frac{1}{^0C}$ Benzollal kísérleteztek a tanulók.

M.5.32. Megoldás: $T_1 = 22\ ^oC$; $V_1 = 0{,}98\ V_o$

T_2 = ? Alkalmazzuk a $V_t = V_o \cdot (1 + \beta \cdot \Delta T)$ képletet.

$0{,}98 \cdot V_o = V_o \cdot (1 + 1 \cdot 10^{-3}\ \frac{1}{^0C} \cdot \Delta T)$ $\Delta T = (-20\ ^oC)$

$T_2 = 22\ ^oC - 20\ ^oC = 2\ ^o)$ –on lesz a benzin térfogata 2 % - kal kisebb.

(Minden 10 Celsius fokos hőmérséklet-változás 1 %-os térfogatváltozást eredményez a benzin esetében.)

M.5.33. Megoldás: $T_1 = 20\ ^oC$; $V_1 = 1{,}04\ V_o$

T_2 = ? Alkalmazzuk a $V_t = V_o \cdot (1 + \beta \cdot \Delta T)$ képletet.

$1{,}04 \cdot V_o = V_o \cdot (1 + 1{,}25 \cdot 10^{-3}\ \frac{1}{^0C} \cdot \Delta T)$ $\Delta T = 32\ ^oC$

$T_2 = 20\ ^oC + 32\ ^oC = 52\ ^oC$-on lesz a benzol térfogata 4 % - kal nagyobb.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

IDEÁLIS GÁZOK ÁLLAPOTVÁLTOZÁSAI, ÁLLAPOTEGYENLET

M.5.34. Megoldás:

$V_1 = 150\ m^3$; $p_1 = 100\ kPa$; $V_2 = 6\ m^3$

$p_2 = ?$ Alkalmazzuk a $p_2 \cdot V_2 = p_1 \cdot V_1$ összefüggést!

$p_2 = \frac{p_1 \cdot V_1}{V_2} = \frac{100kPa \cdot 150m^3}{6m^3} = 2500$ kPa a nyomás a tartályban.

M.5.35. Megoldás:

$V_1 = 10\ cm^3$; $p_1 = 100$ kPa ; $V_2 = 25\ cm^3$

$p_2 = ?$ Alkalmazzuk a $p_2 \cdot V_2 = p_1 \cdot V_1$ összefüggést!

$p_2 = \frac{p_1 \cdot V_1}{V_2} = \frac{100kPa \cdot 10cm^3}{25cm^3} = 40$ kPa lett a nyomás.

M.5.36. Megoldás:

$V_1 = 400\ cm^3$; $p_1 = 100$ kPa ; $p_2 = 160$ kPa

$V_2 = ?$ Alkalmazzuk a $p_2 \cdot V_2 = p_1 \cdot V_1$ összefüggést!

$V_2 = \frac{p_1 \cdot V_1}{p_2} = \frac{100kPa \cdot 400cm^3}{160kPa} = 250\ cm^3$ lett a térfogat.

M.5.37. Megoldás:

$T_1 = 281$ K ; $T_2 = 295$ K ; $V_1 = 10$ m x 6 m x 3 m $= 180\ m^3$;

p = állandó

$\Delta V = ?$ Alkalmazzuk a $\frac{V_2}{T_2} = \frac{V_1}{T_1}$ összefüggést!

$V_2 = \frac{V_1 \cdot T_2}{T_1} = \frac{180m^3 \cdot 295K}{281K} = 189\ m^3$

$\Delta V = V_2 - V_1 = 9\ m^3$ levegő távozott a szabadba.

M.5.38. Megoldás:

$T_1 = 333$ K ; $T_2 = 283$ K ; $V_1 = 50\ cm^3$; p = állandó

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

V_2 = ? Alkalmazzuk a $\frac{V_2}{T_2} = \frac{V_1}{T_1}$ összefüggést!

$V_2 = \frac{V_1 \cdot T_2}{T_1} = \frac{50 cm^3 \cdot 283 K}{333 K}$ = 42,5 cm³ lesz a térfogat.

M.5.39.

Megoldás:

T_2 = 309 K ; V_1 = 14 m³ ; V_2 = 16 m³ ; p = állandó

T_1 = ? Alkalmazzuk a $\frac{V_2}{T_2} = \frac{V_1}{T_1}$ összefüggést!

$T_1 = \frac{V_1 \cdot T_2}{V_2} = \frac{14 m^3 \cdot 309 K}{16 m^3}$ = 270 K = (-3 °C) volt a hőmérséklet.

M.5.40.

Megoldás:

V = állandó ; T_1 = 287 K ; T_2 = 303 K ; p_1 = 100 kPa

p_2 = ? Alkalmazzuk a $\frac{p_2}{T_2} = \frac{p_1}{T_1}$ összefüggést!

$p_2 = \frac{p_1 \cdot T_2}{T_1} = \frac{100 kPa \cdot 303 K}{287 K}$ = 105,6 kPa lett a nyomás.

M.5.41.

Megoldás:

V = állandó ; T_1 = 296 K ; $p_1 = 3{,}2 \cdot 10^5$ Pa ; $p_2 = 2{,}84 \cdot 10^5$ Pa

T_2 = ? Alkalmazzuk a $\frac{p_2}{T_2} = \frac{p_1}{T_1}$ összefüggést!

$T_2 = \frac{p_2 \cdot T_1}{p_1} = \frac{2{,}84 \cdot 10^5 Pa \cdot 296 K}{3{,}2 \cdot 10^5 Pa}$ = 263 K = (-10 °C) volt a külső hőmérséklet.

M.5.42.

Megoldás:

V = állandó ; T_1 = 280 K ; $p_2 = p_1 \cdot 1{,}06$

T_2 = ? Alkalmazzuk a $\frac{p_2}{T_2} = \frac{p_1}{T_1}$ összefüggést!

$T_2 = \frac{p_2 \cdot T_1}{p_1} = \frac{1{,}06 \cdot p_1 \cdot 280 K}{p_1}$ = 297 K = 24 °C lett a hőmérséklet.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.5.43. Megoldás:

m = 2 kg Hélium: M = 4 $\frac{g}{mol}$; n = $\frac{m}{M}$ = 500 mol ; p = 49 MPa ; T = 295 K ;

R = 8,314 $\frac{J}{mol \cdot K}$

V = ? Alkalmazzuk az állapotegyenletet: p · V =n · R · T!

$V = \frac{n \cdot R \cdot T}{p} = \frac{500mol \cdot 8{,}314\frac{J}{mol \cdot K} \cdot 295K}{49 \cdot 10^6 \cdot \frac{N}{m^2}}$ = 25 dm³ a tartály térfogata.

M.5.44 Megoldás:

m = 4 kg Oxigén: M = 32 $\frac{g}{mol}$; n = $\frac{m}{M}$ = 125 mol ; V = 15 dm³ ; T = 297 K ;

R = 8,314 $\frac{J}{mol \cdot K}$

p = ? Alkalmazzuk az állapotegyenletet: p · V =n · R · T!

$p = \frac{n \cdot R \cdot T}{V} = \frac{125mol \cdot 8{,}314\frac{J}{mol \cdot K} \cdot 297K}{15 \cdot 10^{-3} m^3}$ = 20,6 MPa az oxigén nyomása.

M.5.45 Megoldás:

m = 7 kg Nitrogén M = 28 $\frac{g}{mol}$; n = $\frac{m}{M}$ = 250 mol ; V = 30 dm³ ; p = 20,3 MPa

R = 8,314 $\frac{J}{mol \cdot K}$

T = ? Alkalmazzuk az állapotegyenletet: p · V =n · R · T!

$T = \frac{p \cdot V}{n \cdot R} = \frac{20{,}3 \cdot 10^6 \frac{N}{m^2} \cdot 30 \cdot 10^{-3} m^3}{250mol \cdot 8{,}314\frac{J}{mol \cdot K}}$ = 293 K = 20 °C a tanterem hőmérséklete.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.5.46. Megoldás:

Kripton M = 83,8 $\frac{g}{mol}$; V = 12 cm³ ; p = 9,6·10⁴Pa ; T = 398 K

R = 8,314 $\frac{J}{mol \cdot K}$

m = ? Alkalmazzuk az állapotegyenletet: $p \cdot V = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T$!

$$m = \frac{p \cdot V \cdot M}{R \cdot T} = \frac{9{,}6 \cdot 10^4 \frac{N}{m^2} \cdot 12 \cdot 10^{-6} m^3 \cdot 83{,}8 \frac{g}{mol}}{8{,}314 \frac{J}{mol \cdot K} \cdot 398K}$$ = 29,2 mg gáz van az izzóban.

M.5.47. Megoldás:

V = 25 dm³ ; p = 7,8 MPa ; T = 293 K ; R = 8,314 $\frac{J}{mol \cdot K}$

n = ? Alkalmazzuk az állapotegyenletet: p · V = n · R · T!

$$n = \frac{p \cdot V}{R \cdot T} = \frac{7{,}8 \cdot 10^6 \frac{N}{m^2} \cdot 25 \cdot 10^{-3} m^3}{8{,}314 \frac{J}{mol \cdot K} \cdot 293K}$$ = 80 mol gáz van a tartályban.

M.5.48. Megoldás:

Kripton M = 32 $\frac{g}{mol}$; V = 12 dm³ ; p = 15 MPa ; T = 303 K

R = 8,314 $\frac{J}{mol \cdot K}$

m = ? Alkalmazzuk az állapotegyenletet: $p \cdot V = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T$!

$$m = \frac{p \cdot V \cdot M}{R \cdot T} = \frac{15 \cdot 10^6 \frac{N}{m^2} \cdot 12 \cdot 10^{-3} m^3 \cdot 32 \frac{g}{mol}}{8{,}314 \frac{J}{mol \cdot K} \cdot 303K}$$ = 2,29 kg oxigén van a palackban.

M.5.49. Megoldás:

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$V_1 = 30\ dm^3$; $T_1 = 288\ K$; $p_1 = 250\ kPa$; $T_2 = 315\ K$; $p_2 = 270\ kPa$

$V_2 = ?$ Alkalmazzuk az egyesített gáztörvényt: $\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2}$!

$V_2 = \frac{p_1 \cdot V_1 \cdot T_2}{p_2 \cdot T_1} = \frac{250kPa \cdot 30dm^3 \cdot 315K}{270kPa \cdot 288K}$ = 30,4 dm³ lett a tömlő térfogata.

Megjegyzés: Amikor a gépjárművek keréknyomását mérjük, akkor mindig a légköri nyomáshoz képesti többletet mérjük. Ezért a valódi gáznyomás a gumikban 100 kPa-lal nagyobb, mint a mért többletnyomás.

M.5.50.

Megoldás:

$V_1 = 45\ dm^3$; $T_1 = 313\ K$; $p_1 = 360\ kPa$; $T_2 = 298\ K$; $V_2 = 44,8\ dm^3$

$p_2 = ?$ Alkalmazzuk az egyesített gáztörvényt: $\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2}$!

$p_2 = \frac{p_1 \cdot V_1 \cdot T_2}{V_2 \cdot T_1} = \frac{360kPa \cdot 45dm^3 \cdot 298K}{44,8dm^3 \cdot 313K}$ = 344 kPa. A tömlőben mérhető nyomás 244 kPa.

Megjegyzés: Amikor a gépjárművek keréknyomását mérjük, akkor mindig a légköri nyomáshoz képesti többletet mérjük. Ezért a valódi gáznyomás a gumikban 100 kPa-lal nagyobb, mint a mért többletnyomás.

M.5.51.

Megoldás:

$V_1 = 8\ m^3$; $T_1 = 238\ K$; $p_1 = 1,2 \cdot 10^4\ Pa$; $V_2 = 1,18\ m^3$; $p_2 = 10^5\ Pa$

$T_2 = ?$ Alkalmazzuk az egyesített gáztörvényt: $\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2}$!

$T_2 = \frac{p_2 \cdot V_2 \cdot T_1}{p_1 \cdot V_1} = \frac{10 \cdot 10^4 Pa \cdot 1,18m^3 \cdot 238K}{1,2 \cdot 10^4 Pa \cdot 8m^3}$ = 293 K = 20 °C lesz a hőmérséklet.

M.5.53. Megoldás:

$V_2 = 0,9 \cdot V_1$; $p_2 = 1,3 \cdot p_1$; $T_1 = 299\ K$

$T_2 = ?$ Alkalmazzuk az egyesített gáztörvényt: $\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2}$!

$T_2 = \frac{p_2 \cdot V_2 \cdot T_1}{p_1 \cdot V_1} = \frac{1,3 \cdot p_1 \cdot 0,9 \cdot V_1 \cdot 299K}{p_1 \cdot V_1}$ = 350 K = 77 °C lesz a hőmérséklet.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.5.53.

Megoldás:

$V_2 = 1{,}25 \cdot V_1$; $p_2 = 0{,}82 \cdot p_1$; $T_1 = 288$ K

T_2 = ? Alkalmazzuk az egyesített gáztörvényt: $\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2}$!

$$T_2 = \frac{p_2 \cdot V_2 \cdot T_1}{p_1 \cdot V_1} = \frac{0{,}82 \cdot p_1 \cdot 1{,}25 \cdot V_1 \cdot 288K}{p_1 \cdot V_1}$$ = 295 K = 22 °C lesz a hőmérséklet.

M.5.54.

Megoldás:

$V_1 = 44$ dm³ ; $T_2 = 0{,}78 \cdot T_1$; $p_2 = 1{,}16 \cdot p_1$

V_2 = ? Alkalmazzuk az egyesített gáztörvényt: $\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2}$!

$$V_2 = \frac{p_1 \cdot V_1 \cdot T_2}{p_2 \cdot T_1} = \frac{p_1 \cdot 44dm^3 \cdot 0{,}78 \cdot T_1}{1{,}16 \cdot p_1 \cdot T_1}$$ = 29,6 dm³ lesz a térfogata.

M.5.55.

Megoldás:

$T_2 = 1{,}33 \cdot T_1$; $V_2 = 0{,}79 \cdot V_1$; $p_1 = 155$ kPa

p_2 = ? Alkalmazzuk az egyesített gáztörvényt: $\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2}$!

$$p_2 = \frac{p_1 \cdot V_1 \cdot T_2}{V_2 \cdot T_1} = \frac{155kPa \cdot V_1 \cdot 1{,}33 \cdot T_1}{0{,}79 \cdot V_1 \cdot T_1}$$ = 261 kPa lesz a nyomás.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

GYAKORLÓ FELADATOK

M.5.56.

r_1= 6 mm ; T_1= 10 °C ; T_2= 10 °C ; $\beta_{acél}$= $3{,}9\cdot10^{-5}\,\frac{1}{^0C}$

d_2 =? ; $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ = ?

a) V_1= $\frac{4\cdot r_1^3\cdot\pi}{3}$ = $\frac{4\cdot 216mm^3\cdot\pi}{3} = 904{,}78mm^3$

Használjuk a $V_2 = V_1(1+\beta\cdot\Delta T)$ képletet!

V_2 = 904,78mm³ $(1 + 3{,}9\cdot10^{-5}\,\frac{1}{^0C}\cdot 55\ ^oC)$ = 906,72 mm³

V_2= $\frac{4\cdot r_2^3\cdot\pi}{3}$ képletből r_2 = 6,0043 mm d_2= 12,0086 mm lesz a csapágygolyó átmérője.

b) Alkalmazzuk a $\frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{V_1}{V_2}=\frac{V_1}{V_1\cdot(1+\beta\cdot\Delta T)}$ összefüggést, ami azért igaz, mert melegítés közben a tömeg állandó! $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ = 0,998

A sűrűség 2 ezrelékkel csökkent.

M.5.57. Megoldás:

$\rho_{20} = 2700\frac{kg}{m^3}$; T_1= 20°C ; ΔT = 230 °C β = $7{,}17\cdot10^{-5}\,\frac{1}{^0C}$

ρ_{250} = ? ; T_2 = ?

a) A $\frac{\rho_{250}}{\rho_{20}}=\frac{V_{20}}{V_{250}}=\frac{V_{20}}{V_{20}\cdot(1+\beta\cdot\Delta T)}$ összefüggést alkalmazzuk.

$\rho_{250} = 2656\ \frac{kg}{m^3}$ lesz a sűrűség.

b) $\frac{2680\frac{kg}{m^3}}{2700\frac{kg}{m^3}}=\frac{1}{1+7{,}17\cdot10^{-5}\cdot\frac{1}{^0C}\cdot\Delta T}$ összefüggésből ΔT = 104 °C = T_2 – 20 °C

T_2 = 124 °C – on lesz a sűrűség 2680 $\frac{kg}{m^3}$.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.5.58. **Megoldás:**

$\Delta T = 50\ ^oC \quad \Delta l = l_o \cdot \frac{0{,}0605}{100}$

a) $\alpha = ?$ Alkalmazzuk a $\Delta l = l_o \cdot \alpha \cdot \Delta T$ összefüggést!

$\frac{\Delta l}{l_0} = \alpha \cdot \Delta T = \frac{0{,}0605}{100} \qquad \alpha = \frac{0{,}0605}{100 \cdot 50^0 C} = 1{,}21 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^0C}$

b) Acélból készült.

c) $\Delta T = \frac{\Delta l}{\alpha \cdot l_0} = \frac{0{,}05}{100 \cdot 1{,}21 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^0C}} = 41{,}3^0 C$

M.5.59.*

Megoldás:

Alkalmazzuk a $\ell_T = \ell_o (1 + \alpha \cdot \Delta T)$ összefüggést a huzaldarabokra!

l_A= 600 mm $\cdot (1 - 1{,}75 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^0C} \cdot 55^0 C)$ = 599,42 mm

l_B= 800 mm $\cdot (1 - 1{,}75 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^0C} \cdot 55^0 C)$ = 799,23 mm

Az **AB** távolságot Pitagorasz tétellel számítjuk ki.

AB = $\sqrt{799{,}23^2 + 599{,}42^2}$ = 999,04 mm lesz a távolság.

Megjegyzés: Az **A** és **B** pont távolsága egymástól 60°C-on 100 cm. Közvetlenül is alkalmazhatjuk erre a méretre a hőtágulási összefüggést: $\ell_T = \ell_o (1 + \alpha \cdot \Delta T) =$

100 cm $\cdot (1 - 1{,}75 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^0C} \cdot 55^0 C)$ = 99,904 cm.

M.5.60.* **Megoldás:**

A feladat adatai szerint: $l_{Cu} - l_{Al}$ = 18 cm. A rézhuzalnak kell hosszabbnak lenni, mert kisebb a hőtágulási együtthatója.

Alkalmazzuk az $\ell_T = \ell_o (1 + \alpha \cdot \Delta T)$ összefüggést!

$l_{Cu} \cdot (1 + \alpha_{Cu} \cdot \Delta T) - l_{Al} \cdot (1 + \alpha_{Al} \cdot \Delta T)$ = 18 cm Rendezzük az egyenletet!

$l_{Cu} + l_{Cu} \cdot \alpha_{Cu} \cdot \Delta T - l_{Al} - l_{Al} \cdot \alpha_{Al} \cdot \Delta T$ = 18 cm $(l_{Cu} - l_{Al}) + \Delta T \cdot (l_{Cu} \cdot \alpha_{Cu} - l_{Al} \cdot \alpha_{Al})$ = 18 cm

$l_{Cu} - l_{Al}$ helyébe írjuk be a 18cm-t!

$\Delta T \cdot (l_{Cu} \cdot \alpha_{Cu} - l_{Al} \cdot \alpha_{Al})$ = 0 lesz!

Mivel ΔT nem lehet 0, ezért $l_{Cu} \cdot \alpha_{Cu} - l_{Al} \cdot \alpha_{Al}$ = 0! Rendezzük át az egyenletet!

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$\frac{l_{Cu}}{l_{Al}} = \frac{\alpha_{Al}}{\alpha_{Cu}} = 1{,}5$ ebből $l_{Cu} = 1{,}5 \cdot l_{Al}$ ezt helyettesítsük be : $l_{Cu} - l_{Al} = 18$ cm összefüggésbe!

Így azt kapjuk, hogy: $l_{Al} = 36$ cm és $l_{Cu} = 54$ cm

Megjegyzés: Akkor nem változik a két huzal hosszának különbsége azonos hőmérséklet-változás esetén, ha a hőtágulási együtthatójuknak és a hosszuknak a szorzata ugyanakkora. Mivel a réz és az alumínium hőtágulási együtthatójának aránya 2:3, ezért a hosszúságuk aránya 3:2. Tehát két olyan számot keresünk, melynek aránya 3:2, valamint különbségük 18 cm. Vagyis a hosszú levezetés helyett ezzel a gondolatmenettel is ugyanarra a következtetésre juthatunk.

M.5.61.*

Megoldás:

Alkalmazzuk a $\ell_T = \ell_o (1 + \alpha \cdot \Delta T)$ összefüggést a huzaldarabokra!

$\ell_1 = 1600 \text{ mm} (1 + 1{,}3 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^0C} \cdot 8^oC) = 1600{,}166 \text{ mm}$

$\ell_2 = 1200 \text{ mm} (1 + 1{,}3 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^0C} \cdot 8^oC) = 1200{,}125 \text{ mm}$

$\ell_3 = 400 \text{ mm} (1 + 1{,}3 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^0C} \cdot 8^oC) = 400{,}042 \text{ mm}$

Az **AB** távolságot Pitagorasz tétellel számítjuk ki.

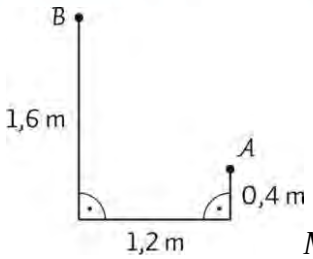
$AB = \sqrt{l_2^2 + (l_1 - l_3)^2} = \sqrt{1200{,}125^2 + 1200{,}128^2} = 1697{,}235$ mm lesz a távolság.

$\ell_T = \ell_o (1 + \alpha \cdot \Delta T) = 169{,}706 \text{ cm} \cdot (1 - 1{,}3 \cdot 10\text{-}5 \frac{1}{^0C} \cdot 8^0C) = 169{,}7233$ cm. Olyan kicsi a változás, hogy a gyakorlatban nincs jelentősége!

M.5.60M ábra

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT



Megjegyzés: Az **A** és **B** pont távolsága egymástól 12°C-on 120·√2 = 169,706 cm. Közvetlenül is alkalmazhatjuk erre a méretre a hőtágulási összefüggést:

M.5.62. **Megoldás:**

A grafikonról leolvasható: Δl = 36 mm és ΔT = 5 °C.

l_o = 400 m Alkalmazzuk a $\Delta l = l_o \cdot \alpha \cdot \Delta T$ képletet, majd fejezzük ki α-t!

$\alpha = \frac{\Delta l}{l_0 \cdot \Delta T} = \frac{36 \cdot 10^{-3} m}{400m \cdot 5\ ^0C} = 1{,}8 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^0C}$ a huzal lineáris hőtágulási együtthatója.

M.5.63.

Megoldás:

A grafikonról leolvasható: Δl = 0,132 m és ΔT = 55 °C.

a) l_o = 100 m Alkalmazzuk a $\Delta l = l_o \cdot \alpha \cdot \Delta T$ képletet, majd fejezzük ki α-t!

$\alpha = \frac{\Delta l}{l_0 \cdot \Delta T} = \frac{0{,}096m}{100m \cdot 40\ ^0C} = 2{,}4 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^0C}$ a huzal lineáris hőtágulási együtthatója.

b) A huzal alumíniumból készült.

c) Alkalmazzuk az $\ell_T = \ell_o \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta T)$ összefüggést!

ℓ_{10} = 100 m · (1 + 2,4·10^{-5} $\frac{1}{^0C}$ · 25 °C) = 100,06 m hosszú a huzal, ami a grafikonról is leolvasható.

M.5.64. **Megoldás:**

a=15 cm α = 1,6·10^{-5} $\frac{1}{^0C}$ T_1= 8 °C T_2= 35 °C ΔT = 27 °C

b=25 cm

c=35 cm Δa=? Δb=? Δc=? ΔA=? ΔV=?

Alkalmazzuk az $\Delta l = \alpha \cdot l_o \cdot \Delta T$ összefüggést! Helyettesítsük be az ismert adatokat!

$\Delta a = \alpha \cdot a \cdot \Delta T = 2{,}4 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^0C} \cdot 15\ cm \cdot 27\ ^oC = 9{,}72 \cdot 10^{-3} cm$

$\Delta b = \alpha \cdot b \cdot \Delta T = 2{,}4 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^0C} \cdot 25\ cm \cdot 27\ ^oC = 16{,}2 \cdot 10^{-3} cm$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$\Delta c = \alpha \cdot c \cdot \Delta T = 2{,}4 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^0C} \cdot 35\ cm \cdot 27\ ^oC = 22{,}7 \cdot 10^{-3} cm$

Számítsuk ki a téglatest felszínét! $A = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c) = 2 \cdot (15\ cm \cdot 25\ cm + 15\ cm \cdot 35\ cm + 25cm \cdot 35\ cm) = 3550\ cm^2$

Alkalmazzuk az $\Delta A = 2 \cdot \alpha \cdot A \cdot \Delta T$ összefüggést! Helyettesítsük be az ismert adatokat!

$\Delta A = 2 \cdot 2{,}4 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^0C} \cdot 3550\ cm^2 \cdot 27\ ^oC = 4{,}6\ cm^2$

Számítsuk ki a téglatest térfogatát! $V = a \cdot b \cdot c = 15\ cm \cdot 25\ cm \cdot 35cm = 13125\ cm^3$

Alkalmazzuk az $\Delta V = 3 \cdot \alpha \cdot V \cdot \Delta T$ összefüggést! Helyettesítsük be az ismert adatokat!

$\Delta V = 3 \cdot 2{,}4 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^0C} \cdot 13125\ cm^3 \cdot 27\ ^oC = 25{,}5\ cm^3$

Az élek megváltozása $9{,}72 \cdot 10^{-3} cm$, $16{,}2 \cdot 10^{-3} cm$ és $22{,}7 \cdot 10^{-3} cm$.
A felszín megváltozása $4{,}6\ cm^2$, a térfogat megváltozása $25{,}5\ cm^3$.

M.5.65.*

Megoldás:

$l_{Fe} = ?$; $l_{Al} = ?$

$l_{Fe} + l_{Al} = 60\ cm = l_{Cu}$ Alkalmazzuk az $\Delta l = \alpha \cdot l_o \cdot \Delta T$ összefüggést!

$(\alpha_{Al} \cdot l_{Al} + \alpha_{Fe} \cdot l_{Fe}) \cdot \Delta T = \alpha_{Cu} \cdot l_{Cu} \cdot \Delta T$; $\alpha_{Al} \cdot l_{Al} + \alpha_{Fe} \cdot l_{Fe} = \alpha_{Cu} \cdot (l_{Al} + l_{Fe})$

$l_{Al} \cdot (\alpha_{Al} - \alpha_{Cu}) = l_{Fe} \cdot (\alpha_{Cu} - \alpha_{Fe})$

$$\frac{l_{Al}}{l_{Fe}} = \frac{0{,}4 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^0C}}{0{,}8 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^0C}} = 0{,}5$$; $l_{Al} = 0{,}5 \cdot l_{Fe}$ $l_{Fe} + l_{Al} = 60\ cm$

$1{,}5 \cdot l_{Fe} = 60\ cm$; $l_{Fe} = 40$ cm hosszú a vasból készült tengely.
20 cm hosszú az alumíniumból készült tengely.

M.5.66.*

Megoldás:

$k_o = 16\ cm$; $A_o = r^2 \cdot \pi = 113{,}1\ cm^2$; $\Delta T = 18\ ^oC$

a) A négyzet kerülete: $k_T = ?$ Alkalmazzuk az $\ell_T = \ell_o (1 + \alpha \cdot \Delta T)$ képletet.

$k_T = 16\ cm\ (1 + 1{,}6 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^0C} \cdot 18\ ^oC) = 160{,}05$ mm lesz a négyzet kerülete.

A kör területe: $A_T = ?$ Alkalmazzuk az $A_T = A_o (1 + 2\alpha \cdot \Delta T)$ képletet.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

A_T = 113,1 cm² (1 + 3,2·10⁻⁵ $\frac{1}{^0C}$ · 18 °C) = 113,165 cm² lesz a kör területe.

b) $\frac{A_n}{A_k} = \frac{A_{0n}\cdot(1+2\alpha\cdot\Delta T)}{A_{0k}\cdot(1+2\alpha\cdot\Delta T)} = \frac{A_{0n}}{A_{0k}}$ Nem változik az arány.

M.5.67.*

Megoldás:

T_1= 20 °C ; $d_{acél}$ = 314 mm ; d_{Al} = 313,6 mm

a) T_2 =? Alkalmazzuk az $\ell_T = \ell_0 (1 + \alpha \cdot \Delta T)$ képletet.

313,6 mm = 314 mm ·((1 + 1,2·10⁻⁵ $\frac{1}{^0C}$ ·ΔT) ΔT = - 106,2 °C

$T_2 = T_1 + \Delta T$ = (- 86,2 °C) – ra kell hűteni a tengelyt.

b) T_2 =? Alkalmazzuk az $\ell_T = \ell_0 (1 + \alpha \cdot \Delta T)$ képletet.

314 mm = 313,6 mm· (1 + 2,4·10⁻⁵ $\frac{1}{^0C}$ · ΔT) ΔT = 53,2 °C

$T_2 = T_1 + \Delta T$ = 73,2 °C – ra kell melegíteni a gyűrűt.

c) T_2 = ? Alkalmazzuk az $\ell_T = \ell_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta T)$ képletet. $d_{T,acél} = d_{T,Al}$

313,6 mm· (1 + 2,4·10⁻⁵ $\frac{1}{^0C}$ · ΔT) = 314 mm· (1 + 1,2·10⁻⁵ $\frac{1}{^0C}$ · ΔT)

ΔT = 108,5 °C ; $T_2 = T_1 + \Delta T$ = 128,5 °C-ra kell melegíteni az alkatrészeket.

M.5.68.

Megoldás:

T_1 = (-20 °C) ; l_{Al} = 42,4 cm ; $l_{acél}$= 42,6 cm

T_2 = ? Alkalmazzuk az $\ell_T = \ell_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta T)$ képletet.

42,4 cm· (1 + 2,4·10⁻⁵ $\frac{1}{^0C}$ · ΔT) = 42,6 cm· (1 + 1,2·10⁻⁵ $\frac{1}{^0C}$ · ΔT)

ΔT = 395,2 °C ; $T_2 = T_1 + \Delta T$ = 375,2 °C –ra kell melegíteni a huzalokat.

M.5.69.

Megoldás:

T_1 = 180 °C ; l_{Al} = 54,2 cm ; $l_{acél}$= 54,4 cm

T_2 = ? Alkalmazzuk az $\ell_T = \ell_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta T)$ képletet.

54,2 cm· (1 + 2,4·10⁻⁵ $\frac{1}{^0C}$ · ΔT) = 54,4 cm· (1 + 1,17·10⁻⁵ $\frac{1}{^0C}$ · ΔT)

ΔT = (-301) °C; $T_2 = T_1 + \Delta T$ = (-121 °C) –ra kell hűteni a huzalokat.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.5. 70. **Megoldás:**

r = 3 cm; m = 80 cm; ΔT = (- 12 °C) ; $\beta = 5{,}1\cdot10^{-5}\,\frac{1}{^0C}$

a) $V_{henger} = r^2\cdot\pi\cdot m = 9\ cm^2\cdot \pi\cdot 80\ cm = 2262\ cm^3 = V_o$

V_T = ?

Alkalmazzuk a $V_T = V_o\cdot(1+\beta\cdot\Delta T)$ összefüggést.

$V_t = 2262\ cm^3\cdot(1 - 5{,}1\cdot10^{-5}\,\frac{1}{^0C}\cdot 12\ ^oC) = 2260{,}6\ cm^3$ lett a térfogat.

b) $A_{henger} = 2\cdot r\cdot\pi\cdot(r+m) = 6\ cm\cdot\pi\cdot 83\ cm = 1564{,}5\ cm^2 = A_o$

A_T = ?

Alkalmazzuk az $A_T = A_o\cdot(1+2\cdot\alpha\,\Delta T)$ képletet.

$A_T = 1564{,}5\ cm^2\cdot(1 - 3{,}4\cdot10^{-5}\,\frac{1}{^0C}\ 12\ ^oC) = 1563{,}9\ cm^2$ lett a felszíne.

M.5.71.* **Megoldás:**

Használjuk a $\Delta A = 2\cdot\alpha\cdot A\cdot\Delta T$ és a $\Delta V = 3\cdot\alpha\cdot V\cdot\Delta T$ összefüggéseket!

a) Tudjuk, hogy $\Delta A = 0{,}012\cdot A = 2\cdot\alpha\cdot A\cdot\Delta T$. Egyszerűsítsünk A-val és fejezzük ki az α-t!

$\alpha = \frac{0{,}012}{2\cdot\Delta T}$ Az α-t helyettesítsük be a $\Delta V = 3\cdot\alpha\cdot V\cdot\Delta T$ összefüggésbe!

$\Delta V = 3\cdot\frac{0{,}012}{2\cdot\Delta T}\cdot V\cdot\Delta T$ Egyszerűsítsünk ΔT-vel! $\Delta V = 0{,}018\cdot V$

A test térfogata 1,8 %-kal nőtt. Nagyobb mértékben nőtt a térfogat.

b) $\Delta V = 0{,}026\cdot V = 3\cdot\alpha\cdot V\cdot\Delta T$ képletből $\alpha = \frac{0{,}026}{3\cdot\Delta T}$; helyettesítsük be a $\Delta A = 2\cdot\alpha\cdot A\cdot$ ΔT összefüggésbe! $\Delta A = 2\cdot\frac{0{,}026}{3\cdot\Delta T}\cdot A\cdot\Delta T = 0{,}017\cdot A$

A test felszíne 1,7 % - kal csökkent. Kisebb mértékben csökkent a felszín.

M.5.72.* **Megoldás:**

l_o = 10 m ; d = 3 cm ; ΔT = 12 °C

F = ?

Számítsuk ki a vaskorlát hosszának megváltozását a $\Delta l = l_o\cdot\alpha\cdot\Delta T$ képlettel !

$\Delta l = 10\ m\cdot1{,}2\cdot10^{-5}\,\frac{1}{^0C}\cdot 12\ ^oC = 1{,}44\cdot10^{-3} m$

Számítsuk ki a vaskorlát keresztmetszetét!

$A = r^2\cdot\pi = (1{,}5\ cm)^2\cdot\pi = 7{,}07\ cm^2$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Alkalmazzuk a rugalmas nyújtásnál tanult összefüggést $\Delta l = \frac{F \cdot l}{E \cdot A}$; fejezzük ki az erőt, helyettesítsük be az ismert adatokat.

$$F = \frac{E \cdot A \cdot \Delta l}{l_0} = \frac{2{,}1 \cdot 10^{11} \frac{N}{m^2} \cdot 7{,}07 \cdot 10^{-4} m^2 \cdot 1{,}44 \cdot 10^{-3} m}{10 m} = 2{,}14 \cdot 10^4 N$$

A rögzítési pontokban 2,14·10⁴ N erő hat.

M.5.73.* Megoldás:

$l_o = 8$ m ; $A = 55$ cm² ; $\Delta T = 17$ °C

F = ?

Számítsuk ki a vaskorlát hosszának megváltozását a $\Delta l = l_o \cdot \alpha \cdot \Delta T$ képlettel !

$\Delta l = 8 \text{ m} \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^0C} \cdot 17\ ^oC = 1{,}6 \cdot 10^{-3}$ m

Alkalmazzuk a rugalmas nyújtásnál tanult összefüggést $\Delta l = \frac{F \cdot l}{E \cdot A}$; fejezzük ki az erőt, helyettesítsük be az ismert adatokat.

$$F = \frac{E \cdot A \cdot \Delta l}{l_0} = \frac{2{,}1 \cdot 10^{11} \frac{N}{m^2} \cdot 55 \cdot 10^{-4} m^2 \cdot 1{,}63 \cdot 10^{-3} m}{8 m} = 2{,}3 \cdot 10^5 N$$

A gerendában 2,3·10⁵ N feszítőerő keletkezik.

M.5.74.* Megoldás:

$\Delta T = 22$ °C ; $A_o = 3{,}2$ m² ; $\alpha_{Al} = 2{,}4 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^0C}$

a) A_T = ?

Alkalmazzuk az $A_T = A_o \cdot (1 + 2 \cdot \alpha \cdot \Delta T)$ összefüggést, helyettesítsük be az ismert adatokat.

$A = 3{,}2 \text{ m}^2 \cdot (1 + 2 \cdot 2{,}4 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^0C} \cdot 22\ ^oC) = 3{,}203$ m²

A lemez területe 3,203 m² lesz.

b) $\frac{\Delta A}{A_0} = 0{,}0015$

ΔT = ?

Alkalmazzuk az $\Delta A = 2 \cdot \alpha \cdot A_o \cdot \Delta T$ összefüggést!

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$\frac{\Delta A}{A_0}$ = 2·α ΔT = 0,00015 összefüggésből ΔT = $\frac{0{,}0015}{2 \cdot 2{,}4 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^0C}}$ = (-31,25) °C a hőmérséklet – változás.

M.5.75.* Megoldás:

ΔT = 158 °C ; r = 6 cm

a) A melegítőlap területe 22 °C –on: $A_o = r^2 \cdot \pi = (6\ cm)^2 \cdot \pi = 113{,}1\ cm^2$

A_T = ?

Alkalmazzuk az $A_T = A_o \cdot (1 + 2 \cdot \alpha \cdot \Delta T)$ összefüggést, helyettesítsük be az ismert adatokat.

$A_T = 113{,}1\ cm^2 \cdot (1 + 2{,}4 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^0C} \cdot 158\ ^oC) = 113{,}5\ cm^2$ lesz a melegítőlap területe.

b) ΔA = 0,38 cm² ; A_o = 113,1 cm²

ΔT = ?

Alkalmazzuk az $\Delta A = 2 \cdot \alpha \cdot A_o \cdot \Delta T$ összefüggést!

$\Delta T = \frac{\Delta A}{A_0 \cdot 2 \cdot \alpha} = \frac{0{,}38 cm^2}{113{,}1 cm^2 \cdot 2{,}4 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^0C}}$ = 140 °C volt a hőmérséklet – változás.

M.5.76. Megoldás:

$\beta_{alkohol} = 1{,}14 \cdot 10^{-3} \frac{1}{^0C}$; T_1 = (- 30 °C) ; T_2 = +60 °C ; r = 0,15 mm ; l = 20 cm

a) V_1= ?

(-30 °C) –on csak a gömbben van alkohol, +60 °C –on pedig teljesen kitölti a csövet!

Legyen V_1 a gömb térfogata! A ΔV pedig a cső térfogata, amit hengerként számítunk ki.

$\Delta V = V_1 \cdot \beta \cdot \Delta T = r^2 \cdot \pi \cdot l$ Fejezzük ki V_1 –t!

$V_1 = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot l}{\beta \cdot \Delta T} = \frac{(1{,}5 \cdot 10^{-4})^2 m^2 \cdot \pi \cdot 0{,}2m}{1{,}14 \cdot 10^{-3} \frac{1}{^0C} \cdot 90^0 C}$ = 1,38 ·10⁻⁷ m³ = 138 mm³ a tartály térfogata.

b) ΔV = 150 mm³

T_3 = ? A hőmérő csövében 150 mm³ – 138 mm³ = 12 mm³ alkohol van, amely egyenlő a térfogatváltozással.

$\Delta V = V_1 \cdot \beta \cdot \Delta T$ képletből $\Delta T = \frac{\Delta V}{V_1 \cdot \beta} = \frac{12 mm^3}{138 mm^3 \cdot 1{,}14 \cdot 10^{-3} \frac{1}{^0C}}$ = 76,3 °C

$\Delta T = T_3 - T_1$, T_3 = 46,3 °C – ot mutat a hőmérő.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.5.77. Megoldás:

V_o = 400 ml ; ΔT = 25 °C ; V_T = 412 ml

β = ?

Alkalmazzuk a $V_T = V_o \cdot (1 + \beta \cdot \Delta T)$ összefüggést!

412 ml = 400 ml $(1 + \beta \cdot 25^oC)$ összefüggésből

$\beta = 1{,}2 \cdot 10^{-3} \frac{1}{^0C}$ az ismeretlen folyadék hőtágulási együtthatója.

M.5.78. Megoldás:

$\rho_{20} = 850 \frac{kg}{m^3}$; T_1= 20°C ; ΔT = 40 °C $\beta = 0{,}96 \cdot 10^{-3} \frac{1}{^0C}$

ρ_{60} = ? ; T_2 = ?

a) $\frac{\rho_{60}}{\rho_{20}} = \frac{V_{20}}{V_{60}} = \frac{V_{20}}{V_{20} \cdot (1 + \beta \cdot \Delta T)}$ összefüggést alkalmazzuk.

$\rho_{60} = 820 \frac{kg}{m^3}$ lesz a sűrűség.

b) $\frac{830 \frac{kg}{m^3}}{850 \frac{kg}{m^3}} = \frac{1}{1 + 0{,}96 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1}{^0C} \cdot \Delta T}$ összefüggésből $\Delta T = 25{,}6\ ^oC = T_2 - 20\ ^oC$

T_2 = 45,6 °C – on lesz a sűrűség 830 $\frac{kg}{m^3}$.

M.5.79. Megoldás:

V_o = 10 liter = 10 dm³ ; ΔT = 14 °C ; $\beta_{petróleum} = 9{,}6 \cdot 10^{-4} \frac{1}{^0C}$; $\beta_{Al} = 3 \cdot \alpha_{Al} = 7{,}2 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^0C}$

$\Delta V_{petróleum}$ = ?

a) Alkalmazzuk a $\Delta V = V_o \cdot \beta \cdot \Delta T$ képletet!

ΔV = 10 dm³ $\cdot$ $9{,}6 \cdot 10^{-4} \frac{1}{^0C}$ $\cdot$ 14 °C = 134 cm³ petróleum folyna ki a kannából.

b) Alkalmazzuk a $\Delta V = V_o \cdot \beta \cdot \Delta T$ képletet az alumínium hőtágulására.

ΔV_{Al} = 10 dm³ $\cdot$ $7{,}2 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^0C}$ $\cdot$ 14 °C = 10 cm³

A kifolyt petróleum a két anyag tágulásának különbsége: 124 cm³.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.5.80.*

Megoldás:

V_o = 1000 ml ; ΔT = 15 °C ; $\beta_{sósav} = 3 \cdot 10^{-4} \frac{1}{^0C}$; $\beta_{üveg} = 3 \cdot \alpha_{üveg} = 3{,}3 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^0C}$

$\Delta V_{sósav}$ = ?

a) Alkalmazzuk a $\Delta V = V_o \cdot \beta \cdot \Delta T$ képletet!

$\Delta V = 1000 \text{ ml} \cdot 3 \cdot 10^{-4} \frac{1}{^0C} \cdot (-15)\ ^oC = (-4{,}5)$ ml-rel csökken a sósav térfogata.

b) Alkalmazzuk a $\Delta V = V_o \cdot \beta \cdot \Delta T$ képletet az üveg térfogat csökkenésének kiszámítására.

$\Delta V_{üveg} = 1000 \text{ ml} \cdot 3{,}3 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^0C} \cdot (-15)\ ^oC = (-0{,}5)$ ml

A lombikba tölthető sósav a két anyag térfogat csökkenésének különbsége: 4 ml.

M.5.81.*

Megoldás:

V_o = 20000 ml ; ΔT = 8 °C ; $\beta_{alkohol} = 1{,}1 \cdot 10^{-3} \frac{1}{^0C}$; $\Delta V_{alkohol}$ = 170 ml

a) Alkalmazzuk a $\Delta V = V_o \cdot \beta \cdot \Delta T$ képletet az alkohol illetve a kanna anyagának hőtágulására.

A kifolyt alkohol a két anyag térfogat változásának különbsége:

$170 \text{ ml} = 20000 \text{ ml} \cdot 8\ ^oC \cdot (1{,}1 \cdot 10^{-3} \frac{1}{^0C} - \beta)$; $\beta = 3{,}75 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^0C} = 3 \cdot \alpha$

$\alpha = 1{,}25 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^0C}$

b) A kanna vaslemezből készült.

M.5.82.*

Megoldás:

$g = 9{,}81 \frac{m}{s^2}$; l_o = 5 m ; T_o = 15°C ; T= 25°C ; $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^oC}$

a) Számítsuk ki a lengésidőket: $T_{lengésidő} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$ képlettel.

Reggel: $T = = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{5m}{9{,}81 \frac{m}{s^2}}} = 4{,}4857$ s

Délután: előbb ki kell számítani az inga hosszát.

$l = l_o \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta T) = 5 \text{ m} \cdot (1 + 1{,}2 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^oC} \cdot 10^oC) = 5{,}0006$ m

A lengésidő: $T = = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{5{,}0006m}{9{,}81 \frac{m}{s^2}}} = 4{,}486$ s

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Az eltérés: 0,0003 s.

b) A mérőóra nem tudja mutatni a 3 tízezred másodperc eltérést, mert ezred másodperc pontossággal mér.

M.5.83.*

Megoldás:

$\Delta T = 20\ ^oC$; $g=9{,}81\ \frac{m}{s^2}$

Írjuk fel a lengésidőket a : $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$ képlettel. Alkalmazzuk az $l = l_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta T)$ összefüggést.

$T = 1{,}00016 \cdot T_0$; $2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} = 1{,}00016 \cdot 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l_0}{g}}$; $2\pi \cdot \sqrt{\frac{l_0 \cdot (1+\alpha \cdot \Delta T)}{g}} = 1{,}00016 \cdot 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l_0}{g}}$

Egyszerűsítsünk, emeljünk négyzetre, helyettesítsük be az adatokat:

$1 + \alpha \cdot 20^oC = 1{,}00032$

$\alpha = 1{,}6 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^oC}$, rézből készült az inga.

deális gázok állapotváltozásai, állapotegyenlet

M.5.84.*

Megoldás:

a) Izoterm állapotváltozás.

Az ábráról leolvasható adatok $p_1 = 50$ kPa ; $V_1 = 10\ cm^3$

b) $V_2 = 15\ cm^3$; $p_2 = ?$

Alkalmazzuk a $p_2 \cdot V_2 = p_1 \cdot V_1$ összefüggést!

$p_2 = \frac{p_1 \cdot V_1}{V_2} = \frac{50kPa \cdot 10cm^3}{15cm^3} = 33{,}33$ kPa nyomás tartozik.

c) $p_3 = 250$ kPa ; $V_3 = ?$

Alkalmazzuk a $p_3 \cdot V_3 = p_1 \cdot V_1$ összefüggést!

$V_3 = \frac{p_1 \cdot V_1}{p_3} = \frac{50kPa \cdot 10cm^3}{250kPa} = 2\ cm^3$ térfogat tartozik.

M.5.85.*

Megoldás:

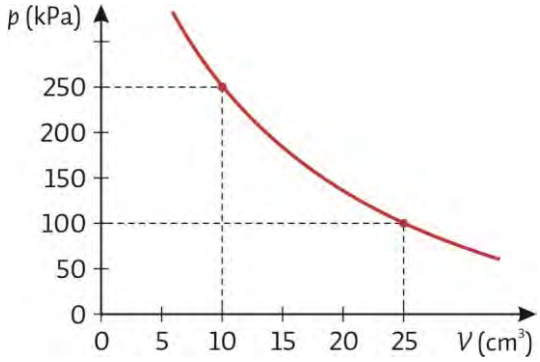
T = állandó, izoterm állapotváltozás. Alkalmazzuk a $p_2 \cdot V_2 = p_1 \cdot V_1$ összefüggést!

Az ábrázoláshoz számítsuk ki a p_2 –t!

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$V_1 = 20\ cm^3$; $V_2 = 5\ cm^3$; $p_1 = 100\ kPa$



$p_2 = ?$

$$p_2 = \frac{p_1 \cdot V_1}{V_2} = \frac{100kPa \cdot 25\ cm^3}{10cm^3} = 250\ kPa$$

M.5.85M ábra

M.5.86.*

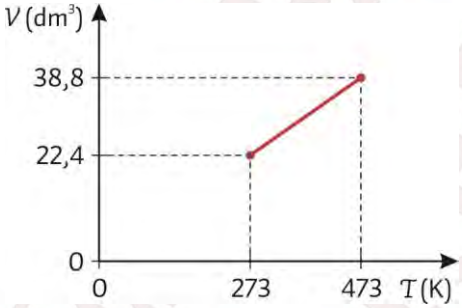
Megoldás:

p = állandó, izobár állapotváltozás.

$T_1 = 273\ K$; $T_2 = 473\ K$; $V_1 = 22{,}4\ dm^3$; Alkalmazzuk a $\frac{V_2}{T_2} = \frac{V_1}{T_1}$ összefüggést!

Az ábrázoláshoz számítsuk ki a V_2-t: $V_2 = \frac{V_1 \cdot T_2}{T_1} = \frac{22{,}4dm^3 \cdot 473K}{273K} = 38{,}81\ dm^3$

M.5.86M ábra



M.5.87. !

Megoldás:

a) p = állandó, izobár állapotváltozás.

Az ábráról leolvasható adatok $V_1 = 100\ mm^3$; $T_1 = 200\ K$

b) $V_2 = 120\ mm^3$; $T_2 = ?$

Alkalmazzuk a $\frac{V_2}{T_2} = \frac{V_1}{T_1}$ összefüggést!

$T_2 = \frac{V_2 \cdot T_1}{V_1} = \frac{120mm^3 \cdot 200K}{100mm^3} = 240K$ hőmérséklet tartozik.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

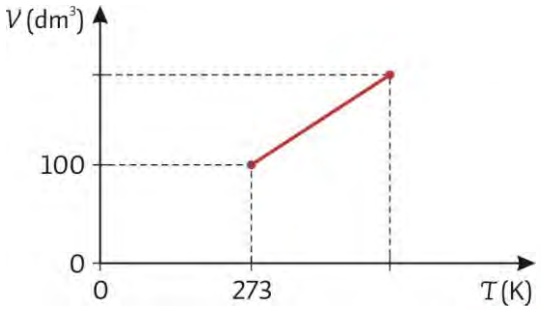
c) $T_3 = 330\ K$; $V_3 = ?$

$V_3 = \frac{V_1 \cdot T_3}{T_1} = \frac{100 mm^3 \cdot 330 K}{200 K} = 165\ mm^3$ térfogat tartozik.

M.5.88.* Megoldás:

V = állandó, izochor állapotváltozás. $T_1 = 273\ K$; $T_2 = 523\ K$; $p_1 = 100\ kPa$

Alkalmazzuk a $\frac{p_2}{T_2} = \frac{p_1}{T_1}$ összefüggést! Az ábrázoláshoz számítsuk ki a p_2 -t!



$p_2 = \frac{p_1 \cdot T_2}{T_1} = \frac{100 kPa \cdot 523 K}{273 K} = 191{,}58\ kPa$

M.5.89.

Megoldás:

a) V = állandó, izochor állapotváltozás.

Az ábráról leolvasható adatok $p_1 = 100\ kPa$; $T_1 = 200\ K$ Alkalmazzuk a

$\frac{p_2}{T_2} = \frac{p_1}{T_1}$ összefüggést!

b) $p_2 = 220\ kPa$; $T_2 = ?$

$T_2 = \frac{p_2 \cdot T_1}{p_1} = \frac{220 kPa \cdot 200 K}{100 kPa} = 440\ K$ a hőmérséklet.

c) $T_3 = 310\ K$; $p_3 = ?$

$p_3 = \frac{p_1 \cdot T_3}{T_1} = \frac{100 kPa \cdot 310 K}{200 K} = 155\ kPa$ a nyomás.

M.5.90.*

Megoldás:

$g = 10\ \frac{m}{s^2}$; $V_1 = 6\ mm^3$; $h = 5\ m$; $p_1 = 100\ kPa$; $\rho_{víz} = 1000\ \frac{kg}{m^3}$

$V_2 = ?$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

A vízoszlop nyomása: $p_{víz} = \rho_{víz} \cdot g \cdot h = 1000 \frac{kg}{m^3} \cdot 10 \frac{m}{s^2} \cdot 5m = 50$ kPa

$p_2 = p_1 + p_{víz} = 150$ kPa Alkalmazzuk a $p_2 \cdot V_2 = p_1 \cdot V_1$ összefüggést!

Fejezzük ki az V_2 –t, helyettesítsük be az ismert adatokat!

$$V_2 = \frac{p_1 \cdot V_1}{p_2} = \frac{100kPa \cdot 6\ mm^3}{150\ kPa} = 4\ mm^3$$ volt a buborék térfogata.

M.5.91.*

Megoldás:

Jelöljük a dugattyú elmozdulását x –szel. A dugattyú a 3,5 dm³-es rész felé mozdul el, hiszen ott kisebb a nyomás.

$V_1 = 2{,}5\ dm^3$; $p_1 = 400$ kPa ; $V_2 = 3{,}5\ dm^3$; $p_2 = 300$ kPa ; $A = 1{,}2\ dm^2$

x = ?

Alkalmazzuk a $p_2 \cdot V_2 = p_1 \cdot V_1$ összefüggést mindkét részre!

A dugattyú elmozdulása után a nyomások egyenlők lesznek, jelöljük p-vel.

A térfogat változása $\Delta V = A \cdot x$

$p_1 \cdot V_1 = p \cdot (V_1 + A \cdot x)$ illetve $p_2 \cdot V_2 = p \cdot (V_2 - A \cdot x)$

Mindkét egyenletből fejezzük ki a p nyomást, helyettesítsük be az adatokat!

x=? $\frac{p_1 \cdot V_1}{V_1 + A \cdot x} = \frac{p_2 \cdot V_2}{V_2 - A \cdot x}$ $\frac{400kPa \cdot 2{,}5dm^3}{2{,}5dm^3 + 1{,}2dm^2 \cdot xdm} = \frac{300kPa \cdot 3{,}5dm^3}{3{,}5dm^3 - 1{,}2dm^2 \cdot xdm}$

Az egyszerűsítések után x kiszámítható: x = 0,356 dm = 3,6 cm.

A dugattyú elmozdulása 3,6 cm.

M.5.92.* Megoldás:

$g = 10 \frac{m}{s^2}$; $h = 12$ m ; $p_2 = 100$ kPa ; $\rho_{víz} = 1000 \frac{kg}{m^3}$

$\frac{V_2}{V_1} = ?$

A vízoszlop nyomása: $p_{víz} = \rho_{víz} \cdot g \cdot h = 1000 \frac{kg}{m^3} \cdot 10 \frac{m}{s^2} \cdot 12$ m $= 120$ kPa

$p_1 = p_2 + p_{víz} = 220$ kPa Alkalmazzuk a $p_2 \cdot V_2 = p_1 \cdot V_1$ összefüggést!

$\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{220kPa}{100kPa} = 2{,}2$ szeresére nő a buborék térfogata.

M.5.93.

Megoldás:

p = állandó, izobár állapotváltozás.

$T_1 = 288$ K ; $V_1 = 20$ l ; $V_2 = 0{,}94 \cdot V_1$

$T_2 = ?$

Alkalmazzuk a $\frac{V_2}{T_2} = \frac{V_1}{T_1}$ összefüggést!

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Fejezzük ki a T_2-t, helyettesítsük be az adatokat! $T_2 = \frac{V_2 \cdot T_1}{V_1} = \frac{0{,}94 \cdot V_1 \cdot 288K}{V_1}$ = 271 K

T_2 = 271 K – 273 K = (- 2) °C volt a hőmérséklet szállítás közben.

M.5.94. **Megoldás:**

p = állandó, izobár állapotváltozás. $T_2 = 0{,}78 \cdot T_1$; $V_1 - 0{,}32$ l = V_2 ; $V_1 = V_2 + 0{,}32$ l

V_1 = ?

Alkalmazzuk a $\frac{V_2}{T_2} = \frac{V_1}{T_1}$ összefüggést!

$$\frac{V_2}{0{,}78 \cdot T_1} = \frac{0{,}32 + V_2}{T_1} \qquad V_2 = 1{,}14 \text{ l}$$

$V_1 = 0{,}32 + V_2 = 1{,}46$ l volt a levegő térfogata.

M.5.95.*

Megoldás:

m = 8 g ; p = áll. ; T_1= 273 K ; T_2= 333 K

Az 1 mol normálállapotú hélium térfogata 22,4 dm³.

$n = \frac{m}{M} = \frac{8\,g}{4\frac{g}{mol}} = 2\,mol$ V_1= 2·22,4 dm³ = 44,8 dm³

a) V_2=?

Alkalmazzuk a $\frac{V_2}{T_2} = \frac{V_1}{T_1}$ összefüggést, fejezzük ki a V_2 – t!

$V_2 = \frac{V_1 \cdot T_2}{T_1} = \frac{44{,}8\,dm^3 \cdot 333K}{273K} = 54{,}65\ dm^3$ lesz a hélium sűrűsége.

b) Δρ=?

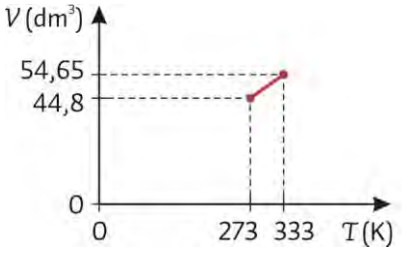
A sűrűség $\rho = \frac{m}{V}$ képletéből fejezzük ki a térfogatot $V = \frac{m}{\rho}$! Helyettesítsük be a $\frac{V_2}{T_2} = \frac{V_1}{T_1}$ összefüggésbe! $\frac{m}{\rho_1 \cdot T_1} = \frac{m}{\rho_2 \cdot T_2}$

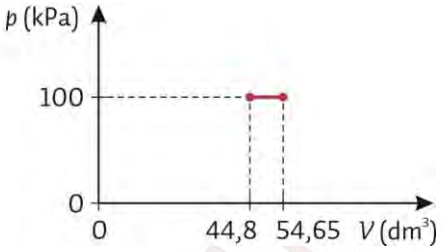
Fejezzük ki a sűrűségek arányát! $\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{T_1}{T_2} = \frac{273K}{333K} = 0{,}82$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

A hélium sűrűsége 18%-kal csökken.





M.5.96.

Megoldás:

p_1 = 400 kPa ; p_t = 500 kPa ; T_1 = 291 K ; p_o = 100 kPa ; p_1 = 400 kPa

A kísérleti kamrában: p_k= 0,4 · 100 kPa = 40 kPa

A kamrában a tartályban lévő maximális nyomás $p_2 = p_t + p_k$ = 540 kPa

V = állandó, izochor állapotváltozás.

T_2 = ?

Alkalmazzuk a $\frac{p_2}{T_2} = \frac{p_1}{T_1}$ összefüggést!

$T_2 = \frac{p_2 \cdot T_1}{p_1} = \frac{540kPa \cdot 291K}{400kPa}$ = 393 K T_2 = 393 K – 273 = 120 °C

A tartály 120 °C-ra melegedhet.

M.5.97.*

Megoldás:

A = 30 cm² ; V = állandó ; m = 120 g ; M = 3 kg ; T_1= 288 K ; p_1 = 120 kPa ; g = 10 $\frac{m}{s^2}$

T_2 = ?

Számítsuk ki a dugattyú és a test által kifejtett nyomást:

$$p = \frac{F}{A} = \frac{(m+M)\cdot g}{A} = \frac{31{,}2\,N}{30\cdot 10^{-4}\,m^2} = 10{,}4\,kPa$$

Alkalmazzuk a $\frac{p_2}{T_2} = \frac{p_1}{T_1}$ összefüggést! p_2 = 120 kPa +10,4 kPa =130,4 kPa

Fejezzük ki a T_2 -t, helyettesítsük be az adatokat!

$$T_2 = \frac{p_2 \cdot T_1}{p_1} = \frac{130{,}4\,kPa \cdot 288K}{120kPa} = 313K$$ = 40 °C – ra melegíthetjük a gázt.

M.5.98.*

Megoldás:

A = 40 cm² ; V=állandó ; m= 100 g ; p_1= 100 kPa ; T_1= 283 K ; T_2 = 295 K

F_r=?

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Tételezzük fel, hogy kezdetben nyújtatlan a rugó. Ekkor a külső légnyomás és a dugattyú súlyából származó nyomás tart egyensúlyt a gáz 100 kPa nyomásával.

Alkalmazzuk a $\frac{p_2}{T_2} = \frac{p_1}{T_1}$ összefüggést!

Fejezzük ki a p_2 -t, helyettesítsük be az adatokat!

$p_2 = \frac{p_1 \cdot T_2}{T_1} = \frac{100kPa \cdot 295K}{283K} = 104kPa$

A megnövekedett nyomásból származó erővel a rugóerő tart egyensúlyt.

A rugóban keletkezett erőt a $p = \frac{F}{A}$ képletből számíthatjuk ki.

$F_r = \Delta p \cdot A = 4\ kPa \cdot 40 \cdot 10^{-4} m^2 = 16\ N$ erő ébred a rugóban.

M.5.99.

Megoldás:

$T_1 = 248\ K$; $V_1 = 8\ m^3$; $p_1 = 1{,}8 \cdot 10^4\ Pa$; $p_2 = 10^5\ Pa$; $T_2 = 293\ K$

$V_2 = ?$

Alkalmazzuk az egyesített gáztörvényt: $\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2}$!

Fejezzük ki a V_2 térfogatot, helyettesítsük be az ismert adatokat!

$V_2 = \frac{p_1 \cdot V_1 \cdot T_2}{p_2 \cdot T_1} = \frac{0{,}18 \cdot 10^5 Pa \cdot 8 m^3 \cdot 293K}{10^5 Pa \cdot 248K} = 1{,}7\ m^3$ lesz a hőlégballon térfogata.

M.5.100.*

Megoldás:

$V = 80\ dm^3 = 8 \cdot 10^{-2}\ m^3$; $R = 8{,}314 \frac{J}{mol \cdot K}$; $m_1 = 14\ kg = 14000\ g$; $p = 1{,}56 \cdot 10^7\ Pa$

Nitrogén: $M = 28 \frac{g}{mol}$

Számítsuk ki a mólok számát: $n = \frac{m}{M} = 500\ mol$

a.) $T = ?$ Alkalmazzuk az állapotegyenletet: $p \cdot V = n \cdot R \cdot T$!

$T = \frac{p \cdot V}{n \cdot R} = \frac{1{,}56 \cdot 10^7 \frac{N}{m^2} \cdot 8 \cdot 10^{-2} m^3}{500 mol \cdot 8{,}314 \frac{J}{mol \cdot K}} = 300\ K - 273\ K = 27\ ^oC$ –on történt a töltés.

b.) V = állandó ; $m_1 = 14\ kg$; $m_2 = 13\ kg$; $T_1 = 300\ K$; $T_2 = 293\ K$

$\Delta m = ?$ $p_1 = 1{,}56 \cdot 10^7\ Pa$; $p_2 = 1{,}24 \cdot 10^7\ Pa$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Alkalmazzuk $\frac{p_1 \cdot V_1}{m_1 \cdot T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{m_2 \cdot T_2}$ összefüggést!

Egyszerűsítsünk a térfogattal, fejezzük ki az m_2-t, írjuk be az adatokat!

$m_2 = \frac{m_1 \cdot T_1 \cdot p_2}{p_1 \cdot T_2} = \frac{14kg \cdot 300K \cdot 1{,}24 \cdot 10^7\,Pa}{1{,}56 \cdot 10^7\,Pa \cdot 293K} = 11{,}4$ kg

Δm = 11,4 kg – 14kg = - 2,6 kg

A palackból 2,6 kg gázt használtak el.

M.5.101.* **Megoldás:**

h_1= 30 m ; h_2= 12 m ; $V_2 = 1{,}84 \cdot V_1$; p_o= 100 kPa ; $\rho = 1025 \frac{kg}{m^3}$; T_1= 281 K ;

g= 10 $\frac{m}{s^2}$

T_2 = ?

Számítsuk ki a p_1 és p_2 nyomást a hidrosztatikai nyomás felhasználásával!

$p_1 = p_o + \rho \cdot g \cdot h$ = 100 kPa + $1025 \frac{kg}{m^3} \cdot 10 \frac{m}{s^2} \cdot 30$ m = 407,5 kPa

p_2=100 kPa + $1025 \frac{kg}{m^3} \cdot 10 \frac{m}{s^2} \cdot 12$ m = 223 kPa

Alkalmazzuk az egyesített gáztörvényt: $\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2}$!

Fejezzük ki a T_2-t, helyettesítsük be az ismert adatokat!

$T_2 = \frac{p_2 \cdot V_2 \cdot T_1}{p_1 \cdot V_1} = \frac{223kPa \cdot 1{,}84 \cdot V_1 \cdot 281K}{407{,}5\,kPa \cdot V_1} = 283K$ = 10 °C a hőmérséklet

12 m mélységben.

M.5.102.

Megoldás:

Jelöljük V_x-szel a szivacs térfogatát. T = állandó, izoterm állapotváltozás.

V_1= 30 cm³ - V_x Alkalmazhatjuk a $p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2$ összefüggést.

V_2= 20 cm³- V_x Helyettesítsük be az ismert mennyiségeket.

p_1= 100 kPa 100 kPa · (30 cm³ - V_x) = 160 kPa · (20 cm³ - V_x)

Egyszerűsítsünk!

p_2 = 160 kPa 10 · (30 cm³ - V_x) = 16· (20 cm³ - V_x)

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

V_x = ? A rendezés után megkapjuk V_x-szet

V_x = 3,33 cm³ a szivacs anyagának térfogata.

M.5.103.

Megoldás:

T = állandó, izoterm állapotváltozás.

p_1= 120 kPa ; l = 25 cm ; l_{Hg} = 4 cm ; ρ_{Hg} = 13600 $\frac{kg}{m^3}$; g= 10 $\frac{m}{s^2}$

x = ?

Számítsuk ki a higanycsepp nyomását: $p_{Hg}= \rho \cdot g \cdot h$ = 13600 $\frac{kg}{m^3}$ ·10 $\frac{m}{s^2}$ · 0,04 m = 5,44 kPa

Lefelé mozdul el a higanycsepp. Alkalmazhatjuk a $p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2$ összefüggést.

Jelöljük A – val a cső keresztmetszetét.

(120 – 5,44) kPa ·A·(25 + x)cm = (120 + 5,44) kPa·A·(25 – x)cm

x = 1,13 cm a higanycsepp elmozdulása.

M.5.104.*

Megoldás:

ρ_{Hg} = 13600 $\frac{kg}{m^3}$; g= 10 $\frac{m}{s^2}$; l_o = 35 cm ; l_{Hg} = 6 cm ; p_o = 100 kPa

Jelöljük az üvegcső keresztmetszetét: A-val!

A higany hidrosztatikai nyomása: $p_{Hg} = \rho_{Hg} \cdot g \cdot h$ = 13600 $\frac{kg}{m^3}$ ·10 $\frac{m}{s^2}$ · 0,06 m = 8,16 kPa

A hőmérsékletet állandónak tekintjük, izoterm állapotváltozás.

a) l_1 = ?

A csőbe zárt levegőoszlop nyomása: a külső nyomás és a higanyoszlop nyomásának különbsége.

$p_o \cdot V_o = p_1 \cdot V_1$

A térfogatot V = A·l képlettel számítjuk:

$p_o \cdot l_o \cdot A = p_1 \cdot l_1 \cdot A$

A keresztmetszettel egyszerűsítünk, kifejezzük l_1-t:

$l_1 = \frac{p_0 \cdot l_0}{p_1} = \frac{100kPa \cdot 35cm}{91{,}84kPa}$ = 38,11 cm hosszú a csepp által bezárt levegőoszlop.

b) l_2 = ?

A külső nyomás és a higanyoszlop nyomása összeadódik!

$p_2 \cdot V_2 = p_o \cdot V_o$; $p_2 \cdot l_2 \cdot A = p_o \cdot l_o \cdot A$

A keresztmetszettel egyszerűsítünk, kifejezzük l_2-t:

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$l_2 = \frac{p_0 \cdot l_0}{p_2} = \frac{100kPa \cdot 35cm}{108{,}16kPa} = 32{,}36$ cm hosszú a csepp által bezárt levegőoszlop.

M.5.105.*

Megoldás:

$\rho_{Hg} = 13600 \frac{kg}{m^3}$; g= 10 $\frac{m}{s^2}$; l_{Hg} = 2 cm

Jelöljük az üvegcső keresztmetszetét: A-val!

A hőmérsékletet állandónak tekintjük, izoterm állapotváltozás.

p = ?

A higany hidrosztatikai nyomása: $p_{Hg} = \rho_{Hg} \cdot g \cdot h = 13600 \frac{kg}{m^3} \cdot 10 \frac{m}{s^2} \cdot 0{,}02$ m = 2,72 kPa

Alkalmazzuk a $p_2 \cdot V_2 = p_1 \cdot V_1$ összefüggést!

(p + 2,72) kPa ·97 mm ·A = (p – 2,72)kPa·102 mm ·A

p = 108 kPa a levegő nyomása.

M.5.106.*

Megoldás:

$V_1 = V_2$; T_1= 283 K ; T_2 = 293 K ; T_1'= 313 K ; T_2'= 323 K ; $p_1 = p_2 = p$

Képzeletben rögzítsük a higanycseppet, a térfogat állandó.

Alkalmazzuk a $\frac{p_2}{T_2} = \frac{p_1}{T_1}$ összefüggést!

$\frac{p_1'}{p_1} = \frac{313K}{283K}$ összefüggésből p_1' = 1,106·p

$\frac{p_2'}{p_2} = \frac{323K}{293K}$ összefüggésből p_2' = 1,102·p

Jobbra mozdul el a higanycsepp 1,106·p > 1,102·p

M.5.107.* Megoldás:

T_1 = 290 K ; T_2 = 293 K ; $p_2 = 1{,}2 \cdot 10^5$ Pa ; $\rho_1 = p_2$; M_1=28 $\frac{g}{mol}$; M_2=32 $\frac{g}{mol}$

p_1= ?

Alkalmazzuk az állapotegyenletet: : $p \cdot V = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T$!

Alakítsuk át, használjuk fel, hogy $\rho = \frac{m}{V}$!

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$\rho = \frac{p \cdot M}{R \cdot T}$ mivel $\rho_1 = p_2$ ezért $\frac{p_1 \cdot M_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot M_2}{T_2}$

$p_1 = \frac{p_2 \cdot M_2 \cdot T_1}{M_1 \cdot T_2} = \frac{120kPa \cdot 32\frac{g}{mol} \cdot 290K}{28\frac{g}{mol} \cdot 293K}$ = 136 kPa nyomáson lesz egyenlő a két gáz sűrűsége.

M.5.108.* Megoldás:

$p_1 = p_2 = 320$ kPa ; $T_1 = 289$ K ; $T_2 = 308$ K ;

$\frac{m_2}{m_1}$ = **?** ; p_3 = ?

Az állapotegyenletet írjuk fel az 1-es és 2-es egyensúlyi állapotra !

1. $p_1 \cdot V_1 = \frac{m_1}{M} \cdot R\, T_1$

2. $p_2 \cdot V_2 = \frac{m_2}{M} \cdot R\, T_2$

A térfogat nem változik: $V_1 = V_2$ és a nyomások is egyenlők: $p_1 = p_2$

A két egyenlet bal oldala egyenlő, így a jobb oldala is.

$\frac{m_2}{M} \cdot R \cdot T_2 = \frac{m_1}{M} \cdot R \cdot T_1$ Az egyszerűsítés után az arány kiszámítható.

$\frac{m_2}{m_1} = \frac{T_1}{T_2} = \frac{289K}{308K} =$ 0,938 A levegő 6,2 % -át engedte ki Kálmán bácsi.

Írjuk fel az egyenletet az 1-es és 3-as állapotra!

A térfogat nem változik: $V_1 = V_3$; $T_3 = 295$ K ; $m_3 = 0{,}938 \cdot m_1$

1. $p_1 \cdot V_1 = \frac{m_1}{M} \cdot R\, T_1$

3. $p_3 \cdot V_3 = \frac{m_3}{M} \cdot R\, T_3$Osszuk el a 3-as egyenletet a 1-sel!

$\frac{p_3}{p_1} = \frac{m_3 \cdot T_3}{m_1 \cdot T_1} = \frac{0{,}938 \cdot m_1 \cdot 295K}{m_1 \cdot 289K} = \frac{p_3}{320kPa}$ $p_3 = 306$ kPa

Az autógumiban lévő nyomás 206 kPa.

M.5.109.* Megoldás:

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

p_1 = 300 kPa ; p_2 = 400 kPa ; V_1 = 8 dm³ ; V_2= 12 dm³
p_k = ?

A csap kinyitása után a térfogatok és az anyagmennyiségek összeadódnak, a nyomás kiegyenlítődik.
Alkalmazzuk az állapotegyenletet:
$p_k \cdot (V_1 + V_2) = (n_1 + n_2) \cdot R \cdot T$ (1)
$p_1 \cdot V_1 = n_1 \cdot R \cdot T$ egyenletből $n_1 = \frac{p_1 \cdot V_1}{R \cdot T}$; a másik tartályra: $n_2 = \frac{p_2 \cdot V_2}{R \cdot T}$

Az anyagmennyiségeket írjuk be az (1) egyenletbe:

$p_k \cdot (V_1 + V_2) = (\frac{p_1 \cdot V_1}{R \cdot T} + \frac{p_2 \cdot V_2}{R \cdot T}) \cdot R \cdot T$ egyszerűsítés után fejezzük ki a nyomást.

$p_k = \frac{p_1 \cdot V_1 + p_2 \cdot V_2}{V_1 + V_2} = \frac{300kPa \cdot 8dm^3 + 400kPa \cdot 12dm^3}{20dm^3}$ =360 kPa
A közös nyomás 360 kPa lett.

TESZTEK

M.5.110.

A következő mértékváltások közül melyik rossz?

a.) 150 °C = 423 K
b.) (- 40) °C = 233 K
c.) 124 °C = 387 K

Megoldás:A c-válasz a helyes: (- 40) °C + 273 = 233 K

M.5.111.

Réka és Tamás azon vitatkoznak, ha a hőmérséklet 20 °C-kal nő a Celsius skálán, akkor mekkora a hőmérséklet - változás a Kelvin – féle skálán?

a.) A Kelvin skálán 20 K- nel nő a hőmérséklet.
b.) A Kelvin skálán 20 K-nél nagyobb mértékben nő a hőmérséklet.
c.) A Kelvin skálán 20 K-nél kisebb mértékben nő a hőmérséklet.

Megoldás:Az a-válasz a helyes. A Kelvin- illetve a Celsius – skálán ugyanaz a fokok nagysága: $\Delta T(°C) = \Delta T(K)$

M.5.112.

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

A rézből készült fémhuzalnak melegítés hatására megváltozik a hossza. A következő állítások közül melyik rossz?

a.) A hosszváltozás fordítottan arányos a hőmérsékletváltozással.

b.) A hosszváltozás egyenesen arányos a kezdeti hosszúsággal.

c.) A hosszváltozás egyenesen arányos a hőmérsékletváltozással.

Megoldás:Az a-válasz a rossz. $\Delta l = l_o \cdot \alpha \cdot \Delta T$

M.5.113.*

Egy tartályban lévő folyadék hőmérséklete a Celsius - skálán mérve a felére csökkent. Melyik állítás igaz?

a.) A Kelvin skálán mérve is felére csökkent a hőmérséklet.

b.) A Kelvin skálán mérve 273-ad részére csökkent a hőmérséklet.

c.) Lehetetlen, hogy a Kelvin – skálán mérve is a felére csökkent a hőmérséklet.

Megoldás:A c-válasz az igaz.

(1) $T(^oC) + 273 = T(K)$ (2) $\frac{T(^0C)}{2} + 273 = \frac{T(K)}{2}$

Helyettesítsük be az (1) egyenletet a (2)-be!

$\frac{T(^0C)}{2} + 273 = \frac{T(^0C)+273}{2}$ $273 \neq \frac{273}{2}$ ami nem lehet igaz!

Megjegyzés: A b) válasz igaz lenne -548°C-ra, azonban ilyen hőmérséklet nem létezik.

M.5.114.

A felsorolt tudósok közül ki az, akinek nem fűződik a nevéhez az ideális gázok állapotváltozását leíró törvény?

a.) Robert Boyle

b.) Antoine Réaumur

c.) Edme Mariotte

Megoldás:A b-válasz a jó. Réaumur hőmérőt készített.

M.5.115.*

A befőttes üveget teletöltjük forró lekvárral (kb 120 °C), majd lezárjuk. Hagyjuk lassan kihűlni (dunsztolás). Miért nehéz kinyitni? A következő válaszok közül melyik hatás a legerősebb?

a.) A tető anyagának nagyobb a hőtágulási együtthatója, mint az üvegnek, ezért „ráhúzódik”az üvegre.

b.) A lekvár fölött légritkított tér keletkezik és a külső légnyomás nagy erőt fejt ki a tetőre.

c.) Nagy a súrlódás a befőttesüveg és a tető között.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Megoldás: A b-válasz a helyes. Ha levegőt engedünk az üvegbe, sokkal könnyebb kinyitni.

M.5.116.

A következő állítások a víz 4 °C-on mérhető térfogatára illetve sűrűségére vonatkoznak. Melyik állítás helytelen?

a.) 4 °C-on legnagyobb a víz sűrűsége.
b.) 4 °C-on legkisebb a víz sűrűsége.
c.) 4 °C-on legkisebb a víz térfogata.

Megoldás:A b-válasz a helytelen. A víznek az a) és c) különleges tulajdonsága.

M.5.117.

Adott tömegű ideális gáz térfogata állandó. Ha változtatjuk a hőmérsékletét, akkor változik a nyomása is. Melyik összefüggés igaz?

a.) A gáz nyomása és Celsius – skálán mért hőmérséklete között fordított arányosság van.
b.) A gáz nyomása és Kelvin – skálán mért hőmérséklete között egyenes arányosság van.
c.) A gáz nyomása és Kelvin– skálán mért hőmérséklete között fordított arányosság van.

Megoldás:A b-válasz a helyes. Gay – Lussac második törvénye.

M.5.118.

A következő grafikonon különböző gázok állapotváltozásait ábrázoltuk nyomás – térfogat diagramon. Melyik állítás a helyes? (5.118. ábra)

a.) Az 1-es grafikon izoterm állapotváltozás.
b.) A 2-es grafikon izobár állapotváltozás.
c.) A 3-as grafikon izochor állapotváltozás.

Megoldás:Az a-válasz a helyes.
Az 1 –es grafikon hiperbola, fordított arányosságot ábrázol, amely izoterm állapotváltozásnak felel meg: $p \cdot V$ = állandó.

M.5.119.

Az 1-es tartályban 16 mol hélium a 2-es tartályban 2 mol oxigén van. A tartályban lévő gázok tömegére mi igaz?

a.) Az 1-es tartályban lévő gáz tömege nagyobb.
b.) A két tartályban lévő gáz tömege egyenlő.
c.) Az 2-es tartályban lévő gáz tömege nagyobb.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Megoldás:A b-válasz a helyes. $n = \frac{m}{M}$ képletből m = n ·M

$m_{He} = 16\ mol \cdot 4\ \frac{g}{mol} = 64\ g$ $m_{oxigén} = 2\ mol \cdot 32\ \frac{g}{mol} = 64\ g$

M.5.120.

Megoldás:A c-válasz a helyes. Az 1-es grafikon jó $\frac{p}{T}$ = állandó, egyenes arányosság.

A 2-es grafikon egyenes arányosságot mutat, ami hibás, izoterm állapotváltozáskor a V és T között nem lehet egyenes arányosság, hiszen a hőmérséklet állandó.

M.5.121.*

Rugalmas falú tartályban állandó tömegű ideális gázt tárolnak. 30%-kal nő a nyomása és 30%-kal csökken a Kelvinben mért hőmérséklete. Melyik az igaz állatás?

a.) Nem változik a térfogata.
b.) Nő a térfogata.
c.) Csökken a térfogata.

Megoldás:A c-válasz a helyes. $\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{1{,}3 \cdot p_1 \cdot V_2}{0{,}7 \cdot T_1}$ A térfogatot csökkenteni kell, hogy az egyenlőség igaz maradjon.

M.5.122.*

Merev falu tartályban 10 kg hidrogén gázt tárolnak állandó hőmérsékleten. A gázt elhasználják. Az újratöltésnél 10 kg oxigén kerül a palackba ugyanazon hőmérsékleten. Melyik állítás a helyes?

a.) Nem változik a nyomása.
b.) Csökken a nyomása.
c.) Nő a nyomása.

Megoldás: A b-válasz a helyes. m;V; T állandó

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$p \cdot V = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T$ képletből $p \cdot M$ = állandó. $M_{oxigén} = 32 \frac{g}{mol} > M_{hidrogén} = 2 \frac{g}{mol}$ tehát a nyomás csökken, (méghozzá 16-od részére).

M.5.123.*

Kör alakú alumínium lemezre 20 °C hőmérsékleten négyzet alakú lyukat vágtak. Ha a hőmérsékletet 10 °C-ra csökkentjük, akkor melyik állítás helytelen?

a.) A kör területe csökken, a négyzet területe nem.

b.) Amilyen arányban csökken a négyzet területe, olyan arányban csökken a kör

területe.

c.) Ahány %-kal csökken a kör területe, annyi %-kal csökken a négyzet területe is.

Megoldás:Az a-válasz a jó. A négyzet területe is csökken, a lyukak mérete úgy változik, mintha ott is anyag lenne.

M.5.124.*

Az ábrán rézlemezből kivágott körcikk látható. A hőmérsékletét 23 °C- kal megnöveljük. (5.124. ábra)

a) A 60 °-os szög nagyobb lesz?

b) A 60 °-os szög nagysága nem változik ?

c) a) A 60 °-os szög kisebb lesz?

Megoldás: A b-válasz a helyes. A körcikk területe arányosan nagyobb lett, hasonló az eredetihez, a szög nagysága nem változik.

M.5.125.

Olyan hőmérőt készítettek, amelyben víz a hőmérsékletet mérő folyadék. A következő állítások közül melyik hamis?

A) Ez a hőmérő az 5 °C-os és a 3 °C-os hőmérsékletet azonosnak mutatná.

B) o °C és 8 °C között a hőmérőn leolvasott érték hamis hőmérsékletet mutatna.

C) A vízzel készült hőmérővel is pontosan lehet hőmérsékletet mérni.

Megoldás: A c) válasz a megoldás.

M.5. 126.

A normál állapotú nitrogéngáz sűrűsége jó közelítéssel hétszerese a normál állapotú héliumgáz sűrűségének. Ha a nitrogéngáz és a héliumgáz hőmérséklete egyenlő, akkor a következő állítások közül melyik igaz?

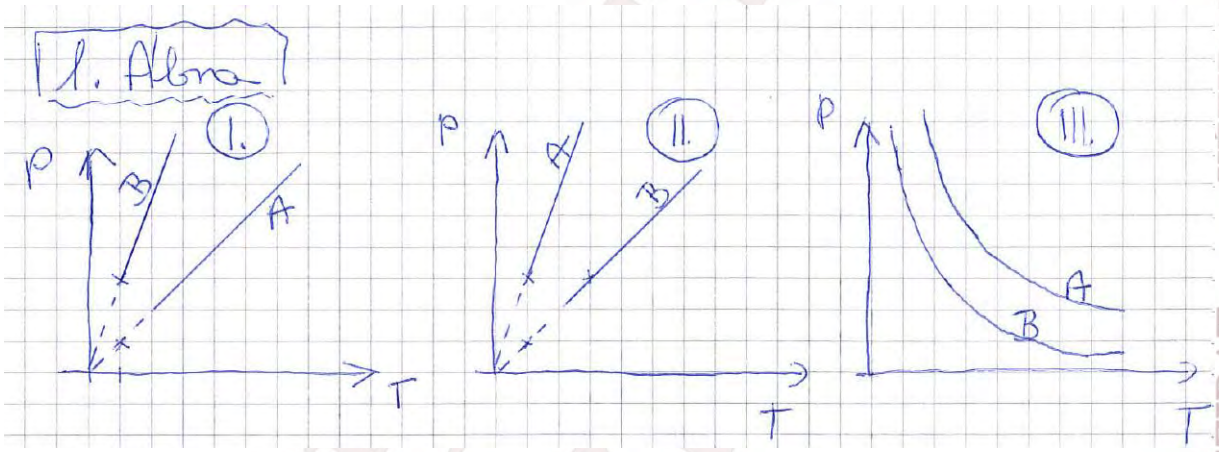
KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

A) A héliumgáz és a nitrogéngáz sűrűsége egyenlő, ha a héliumgáz nyomása hétszerese a nitrogéngáz nyomásának!
B) A héliumgáz és a nitrogéngáz sűrűsége egyenlő, ha a nitrogéngáz nyomása hétszerese a héliumgáz nyomásának!
C) A héliumgáz és a nitrogéngáz sűrűsége egyenlő, ha a nitrogéngáz nyomása egyenlő a héliumgáz nyomásával!
Megoldás: Az a) válasz a jó.

M.5. 127.

Két tartály térfogata egyenlő, mindegyikbe ugyanazt a gázt töltötték. Az *A* tartályba *m* tömegű a *B* tartályba 3*m* tömegű gázt töltöttek. Ha állandó térfogaton melegítjük mindkettő gázt, akkor a következő grafikonok közül melyik ábrázolja helyesen a folyamatot?



A) Az I. grafikon.
B) A II. grafikon.
C) A III. grafikon.
Megoldás: Az a) válasz a jó. A 3 *m* tömegű gázhoz tartozó egyenes háromszor meredekebb.

M.5. 128.

Egy ingaórát szobahőmérsékleten (20 °C) pontosan beállítottak. Melyik igaz az alábbi válaszok közül?
a) 30 °C-os hőmérsékleten siet, 10 °C hőmérsékleten késik.
b) Pontos marad 30 °C-os hőmérsékleten és 10 °C hőmérsékleten is.
c) 30 °C-os hőmérsékleten is és 10 °C hőmérsékleten is siet.
Megoldás: A b) válasz a jó. Az ingarúd végén van az ingatányér, ami a legalján van rögzítve. Ha az ingarúd megnyúlik a hőtágulás miatt, akkor a tányér is kitágul, és a tányér közepe a forgástengely felé mozdul el. A két hatás kiegyenlíti egymást, ezért változhat a hőmérséklet, viszont az inga pontos marad.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

ESSZÉKÉRDÉSEK

M.5.129.

Miért veszélyes a benzinnel teli zárt kannát a tűző napra tenni?
A szilárd és folyékony anyagok térfogata hogyan változik, ha megváltoztatjuk a hőmérsékletüket? Milyen összefüggéseket ismer a térfogatváltozás és az eredeti térfogat illetve a hőmérsékletváltozás között? A térfogati vagy köbös hőtágulási együttható értelmezése. Hasonlítsa össze a szilárd és folyékony anyagok hőtágulási együtthatóját! Ismertessen egy olyan kísérletet, amellyel ismeretlen folyadék hőtágulási együtthatóját lehet meghatározni! Válaszoljon a címben feltett kérdésre! Mondjon egy – egy példát a szilárd és folyékony anyagok hőtágulására a gyakorlatból.

M.5.130.

Egyesített gáztörvény. Az ideális gázok állapotegyenlete.
Milyen fizikai mennyiségekkel írjuk le az ideális gázok állapotát? Melyek az extenzív, illetve az intenzív állapothatározók? Értelmezze az egyesített gáztörvényt! Az egyetemes gázállandó kiszámítása 1 mol normálállapotú gázmennyiséggel. Mondjon legalább két példát az egyesített gáztörvény alkalmazására. Az Avogadro – szám értelmezése. Milyen összefüggés van az Avogadro – szám, a Boltzmann – állandó és az egyetemes gázállandó között? Mikor lehet egy tartályban tárolt gáz anyagi minőségét az állapotegyenlet segítségével meghatározni?

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

KIHÍVÁST JELENTŐ FELADATOK

M.5.131

Megoldás:

V_{Fe}= 20 cm³ ; p_1 = 102 kPa ; T_1 = 283 K ; V_2 = 40 cm³, ρ_{Fe} = 7800 $\frac{kg}{m^3}$

a) ρ_2 = ?

A levegő sűrűsége 0 °C – on és 100 kPa nyomáson ρ_1 = 29 $\frac{kg}{m^3}$.

10 °C – on és 102 kPa nyomáson: $\frac{p_1}{\rho_1 \cdot T_1} = \frac{p_2 \cdot}{\rho_2 \cdot T_2}$; $\rho_2 = \frac{1{,}29\frac{kg}{m^3} \cdot 273K \cdot 102kPa}{100\ kPa \cdot 283K} = 1{,}27\frac{kg}{m^3}$

A mérleg egyensúlyban van, az erőkarok egyenlők, az erők is egyenlők.
A golyókra a levegő felhajtóereje is hat.

$m_{Fe} \cdot g - \rho_{levegő} \cdot V_{Fe} \cdot g = m_2 \cdot g - \rho_{levegő} \cdot V_2 \cdot g$

Alkalmazzuk a $\rho = \frac{m}{V}$ képletet.

$\rho_{Fe} \cdot V_{Fe} - \rho_{levegő} \cdot V_{Fe} = \rho_2 \cdot V_2 - \rho_{levegő} \cdot V_2$

20 cm³ $\cdot(7800\ \frac{kg}{m^3} - 1{,}27\frac{kg}{m^3}) = 40\ cm^3 \cdot(\rho_2 - 1{,}27\frac{kg}{m^3})$

ρ_2 = 3900,6 $\frac{kg}{m^3}$ a sűrűsége a 40 cm³ – es golyónak.

b) T_2 = 293 K

A felhajtóerő változik, mert változik a levegő sűrűsége.

Alkalmazzuk a $\frac{p_1}{\rho_1 \cdot T_1} = \frac{p_2 \cdot}{\rho_2 \cdot T_2}$ összefüggést. $p_1 = p_2$

$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{T_1}{T_2} = \frac{283K}{293K} = 0{,}97$ A sűrűség csökken, mivel a jobb oldalon lévő golyó térfogata nagyobb, ezért ott nagyobb mértékben csökken a felhajtóerő, tehát jobbra billen a mérleg.

c) p_2 = 100 kPa ; $T_1 = T_2$

Alkalmazzuk a $\frac{p_1}{\rho_1 \cdot T_1} = \frac{p_2 \cdot}{\rho_2 \cdot T_2}$ összefüggést.

$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{p_2}{p_1} = \frac{100kPa}{102kPa} = 0{,}98$ Csökken a levegő sűrűsége, ismét jobbra billen a mérleg.

KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.5.132

Megoldás:

a) Alkalmazzuk a fonalinga lengésidejének a képletét: $T = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g}}$

Ha nő a hőmérséklet, akkor hosszabb lesz a rézdrót, hőtágulás. Ha hosszabb lesz a rézdrót, akkor nő a lengésidő $T\sim\sqrt{l}$.

b) $T_1 = 10\ ^oC$, $\alpha = 1{,}6\cdot10^{-5}\frac{1}{^oC}$ $n_1 = 100$, $n_2 = 99$

$T_2 = ?$

Jelöljük t- vel az adott időtartamot, akkor egy lengés ideje: $\frac{t}{100}$; $\frac{t}{99}$.

Alkalmazzuk a fonalinga lengésidejének a képletét: $T = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g}}$

$\frac{t}{100} = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{l_1}{g}}$ (1) az inga hossza melegítés hatására nagyobb lesz: $l_2 = l_1\cdot(1+\alpha\cdot\Delta T)$.

A lengésidő: $\frac{t}{99} = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{l_1\cdot(1+\alpha\cdot\Delta T)}{g}}$ (2)

Osszuk el a (2) egyenletet az (1) egyenlettel! Egyszerűsítsünk!

$$\frac{100}{99} = \sqrt{1+\alpha\cdot\Delta T}$$

Ebből a ΔT, az α behelyettesítése után: $\Delta T = 1269\ ^oC$.

A $T_2 = T_1 + \Delta T = 1279\ ^oC$. Nem valósítható meg, mert a réz olvadáspontja 1020°C, tehát megolvad a rézdrót!

M.5.133

Megoldás:

$V_1 = 4\ dm^3$

$V_2 = 3\ dm^3$

$p_1 = p_2 = 200\ kPa$

$A = 230\ cm^2$

$m^* = \frac{2}{3}m$

a) $\Delta l = ?$

Az 1-es tartályra írjuk fel az állapotegyenletet a gáz kiengedése előtt és a gáz kiengedése után. A gáz kiengedése után kialakult közös nyomást p-vel jelöljük. Az 1-es tartályrész térfogata ΔV-vel csökken, a 2-es rész térfogata ΔV-vel nő:

$p_1\cdot V_1 = \frac{m}{M}\cdot R\cdot T$ (1)

$p\cdot(V_1-\Delta V) = \frac{\frac{2}{3}m}{M}\cdot R\cdot T$ (2)

Osszuk el a (2)-es egyenletet az (1)-es egyenlettel, és helyettesítsük be az adatokat:

$\frac{p\cdot(4dm^3-\Delta V)}{200kPa\cdot4dm^3} = \frac{2}{3}$ $\qquad p\cdot(4dm^3-\Delta V) = \frac{1600}{3}\ kPa\cdot dm^3$ (3)

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

A 2-es részre írjuk fel a Boyle–Mariotte-törvényt! Helyettesítsük be az adatokat!

$p_2 \cdot V_2 = p \cdot (V + \Delta V)$ $\quad p \cdot (3\,dm^3 + \Delta V) = 200\ kPa \cdot 3\,dm^3$ $\quad (4)$

Osszuk el a (3)-as egyenletet a (4)-es egyenlettel, számítsuk ki a ΔV-t:

$$\frac{4 - \Delta V}{3 + \Delta V} = \frac{8}{9}$$

$\Delta V = \frac{12}{17}\ dm^3 \approx 0{,}706\ dm^3$

$\Delta V = A \cdot \Delta l$

Fejezzük ki a Δl elmozdulást és helyettesítsük be az adatokat!

$\Delta l = \frac{\Delta V}{A} = \frac{706\ cm^3}{230\ cm^2} = 3{,}07\ cm \approx 3$ cm.

A dugattyú elmozdulása jó közelítéssel 3 cm.

b) p = ?

Helyettesítsük be a ΔV értékét a (4)-es egyenletbe.

$p \cdot 3{,}706 dm^3 = 600\ kPa \cdot dm^3$ $\quad p = 161{,}9\ kPa \approx 160\ kPa$

A gáz kiengedése után mindkét részben a nyomás hozzávetőlegesen 160 kPa lesz.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.6. TERMODINAMIKA

ALAPOZÓ FELADATOK

A gáz nyomása, hőmérséklete

M.6.1

Megoldás:

A neon moláris tömege: $M = 20 \frac{g}{mol}$

$m = 12\ g$ $\qquad N_A = A = 6 \cdot 10^{23} \frac{1}{mol}$

a.) $n = ?$ $\qquad$ A mólok száma: $n = \frac{m}{M} = \frac{12g}{20 \frac{g}{mol}} = = 0{,}6$ mol

A gáz anyagmennyisége 0,6 mol.

b.) $N = ?$ Használjuk fel az Avogadro számot! $N = n \cdot N_A = 0{,}6 \cdot 6 \cdot 10^{23} = 3{,}6 \cdot 10^{23}$

A palackban $3{,}6 \cdot 10^{23}$ atom van.

M.6.2

Megoldás:

Az oxigén moláris tömege: $M = 32 \frac{g}{mol}$

$m = 4$ kg $\qquad N_A = A = 6 \cdot 10^{23} \frac{1}{mol}$

a.) $n = ?$ $\qquad$ A mólok száma: $n = \frac{m}{M} = \frac{4000g}{32 \frac{g}{mol}} = = 125$ mol

A gáz anyagmennyisége 125 mol.

b.) $N = ?$ Használjuk fel az Avogadro számot! $N = n \cdot N_A = 125 \cdot 6 \cdot 10^{23} = 7{,}5 \cdot 10^{25}$

A palackban $7{,}5 \cdot 10^{25}$ molekula van.

M.6.3

Megoldás:

A nitrogén moláris tömege: $M = 28 \frac{g}{mol}$; $N_A = A = 6 \cdot 10^{23} \frac{1}{mol}$

$N = 4{,}2 \cdot 10^{26}$

$m = ?$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$n = \frac{N}{N_A}$ továbbá $n = \frac{m}{M}$, ezért: $\frac{N}{N_A} = \frac{m}{M}$!

Fejezzük ki a tömeget, helyettesítsük be az adatokat!

$$m = M \cdot \frac{N}{N_A} = 28\frac{g}{mol} \cdot \frac{4{,}2 \cdot 10^{26}}{6 \cdot 10^{23}\frac{1}{mol}} = 19{,}6\ kg$$

A gáz tömege 19,6 kg.

M.6.4

Megoldás:

A neon moláris tömege: $M = 20\ \frac{g}{mol}$

Vegyünk 1 mol neont, 1 mol neon tömege 20 g, mert $m = n \cdot M$!

1 mólban azaz 20 g neonban $6 \cdot 10^{23}$ atom van (Avogadro szám).

Jelöljük m_o-lal 1 neon atom tömegét!

$m_o = \frac{20g}{6 \cdot 10^{23}} = 3{,}33 \cdot 10^{-23}$ g $= 3{,}33 \cdot 10^{-26}$ kg egy neon atom tömege!

M.6.5

Megoldás:

$V = 5$ l $= 5 \cdot 10^{-3}$ m³

$T = 293$ K

$p = 160$ kPa

$N = ?$

$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \frac{J}{K}$

Alkalmazzuk a $p \cdot V = N \cdot k \cdot T$ állapotegyenletet !

Fejezzük ki a N részecskeszámot, majd helyettesítsük be az adatokat!

$$N = \frac{p \cdot V}{k \cdot T} = \frac{1{,}6 \cdot 10^5 \frac{N}{m^2} \cdot 5 \cdot 10^{-3} m^3}{1{,}38 \cdot 10^{-23}\frac{J}{K} \cdot 293K} = 1{,}98 \cdot 10^{23}$$

A gázpalackban $1{,}98 \cdot 10^{23}$ részecske van.

M.6.6

Megoldás:

$V = 10$ l $= 10^{-2}$ m³

$T = 290$ K

$N = 2{,}5 \cdot 10^{24}$ db

$p = ?$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

k= 1,38 ·10⁻²³ $\frac{J}{K}$

Alkalmazzuk a p · V = N · k · T állapotegyenletet !
Fejezzük ki a p nyomást, majd helyettesítsük be az adatokat!

$$p = \frac{N \cdot k \cdot T}{V} = \frac{2{,}5 \cdot 10^{24} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K} \cdot 290 K}{10^{-2}\,m^3} = 1\,MPa$$

A gáz nyomása 1 MPa.

M.6.7

Megoldás:
V = 15 l = 1,5·10⁻² m³
N = 8,2·10²³ db
p= 226 kPa
T = ?

k= 1,38 ·10⁻²³ $\frac{J}{K}$

Alkalmazzuk a p · V = N · k · T állapotegyenletet !
Fejezzük ki a T hőmérsékletet, majd helyettesítsük be az adatokat!

$$T = \frac{p \cdot V}{N \cdot k} = \frac{226\,kPa \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-2}\,m^3}{8{,}2 \cdot 10^{23} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}} = 299{,}6\,K \approx 300\ K$$

A gáz hőmérséklete 300 K ; 27 °C.

M.6.8

Megoldás:
N = 5,4·10²⁵
p= 250 kPa
T = 290 K
V = ?

k= 1,38 ·10⁻²³ $\frac{J}{K}$

Alkalmazzuk a p · V = N · k · T állapotegyenletet !
Fejezzük ki a V térfogatot, majd helyettesítsük be az adatokat!

$$V = \frac{N \cdot k \cdot T}{p} = \frac{5{,}4 \cdot 10^{25} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K} 290\,K}{250\,kPa} = 0{,}864\ m^3 = 864\ dm^3$$

A tartály térfogata 864 dm³.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.6.9

Megoldás:

p= 230 kPa

m = 30 kg

V = 2 m³

v = ?

Alkalmazzuk a $p \cdot V = \frac{m \cdot v^2}{3}$ összefüggést, fejezzük ki a v-t !

Helyettesítsük be az adatokat!

$$v = \sqrt{\frac{3 \cdot p \cdot V}{m}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 230\,\text{kPa} \cdot 2\text{m}^3}{30\,\text{kg}}} = 214\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

A gázrészecskék átlagos sebessége: $214\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

M.6.10

Megoldás:

p= 2,4 MPa

m = 1,1 kg

$v = 180\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

V = ?

Alkalmazzuk a $p \cdot V = \frac{m \cdot v^2}{3}$ összefüggést, fejezzük ki a V-t !

Helyettesítsük be az adatokat!

$$V = \frac{m \cdot v^2}{3 \cdot p} = \frac{1{,}1\ kg \cdot 3{,}24 \cdot 10^4\ \frac{m^2}{s^2}}{3 \cdot 2{,}4 \cdot 10^6\ Pa} = 4{,}95 \cdot 10^{-3}\text{m}^3 \approx 5\ liter$$

A palack térfogata 5 liter.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.6.11

Megoldás:

m = 0,5 kg

$v = 120 \frac{m}{s}$

V = 15 l = 1,5 ·10⁻² m³

p = ?

Alkalmazzuk a $p \cdot V = \frac{m \cdot v^2}{3}$ összefüggést, fejezzük ki a p nyomást !

Helyettesítsük be az adatokat!

$$p = \frac{m \cdot v^2}{3 \cdot V} = \frac{0{,}5\ kg \cdot 1{,}44 \cdot 10^4 \frac{m^2}{s^2}}{3 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-2}\ m^3} = 160\ \text{kPa}$$

A gáz nyomása 160 kPa.

M.6.12

Megoldás:

$v = 200 \frac{m}{s}$

V = 20 l = 2·10⁻² m³

p = 7,4 MPa

m = ?

Alkalmazzuk a $p \cdot V = \frac{m \cdot v^2}{3}$ összefüggést, fejezzük ki az m-t !

Helyettesítsük be az adatokat!

$$m = \frac{3 \cdot p \cdot V}{v^2} = \frac{3 \cdot 7{,}4 \cdot 10^6\ Pa \cdot 2 \cdot 10^{-2}\ m^3}{4 \cdot 10^4 \frac{m^2}{s^2}} = 11{,}1\ \text{kg}$$

A gáz tömege 11,1 kg.

A gáz belső energiája, a hőtan I. főtétele

M.6.13

Megoldás:

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

m = 120 g A hélium atomtömege: M = 4 $\frac{g}{mol}$. Szabadsági fokok száma: 3

R = 8,314 $\frac{J}{molK}$ Számítsuk ki az anyagmennyiséget! n = $\frac{m}{M}$ = 30 mol

E_b = 130 kJ Alkalmazzuk a belső energia kiszámítására kapott összefüggést!

T = ? $E_b = \frac{f}{2} \cdot n \cdot R \cdot T = \frac{3}{2} \cdot n \cdot R \cdot T$

Fejezzük ki a hőmérsékletet, helyettesítsük be az adatokat!

$$T = \frac{2 \cdot E_b}{3 \cdot n \cdot R} = \frac{2 \cdot 130000 J}{3 \cdot 30\ mol \cdot 8{,}314 \frac{J}{mol \cdot K}} = 347\ K = 74\ ^oC$$

A hélium hőmérséklete 74 °C.

M.6.14.

Megoldás:

A nitrogén moláris tömege: M = 28 $\frac{g}{mol}$ f = 5 R = 8,314 $\frac{J}{molK}$

m = 8 kg Számítsuk ki az anyagmennyiséget! n = $\frac{m}{M}$ = 286 mol

T = 285 K

E_b = ?

Alkalmazzuk a belső energia kiszámítására kapott összefüggést!

$$E_b = \frac{f}{2} \cdot n \cdot R \cdot T = \frac{5}{2} \cdot 286\ mol \cdot 8{,}314 \frac{J}{molK} \cdot 285\ K = 1{,}69\ MJ$$

A gáz belső energiája 1,69 MJ.

M.6.15

Megoldás:

f = 3 ; k = 1,38 ·10^{-23} $\frac{J}{K}$

N = 3·10^{24}

T = 293 K

E_b = ?

Alkalmazzuk a belső energia kiszámítására kapott összefüggést!

$$E_b = \frac{f}{2} \cdot N \cdot k \cdot T = \frac{3}{2} \cdot 3 \cdot 10^{24} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K} \cdot 293\ K = 18{,}2\ kJ$$

A gáz belső energiája 18,2 kJ.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.6.16

Megoldás:

f = 3 ; R = 8,314 $\frac{J}{molK}$

n = 150 mol

T = 291 K

E_b = ?

Alkalmazzuk a belső energia kiszámítására kapott összefüggést!

$E_b = \frac{f}{2} \cdot n \cdot R \cdot T = \frac{3}{2} \cdot 150\ mol \cdot 8{,}314 \frac{J}{molK} \cdot 291\ K = 544\ kJ$

A gáz belső energiája 544 kJ.

M.6.17

Megoldás:

$\Delta V = 1{,}8\ dm^3$

p = 120 kPa

W = ?

Alkalmazzuk a térfogati munka kiszámítására kapott képletet!

$W = - p \cdot \Delta V = - 120\ kPa \cdot 1{,}8 \cdot 10^{-3}\ m^3 = - 216\ J$

A térfogati munka – 216 J.

M.6.18

f = 5 ; k = 1,38 $\cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$

T = 295 K

E_b = 150 kJ

N = ?

Alkalmazzuk a belső energia kiszámítására kapott összefüggést!

$E_b = \frac{f}{2} \cdot N \cdot k \cdot T$ Fejezzük ki az N részecskeszámot, majd helyettesítsük be az adatokat.

$$N = \frac{2 \cdot E_b}{f \cdot k \cdot T} = \frac{2 \cdot 150 \cdot 10^3\ J}{5 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K} \cdot 295 K} = 1{,}47 \cdot 10^{25}$$

A tartályban 1,47 $\cdot 10^{25}$ molekula van.

M.6.19

Megoldás:

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

f = 3 ; R = 8,314 $\frac{J}{molK}$

E_b = 240 kJ

T = 293 K

n = ?

Alkalmazzuk a belső energia kiszámítására kapott összefüggést!

$E_b = \frac{f}{2} \cdot n \cdot R \cdot T$ Fejezzük ki az n anyagmennyiséget, majd helyettesítsük be az adatokat.

$$n = \frac{2 \cdot E_b}{f \cdot R \cdot T} = \frac{2 \cdot 240 \cdot 10^3 \, J}{3 \cdot 8{,}314 \cdot \frac{J}{mol \cdot K} \cdot 293 K} = 65{,}7 \text{ mol}$$

A tartályban 65,7 mol gáz van.

M.6.20

Megoldás:

f = 5

p = 180 kPa

V = 15 l = 15 dm^3

E_b = ?

Alkalmazzuk a belső energia kiszámítására kapott összefüggést!

$E_b = \frac{f}{2} \cdot p \cdot V$ Helyettesítsük be az adatokat!

$E_b = 1{,}5 \cdot 180 \cdot 10^3 \, Pa \cdot 15 \cdot 10^{-3} \, m^3 = 6{,}75$ kJ

Az oxigén belső energiája 6,75 kJ.

M.6.21

Megoldás:

R = 8,314 $\frac{J}{molK}$

E_b = 240 kJ

T = 300,7 K

n = 32 mol

f = ?

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Alkalmazzuk a belső energia kiszámítására kapott összefüggést!

$E_b = \frac{f}{2} \cdot n \cdot R \cdot T$ Fejezzük ki az f – t, helyettesítsük be az adatokat.

$$f = \frac{2 \cdot E_b}{n \cdot R \cdot T} = \frac{2 \cdot 240 \cdot 10^3 J}{32mol \cdot 8{,}314 \frac{J}{mol \cdot K} \cdot 300{,}7K} = 6$$

A gáz szabadsági foka 6.

M.6.22

Megoldás:

p = 120 kPa
V = 10 l = 10 dm³
E_b = 3000 J
f = ?
Alkalmazzuk a belső energia kiszámítására kapott összefüggést!

$E_b = \frac{f}{2} \cdot p \cdot V$ Fejezzük ki az f szabadsági fokot, majd helyettesítsük be az adatokat!

$$f = \frac{2 \cdot E_b}{p \cdot V} = \frac{2 \cdot 3000J}{120 \cdot 10^3 Pa \cdot 10^{-2} m^3} = 5$$

A gáz szabadsági foka 5.

.M.6.23

Megoldás:

$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$

T = 295 K
E_b = 1099 J
N = 1,8·10²³
f = ?

Alkalmazzuk a belső energia kiszámítására kapott összefüggést!

$E_b = \frac{f}{2} \cdot N \cdot k \cdot T$ Fejezzük ki az f – t, helyettesítsük be az adatokat.

$$f = \frac{2 \cdot E_b}{N \cdot k \cdot T} = \frac{2 \cdot 1099J}{1{,}8 \cdot 10^{23} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K} \cdot 295K} = 3$$

A gáz szabadsági foka 3.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.6.24

Megoldás:

$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$

T = 297 K

$E_{omozg.}$ = ?

Alkalmazzuk az átlagos haladási mozgási energia kiszámítására kapott összefüggést!

$$E_{0mozg.} = \frac{3}{2} \cdot k \cdot T = 1{,}5 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K} \cdot 297K = 6{,}15 \cdot 10^{-21} J$$

Egy gázrészecske átlagos haladási mozgási energiája: 6,15. $\cdot 10^{-21}$J.

M.6.25

Megoldás:

$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$

T = 297 K

$E_{omozg.} = 6{,}06 \cdot 10^{-21}$J

Alkalmazzuk a mozgási energia kiszámítására kapott összefüggést!

$E_{0mozg.} = \frac{3}{2} \cdot k \cdot T$ Fejezzük ki a T – t, helyettesítsük be az adatokat.

$$T = \frac{2 \cdot E_{0mozg.}}{3 \cdot k} \quad \frac{2 \cdot 6{,}06 \cdot 10^{-21} J}{3 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}} = 293K = 20\ ^oC$$

A gáz hőmérséklete 20 °C.

M.6.26

Megoldás: $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$

T = 27 °C = 300 K

$v = 1926 \frac{m}{s}$

m_o = ?

Egy részecske átlagos haladási mozgási energiája : $\frac{1}{2} \cdot m_0 \cdot v^2 = \frac{3}{2} \cdot k \cdot T$

Fejezzük ki az m_o részecsketömeget, majd helyettesítsük be az adatokat!

$$m_0 = \frac{3 \cdot k \cdot T}{v^2} = \frac{3 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K} \cdot 300K}{1926^2 \frac{m^2}{s^2}} = 3{,}35 \cdot 10^{-27} kg$$

Egy részecske tömege 3,35 $\cdot 10^{-27}$ kg.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.6.27

Megoldás:

T = 19 °C = 292 K Egy részecske átlagos haladási mozgási energiája : $\frac{1}{2}\cdot m_0\cdot v^2=\frac{3}{2}\cdot k\cdot T$

m_o = 2,85 · 10^{-26} kg Fejezzük ki a v sebességet, majd helyettesítsük be az adatokat!

k = 1,38 ·$10^{-23}\frac{J}{K}$

v = ? $v=\sqrt{\frac{3\cdot k\cdot T}{m_0}}=\sqrt{\frac{3\cdot 1{,}38\cdot 10^{-23}\frac{J}{K}\,292K}{2{,}85\cdot 10^{-26}\,kg}}=651\,\frac{m}{s}$

A gázrészecske átlagos sebessége 651 $\frac{m}{s}$.

Állapotváltozások energetikai vizsgálata

M.6.28

Megoldás:

p = 140 kPa

W = - 260 J Alkalmazzuk a térfogati munka képletét! W= - p·ΔV

ΔV = ? Fejezzük ki a ΔV – t, helyettesítsük be az adatokat!

$\Delta V=\frac{W}{p}=\frac{260\,J}{140\,kPa}=1{,}86\ dm^3$

A gáz térfogata 1,86 dm^3 – rel nőtt.

M.6.29

Megoldás:

W = 310 J Alkalmazzuk a térfogati munka képletét! W= - p·ΔV

ΔV = - 2,2 dm^3? Fejezzük ki a p nyomást, majd helyettesítsük be az adatokat!

p = ?

$p=\frac{W}{-\Delta V}=\frac{310}{2{,}2\cdot 10^{-3}m^3}=141\,kPa$

A gáz nyomása 141 kPa.

M.6.30.

Megoldás:

V_1= 8 dm^3 Alkalmazzuk a térfogati munka képletét! W= - p·ΔV

V_2 = 12 dm^3 Helyettesítsük be az adatokat!

p = 180 kPa

ΔV = 4 dm^3

W = ? W= - p·ΔV = - 180·10^3 Pa· 4·10^{-3} m^3 = - 720 J

A térfogati munka (- 720 J).

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.6.31

Megoldás:

m = 1,5 kg
T_1 = 20 °C
T_2 = - 10 °C
ΔT = 30 °C

$c_V = 653 \frac{J}{kg \cdot {}^0C}$

a.) ΔE_b = ? Alkalmazzuk a belső energia kiszámítására kapott összefüggést!

Helyettesítsük be az adatokat! $\Delta E_b = c_V \cdot m \cdot \Delta T = 653 \frac{J}{kg \cdot {}^0C} \cdot 1{,}5 \text{ kg} \cdot (-30)\ ^\circ\text{C} = -29{,}4 \text{ kJ}$

A belső energia megváltozása -29,4 kJ.

b.) W = ? Adiabatikus állapotváltozás: Q = 0 ! ΔE_b = W = -29,4 kJ
A munkavégzés -29,4 kJ, a gáz adiabatikusan tágul.

M.6.32

Megoldás:

m = 80 g
T_1 = 25 °C
T_2 = 40 °C
ΔT = 15 °C
$c_V = 710 \frac{J}{kg \cdot {}^0C}$

a.) ΔE_b = ? Alkalmazzuk a belső energia kiszámítására kapott összefüggést!

Helyettesítsük be az adatokat! $\Delta E_b = c_V \cdot m \cdot \Delta T = 710 \frac{J}{kg \cdot {}^0C} \cdot 0{,}08 \text{ kg} \cdot 15\ ^\circ\text{C} = 852 \text{ J}$

A belső energia 852 J – al nőtt.

b.) W = ? Adiabatikus állapotváltozás: Q = 0 ! ΔE_b = W = 852 J
A munkavégzés 852 J, a gáz adiabatikusan összenyomódott.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.6.33.

a.) Mennyi hőközlés történt a gázzal melegítés közben?
b.) Mennyivel nőtt a szén - dioxid belső energiája?

Megoldás:

V = állandó
Izochor állapotváltozás

$c_V = 632 \frac{J}{kg^0C}$

m = 10 kg
T_1 = 20 °C
T_2 = 35 °C

a.) Q = ? Alkalmazzuk a hőmennyiség kiszámítására kapott összefüggést!

$$\mathbf{Q} = c_V \cdot m \cdot \Delta T = 632 \frac{J}{kg \cdot ^0C} \cdot 10\ kg \cdot 15\ ^oC = 94{,}8\ kJ$$

A gázzal közölt hőmennyiség 94,8 kJ.

b) ΔE_b = ?

Alkalmazzuk a hőtan I. főtételét: $\Delta E_b = Q + W$!

W = 0 , mert V = állandó! $\Delta E_b = Q = 94{,}8$ kJ

A belső energia megváltozása 94,8 kJ.

M.6.34

Mekkora a hőkapacitása?

Megoldás:

$c_V = 653 \frac{J}{kg^0C}$

m = 12 kg
ΔT = 25 °C
Q = ? Alkalmazzuk a hőközlés kiszámítására megismert összefüggést!
C = ?

$$\mathbf{Q} = c_V \cdot m \cdot \Delta T = 653 \frac{J}{kg \cdot ^0C} \cdot 12\ kg \cdot 25\ ^oC = 195{,}9\ kJ$$

A felvett hő 195,9 kJ.

Alkalmazzuk a hőkapacitás kiszámítására kapott összefüggést!

$$C = \frac{Q}{\Delta T} = \frac{195{,}9 kJ}{25^0 C} = 7{,}84 \frac{kJ}{^0C}$$

Az oxigén hőkapacitása állandó térfogaton $7{,}84 \frac{kJ}{^0C}$.

M.6.35

Mekkora a hőkapacitása?

Megoldás:

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$c_V = 740 \frac{J}{kg^0C}$

m = 8 kg

ΔT = - 20 °C

Q = ? Alkalmazzuk a hő kiszámítására megismert összefüggést!

C = ? $\mathbf{Q} = c_V \cdot m \cdot \Delta T = 740 \frac{J}{kg \cdot ^0C} \cdot 8\ kg \cdot (-20\ ^oC) = 118{,}4\ kJ$

A környezetnek átadott hő 118,4 kJ.

Alkalmazzuk a hőkapacitás kiszámítására kapott összefüggést!

$C = \frac{Q}{\Delta T} = \frac{118{,}4\ kJ}{20^0C} = 5{,}92 \frac{kJ}{^0C}$

A nitrogén hőkapacitása állandó térfogaton $5{,}92 \frac{kJ}{^0C}$.

M.6.3M.6.

Megoldás:

m = 110 g

ΔT = 28 °C

Q = 1200 J

a) C_p = ?

Alkalmazzuk a hőkapacitás kiszámítására kapott összefüggést!

$C_p = \frac{Q}{\Delta T} = \frac{1200\,J}{28^0C} = 43 \frac{J}{^0C}$

A gáz hőkapacitás állandó nyomáson $43 \frac{J}{^0C}$.

c_p = ? Alkalmazzuk a fajhő kiszámítására kapott összefüggést!

$c_p = \frac{C}{m} = \frac{42{,}86 \frac{J}{^0C}}{0{,}11kg} = 390 \frac{J}{kg \cdot ^0C}$

A gáz fajhője állandó nyomáson $390 \frac{J}{kg^0C}$.

M.6.37.

Megoldás:

$c_p = 1030 \frac{J}{kg^0C}$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$\Delta T = 28\ ^oC$
$Q = 1800\ J$ Alkalmazzuk a hő kiszámítására kapott összefüggést!
$m = ?$ $\mathbf{Q} = c_p \cdot m \cdot \Delta T$

Fejezzük ki az m tömeget, majd helyettesítsük be az adatokat!

$$m = \frac{Q}{c_p \cdot \Delta T} = \frac{1800J}{1030\frac{J}{kg \cdot {}^0C} \cdot 28^0C} = 62{,}4\ g$$

A neon tömege 62,4 g.

M.6.38.

Megoldás:

$c_p = 997\frac{J}{kg^0C}$

$Q = 1650\ J$ Alkalmazzuk a hő kiszámítására kapott összefüggést!
$m = 160\ g$ $\mathbf{Q} = c_p \cdot m \cdot \Delta T$
$\Delta T = ?$

Fejezzük ki a ΔT hőmérséklet - változást, majd helyettesítsük be az adatokat!

$$\Delta T = \frac{Q}{c_p \cdot m} = \frac{-1650J}{997\frac{J}{kg \cdot {}^0C} \cdot 0{,}16kg} = -10{,}3\ ^oC$$

A levegő hőmérséklete 10,3 °C – kal csökkent.

A hőtan II. főtétele

M.6.39

Megoldás:

$Q_1 = 1200\ J$

$Q_2 = 800\ J$ Alkalmazzuk az $\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$ összefüggést!

$\eta = ?$ Helyettesítsük be az adatokat!

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{800J}{1200J} = 0{,}33$$

A hőerőgép hatásfoka 33 %.

M.6.40

Megoldás:

$Q_2 = 1400\ J$ Alkalmazzuk az $\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$ összefüggést!

$\eta = 22\ \% = 0{,}22$ Fejezzük ki a Q_1 felvett hőt, majd helyettesítsük be az adatokat!
$Q_1 = ?$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$$O_1 = \frac{Q_2}{1-\eta} = \frac{1400\,J}{1-0{,}22} = 1795\,J$$

A kazánból felvett hő 1795 J.

M.6.41

Megoldás:

Q_1 = 1100 J Alkalmazzuk az $\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$ összefüggést!

η= 26 % = 0,26 Fejezzük ki a Q_2 leadott hőt, majd helyettesítsük be az adatokat!

Q_2 = ?

$$Q_2 = Q_1 \cdot (1-\eta) = 1100J \cdot (1-0{,}26) = 814\,J$$

A hűtőnek leadott hő 814 J.

M.6.42

Megoldás:

Q_2 = 600 J

Q_1 = 700 J Alkalmazzuk az $\eta = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2}$ összefüggést!

η= ? Helyettesítsük be az adatokat!

$$\eta = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2} = \frac{600J}{100J} = 6$$

A hűtőgép hatásfoka 12.

M.6.43

Megoldás:

Q_1 = 900 J

η= 5,4 Alkalmazzuk az $\eta = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2}$ összefüggést!

Q_2 = ? Fejezzük ki a Q_2 elvont hőt és helyettesítsük be az adatokat!

$$Q_2 = \frac{\eta \cdot Q_1}{1+\eta} = \frac{5{,}4 \cdot 900J}{6{,}4} = 760J$$

A hűtőszekrény belsejéből elvont hő 760 J.

M.6.44.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Megoldás:

$T_1 = 295$ K

$T_2 = 281$ K

η= ?

Használjuk a hőerőgépek hatásfokára kapott összefüggést!

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{295K - 281K}{295K} = 0{,}047$$

A hőerőgép hatásfoka ideális esetben mindössze 4,7 % lenne. A valóságban a fellépő súrlódási veszteségek miatt ezzel a módszerrel nem tudunk hőerőgépet működtetni ilyen kis hőmérsékletkülönbség esetén.

M.6.45

Megoldás:

T_1= 294 K

$T_2 = 277$ K

η=?

Alkalmazzuk a hatásfok kiszámítására kapott képletet!

$$\eta = \frac{T_2}{T_1 - T_2} = \frac{277K}{294K - 277K} = 16{,}29$$

A hőszivattyú jósági tényezője ideális esetben 16,3 lenne. A valóságban a külső levegő hőjét használó hőszivattyúk legfeljebb a 3-as jósági tényező értéket érik el.

M.6.46

Megoldás:

$T_1 = 773$ K

$T_2 = 423$ K

η= ?

Használjuk a hőerőgépek hatásfokára kapott összefüggést!

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{773K - 423K}{773K} = 0{,}45$$

A turbina hatásfoka ideális esetben 45 % lenne. A valóságban a gőzturbinák megközelítik az elméletileg elérhető hatásfokot.

M.6.47

Megoldás:

$T_2 = 393$ K

η= 55 % = 0,55

T_1 = ?

Használjuk a hőerőgépek hatásfokára kapott összefüggést!

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

Fejezzük ki a T_1 – t és helyettesítsük be az adatokat!

$$T_1 = \frac{T_2}{1-\eta} = \frac{393K}{1-0{,}55} = 873K$$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

A turbinába 600 °C – os gőzt vezettek.

M.6.48

Megoldás:

$T_1 = 823$ K

$\eta = 50\ \% = 0{,}5$ Használjuk a hőerőgépek hatásfokára kapott összefüggést!

$T_2 = ?$ $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$ Fejezzük ki a T_2 kimenő hőmérsékletet és helyettesítsük be az adatokat!

$$T_2 = T_1 \cdot (1-\eta) = 823K \cdot 0{,}5 = 412K$$

A hűtőbe 139 °C – os gőz áramlik.

M.6.49

Megoldás:

$T_2 = 279$ K

$\eta = 19{,}6$ Használjuk a hőszivattyú hatásfokára kapott összefüggést!

$T_1 = ?$ $\eta = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$ Fejezzük ki a T_1 magasabb hőmérsékletet és helyettesítsük be az adatokat!

$$T_1 = \frac{T_2 \cdot (1+\eta)}{\eta} = \frac{279 \cdot 20{,}6}{19{,}6} = 293K$$

A műhelyben a hőmérséklet 20 °C lenne, ha a hőszivattyú ideális módon, 19,6-os jósági tényezővel működne. Vegyük észre, hogy az $\eta = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$ képlet csak ideális hőerőgépek esetén érvényes. Valódi esetekben a jósági tényezőt az $\eta = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2}$ összefüggésből határozhatjuk meg, ami levegővel működő hőszivattyúk esetében a gyakorlatban nem szokta meghaladni az $\eta = 3$ értéket.

M.6.50

Megoldás:

$T_1 = 296$ K

$\eta = 14{,}1$ Használjuk a hőszivattyú hatásfokára kapott összefüggést!

$T_2 = ?$ $\eta = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$ Fejezzük ki a T_2 alacsonyabb hőmérsékletet és helyettesítsük be az adatokat!

$$T_2 = \frac{\eta \cdot T_1}{1+\eta} = \frac{14{,}1 \cdot 296K}{15{,}1} = 276K$$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

A külső levegő hőmérséklete 3 °C lenne, ha a hőszivattyú ideális módon, 14,1-es jósági tényezővel működne. Vegyük észre, hogy az $\eta = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$ képlet csak ideális hőerőgépek esetén érvényes. Valódi esetekben a jósági tényezőt az $\eta = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2}$ összefüggésből határozhatjuk meg, ami levegővel működő hőszivattyúk esetében a gyakorlatban nem szokta meghaladni az $\eta = 3$ értéket.

Az anyagok hőkapacitása, fajhője

M.6.51

Megoldás:

m = 4 kg

ΔT = 12 °C

$c = 2100 \frac{J}{kg^0C}$

Q = ?

C = ?

Alkalmazzuk a hőmennyiség kiszámítására kapott összefüggést!

$$\mathbf{Q} = c \cdot m \cdot \Delta T = 2100 \frac{J}{kg \cdot ^0C} \cdot 4\ kg \cdot 12^oC = 100{,}8\ kJ$$

A környezetből felvett hőmennyiség 100,8 kJ.

Alkalmazzuk a hőkapacitás kiszámítására kapott összefüggést!

$$C = \frac{Q}{\Delta T} = \frac{100800J}{12^0C} = 8400\frac{J}{^0C}$$

A benzin hőkapacitás $8400\frac{J}{^0C}$.

M.6.52

Megoldás:

m = 2 kg

ΔT = -25 °C

$c = 900 \frac{J}{kg^0C}$

Q = ?

C = ?

Alkalmazzuk a hő kiszámítására kapott összefüggést!

$$\mathbf{Q} = c \cdot m \cdot \Delta T = 900 \frac{J}{kg \cdot ^0C} \cdot 2\ kg \cdot (-25)\ ^oC = -45\ kJ$$

A környezetnek átadott hőmennyiség 45 kJ.

Alkalmazzuk a hőkapacitás kiszámítására kapott összefüggést!

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$$C = \frac{Q}{\Delta T} = \frac{-45000J}{-25^0 C} = 1800\frac{J}{^0C}$$

Az alumínium kocka hőkapacitás $1800\frac{J}{^0C}$.

M.6.53

Megoldás:

m = 5 kg

ΔT = 30 °C

Q = 54 kJ

a) C = ?

Alkalmazzuk a hőkapacitás kiszámítására kapott összefüggést!

Q = C · ΔT Fejezzük ki a C hőkapacitást, majd helyettesítsük be az adatokat!

$$C = \frac{Q}{\Delta T} = \frac{54000J}{30^0 C} = 1800\frac{J}{^0C}$$

A fémgolyó hőkapacitása 1800 $\frac{J}{^0C}$

b) c = ? Alkalmazzuk a $c = \frac{C}{m}$ összefüggést!

$$c = \frac{C}{m} = \frac{1800\frac{J}{^0C}}{5kg} = 360\frac{J}{kg \cdot ^0 C}$$

A golyó anyagának fajhője: $360\frac{J}{kg^0C}$

c) A fémgolyó feltehetően bronzból készült.

M.6.54

Megoldás:

m = 5 kg

ΔT = 15 °C

Q = 235,5 kJ

a) C = ?

Alkalmazzuk a hőkapacitás kiszámítására kapott összefüggést!

Q = C · ΔT Fejezzük ki a C hőkapacitást, majd helyettesítsük be az adatokat!

$$C = \frac{Q}{\Delta T} = \frac{235500J}{15^0 C} = 15700\frac{J}{^0C}$$

A folyadék hőkapacitása 15700 $\frac{J}{^0C}$

b) c = ? Alkalmazzuk a $c = \frac{C}{m}$ összefüggést!

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$$c = \frac{C}{m} = \frac{15700\frac{J}{^0C}}{5kg} = 3140\frac{J}{kg \cdot ^0 C}$$

A folyadék anyagának fajhője $3140\frac{J}{kg^0C}$.

c) A kannába feltehetően 20% -os sósavat töltöttek.

Olvadás, fagyás

M.6.55

Megoldás:

m = 20 kg

T = 0°C

L_o=334

Q = ? Alkalmazzuk a $Q = L_o \cdot m$ képletet!

$Q = L_o \cdot m = 334 \cdot 20\ kg = 6{,}68\ MJ$

A jégtömb 6,68 MJ hőt vett fel olvadásakor.

M.6.56

Megoldás:

T = 0°C

L_o=334

Q = 13,36 MJ Alkalmazzuk a $Q = L_o \cdot m$ képletet!

m = ? Fejezzük ki az m tömeget, majd helyettesítsük be az adatokat!

$$m = \frac{Q}{L_0} = \frac{13360kJ}{334\frac{kJ}{kg}} = 40kg$$

A jégtömbből 40 kg olvadt meg.

M.6.57

Megoldások

$m_{jég}$ = 15kg A jeget fel kell melegíteni az olvadáspontra, majd meg kell olvasztani.

$T_{jég}$ = - 6 °C Helyettesítsük be a fajhőt és az olvadáshőt a megfelelő képletbe!

$Q = c_{jég} \cdot m_{jég} \cdot \Delta T_{jég} + L_o \cdot m_{jég}$

Q = ?

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$Q = 15\ kg \cdot (2100 \frac{J}{kg^0C} \cdot 6\ ^oC + 334000 \frac{J}{kg}) = 5{,}2\ MJ$

A környezetből felvett hő 5,2 MJ.

M.M.6.58.

Megoldások

$m_{jég}$ =250 g = 0,25 kg
$T_{víz}$ = 18 °C
$T_{jég}$ = 0 °C
Q = ?
A jeget meg kell olvasztani, majd a 0°C-os vizet fel kell melegíteni 18 °C-ra!
Helyettesítsük be a fajhőt és az olvadáshőt a megfelelő képletbe!

$$Q = L_o \cdot m_{jég} + c_{víz} \cdot m_{jég} \cdot \Delta T_{víz}$$

$Q = 0{,}25\ kg \cdot (334 + 4{,}2 \frac{kJ}{kg^0C} \cdot 18\ ^oC) = 102{,}4\ kJ$

A jéggel közölt hő 102,4 kJ.

M.M.6.59

Megoldások

$m_{jég}$ = 2 kg A jeget fel kell melegíteni az olvadáspontra, majd meg kell olvasztani.

$T_{jég}$ = - 8 °C Helyettesítsük be a fajhőt és az olvadáshőt a megfelelő képletbe!

$$Q = c_{jég} \cdot m_{jég} \cdot \Delta T_{jég} + L_o \cdot m_{jég}$$

Q = ?

$Q = 2\ kg \cdot (2{,}1 \frac{kJ}{kg^0C} \cdot 8\ ^oC + 334) = 701{,}6\ kJ$ hő kellene a jég teljes megolvasztásához.

Nem olvad el az összes jég! Mivel a jég csak 600 kJ hőt vett fel, így
(701,6 kJ – 600 kJ)/334 kJ/kg = 0,304 kg ≈ 300 gramm 0°C-os jég marad a termoszban.

M.6.60

Megoldás:

$V = 35\ m^3$

$\rho = 1000 \frac{kg}{m^3}$

Q = ?

Először a tömeget kell kiszámítani $m = \rho \cdot V = 35\ m^3 \cdot 1000 \frac{kg}{m^3} = 35000\ kg$

Alkalmazzuk a $Q = L_o \cdot m$ képletet!

$Q = 334 \cdot 35000\ kg = 11{,}7\ GJ$

Fagyás közben 11,7 GJ hő szabadult fel.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.M.6.61

Megoldás:

m = 15 kg

T = 660 °C

L_o= 361

Q = ? Alkalmazzuk a $Q = L_o \cdot m$ képletet!

Q = 361 · 15 kg = 5,4 MJ

A megolvasztáshoz 5,4 MJ hőre van szükség.

Párolgás, forrás, lecsapódás

M.6.62

Megoldás:

M = 70 kg Az elpárolgó víz hőt von el a környezettől, vagyis a sportoló testétől.

ΔT = 0,6 °C $c_{víz} \cdot M \cdot \Delta T = L_p \cdot m$

$L_p = 2400 \frac{kJ}{kg}$ Fejezzük ki a tömeget: m tömeget ! Helyettesítsük be az adatokat!

$c_{víz} = 4200 \frac{J}{kg^0C}$ $m = \frac{c_{víz} \cdot M \cdot \Delta T}{L_p} = \frac{4200\frac{J}{kg \cdot ^0C} \cdot 70kg \cdot 0{,}6^0C}{2400000\frac{J}{kg}} = 73{,}5\ g$

m = ?

A sportoló 73,5 g vizet párologtat el. Amikor sportolunk, testünk folyamatosan többlet energiát termel, ami megnövelné a testhőmérsékletünket. A szervezetünk az állandó testhőmérsékletet úgy éri el, hogy sportolás közben izzadunk, és az elpárolgó izzadság (víz) „viszi el" a többlet energiát. Hosszabb sporttevékenység után testtömegünk akár néhány kilogrammal is csökkenhet, mert ilyen nagy lehet a vízveszteségünk.

M.6.63

Megoldás:

m = 140 kg

T = 100 °C

Q = ? Alkalmazzuk a $Q = L_f \cdot m$ képletet!

Q = 2256 · 140 kg = 315,8 MJ

A gőz lecsapódásakor 315,8 MJ hő keletkezett.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.6.64

Megoldás:

m = 150 g

T = 100 °C

Q = 300 kJ Alkalmazzuk a $Q = L_f \cdot m$ képletet!

$Q^* = 2256 \cdot 0{,}15\ kg = 338{,}4\ kJ$ hő szükséges a teljes vízmennyiség elforralásához.

Az összes vízből nem lesz gőz, mert 300 kJ < 338,4 kJ.

A tartályban (338,4 kJ – 300 kJ)/2256 kJ/kg = 0,017 kg = 17 gramm 100°C-os víz marad, a többi gőzzé válik.

M.6.65.

Megoldás:

m = 30 g

$T_{víz}$ = 100 °C

$T_{gőz}$ = 115 °C

Q = ?

A 100 °C – os vizet el kell forralni, majd a vízgőzt fel kell melegíteni 115 °C – ra.

$Q = L_f \cdot m + c_{gőz} \cdot m \cdot \Delta T = 0{,}03\ kg \cdot (2256 + 1{,}9 \frac{kJ}{kg\,^0C} \cdot 15\ ^oC) = 68{,}5\ kJ$

A 100 °C – os vízzel 68,5 kJ hőt kell közölni, hogy 115 °C-os vízgőzzé váljon.

M.6.6M.6.

Megoldás:

m = 65 g

$T_{víz}$ = 80 °C

$T_{gőz}$ = 100 °C

Q = ?

A 80 °C – os vizet a forráspontra (100 °C) kell melegíteni, majd elforralni.

$Q = c_{víz} \cdot m \cdot \Delta T + L_f \cdot m = 0{,}065\ kg \cdot (4{,}2 \frac{kJ}{kg \cdot ^0C} \cdot 20\ ^oC + 2256) = 152{,}1\ kJ$

A 80 °C – os vízzel 152,1 kJ hőt kell közölni, hogy a teljes vízmennyiség elforrjon.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Kalorimetria

M.M.6.67.

Megoldás:

$T_1 = 75\ ^oC$
$T_2 = 12\ ^oC$
$m_2 = 30\ kg$
$T_k = 26\ ^oC$
$m_1 = ?$

Alkalmazzuk a kalorimetria egyenletét: $Q_{fel} = Q_{le}$
$c \cdot m_1 \cdot \Delta T_1 = c \cdot m_2 \cdot \Delta T_2$
Egyszerűsítsünk a fajhővel! $m_1 \cdot 49\ ^oC = 30\ kg \cdot 14\ ^oC$
Fejezzük ki a tömeget ! $m_1 = 8{,}6\ kg$

A termálvíz tömege 8,6 kg.

M.M.6.68

Megoldás:

$T_1 = 85\ ^oC$
$T_2 = 25\ ^oC$
$m_1 = 4\ kg$
$m_2 = 6\ kg$
$T_k = ?$

Alkalmazzuk a kalorimetria egyenletét: $Q_{fel} = Q_{le}$
$c \cdot m_1 \cdot (T_1 - T_k) = c \cdot m_2 \cdot (T_k - T_2)$
Egyszerűsítsünk a fajhővel!
Fejezzük ki a T_k közös hőmérsékletet! Helyettesítsük be az adatokat!

$$T_k = \frac{m_1 \cdot T_1 + m_2 \cdot T_2}{m_1 + m_2} = \frac{4kg \cdot 85^0\,C + 6kg \cdot 25^0\,C}{10kg} = 49\ ^oC$$

A közös hőmérséklet 49 °C lesz.
Vegyük észre, hogy ebben az esetben a közös hőmérséklet a kétféle víz hőmérsékletének a tömegekkel súlyozott átlaghőmérséklete lett.

M.6.69.

Megoldás:

$T_{víz} = 20\ ^oC$
$T_{Al} = 160\ ^oC$
$m_{víz} = 8\ kg$
$m_{Al} = 140\ g = 0{,}14\ kg$
$T_k = ?$

Alkalmazzuk a kalorimetria egyenletét: $Q_{fel} = Q_{le}$
$c_{Al} \cdot m_{Al} \cdot (T_{Al} - T_k) = c_{víz} \cdot m_{víz} \cdot (T_k - T_{víz})$
Fejezzük ki a T_k közös hőmérsékletet! Helyettesítsük be az adatokat!

$$T_k = \frac{c_{Al} \cdot m_{Al} \cdot T_{Al} + c_{víz} \cdot m_{víz} \cdot T_{víz}}{c_{Al} \cdot m_{Al} + c_{víz} \cdot m_{víz}} = 20{,}5\ °C.$$

A közös hőmérséklet 20,5 °C lesz.
A víz tömege sokkal nagyobb, mint az alumínium kocka tömege, és a víz fajhője is jelentősen magasabb, mint az alumínium fajhője, ezek együtt eredményezik azt, hogy a

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

víz hőmérséklete alig emelkedik. Vegyük észre, hogy ebben az esetben a közös hőmérséklet a víz és az alumínium kocka hőmérsékletének a hőkapacitásokkal súlyozott átlaghőmérséklete lett.

M.M.6.70

Megoldás:

$m_{víz}$ = 8 kg
$T_{víz}$ = 10 °C
m_x = 600 g = 0,6 kg
T_x = 460 °C
T_k = 13,1 °C
$\Delta T_{víz}$= 3,1 °C
ΔT_x= 446,9 °C

Alkalmazzuk a kalorimetria egyenletét: $Q_{fel} = Q_{le}$!

$$c_x \cdot m_x \cdot \Delta T_x = c_{víz} \cdot m_{víz} \cdot \Delta T_{víz}$$

c_x = ?

Fejezzük ki az ismeretlen fajhőt! Helyettesítsük be az adatokat!

$$c_x = \frac{c_{víz} \cdot m_{víz} \cdot \Delta T_{víz}}{m_x \cdot \Delta T_x} = \frac{4200\frac{J}{kg \cdot {}^0C} \cdot 8kg \cdot 3{,}1\,{}^0C}{0{,}6kg \cdot 446{,}9\,{}^0C} = 388\ \frac{J}{kg\,{}^0C}$$

A kocka feltehetőleg rézből készült.

M.6.71

Megoldás:

m_{Al} = 0,15 kg
T_{Al} = 120 °C
m_{Cu} = 0,25 kg
T_{Cu} = 40 °C
T_k = ?

Alkalmazzuk a kalorimetria egyenletét: $Q_{fel} = Q_{le}$
Az alumíniumpor hőt ad le, a rézpor hőt vesz fel.

$$c_{Al} \cdot m_{Al} \cdot (T_{Al} - T_k) = c_{Cu} \cdot m_{Cu} \cdot (T_k - T_{Cu})$$

Fejezzük ki a T_k közös hőmérsékletet! Helyettesítsük be az adatokat!

$$T_k = \frac{c_{Al} \cdot m_{Al} \cdot T_{Al} + c_{Cu} \cdot m_{Cu} \cdot T_{Cu}}{c_{Al} \cdot m_{Al} + c_{Cu} \cdot m_{Cu}} = \frac{900\frac{J}{kg \cdot {}^0C} \cdot 0{,}15kg \cdot 120\,{}^0C + 385\frac{J}{kg \cdot {}^0C} \cdot 0{,}25kg \cdot 40\,{}^0C}{900\frac{J}{kg \cdot {}^0C} \cdot 0{,}15kg + 385\frac{J}{kg \cdot {}^0C} \cdot 0{,}25kg} = 86{,}7\,{}^0C$$

A közös hőmérséklet 86,7 °C lesz.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Gyakorló feladatok

6.72. A raktárban elhelyezett 65 literes tartályba 200 g oxigén és 350 g nitrogén keverékét töltötték. A gázkeverék nyomása 6,8 · 10^5 Pa.
a) Mekkora a gázkeverék hőmérséklete?
b) Mekkora lenne a gázelegy nyomása, ha a hőmérséklete 22 °C ?
Megoldás:

p= 6,8 · 10^5 Pa $M_{oxigén} = 32 \frac{g}{mol}$ $M_{nitrogén} = 28 \frac{g}{mol}$

$m_{oxigén}$= 200 g Számítsuk ki a mólok számát! $n_{oxigén}=\frac{m}{M}=\frac{200g}{32\frac{g}{mol}}=6,25mol$

$m_{nitrogén}$= 350 g $n_{neon}=\frac{m}{M}=\frac{350g}{28\frac{g}{mol}}=12,5mol$

V = 65 l = 65·10^{-3} m^3

a) T= ? Alkalmazzuk a Dalton törvényt és a gázegyenletet! $p \cdot V = (n_{oxigén} + n_{nitrogén}) \cdot R \cdot T$

Fejezzük ki a hőmérsékletet, helyettesítsük be az adatokat!

$$T=\frac{6,8\cdot10^5\,Pa\cdot65\cdot10^{-3}\,m^3}{18,75mol\cdot8,314\frac{J}{mol\cdot K}}=283K$$

A gázkeverék hőmérséklete 10 °C.

b) T = 295 K Alkalmazzuk a Dalton törvényt és a gázegyenletet! $p \cdot V = (n_{oxigén} + n_{nitrogén}) \cdot R \cdot T$

p = ? Fejezzük ki a nyomást, helyettesítsük be az adatokat!

$$p=\frac{18,75mol\cdot8,314\frac{J}{mol\cdot K}\cdot295K}{65\cdot10^{-3}m^3}=707,5kPa$$

A gázelegy nyomása 707,5 kPa lesz.

M.6.73.

Megoldás:
V = 10 dm^3
T = 291 K
p = 3 · 10^6 Pa

a) N = ? Használjuk a p·V = N·k·T egyenletet!
Fejezzük ki az N részecske számot, majd helyettesítsük be az adatokat.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$$N = \frac{p \cdot V}{k \cdot T} = \frac{3 \cdot 10^6\,Pa \cdot 10^{-2}\,m^3}{1{,}38 \cdot 10^{-23}\,\frac{J}{K} \cdot 29\,lK} = 7{,}5 \cdot 10^{24}$$

A palackban $7{,}5 \cdot 10^{24}$ molekula van.

b) ρ = ? $M_{oxigén} = 32\ \frac{g}{mol}$ Számítsuk ki az oxigén tömegét: $\frac{m}{M} = \frac{N}{N_A}$ összefüggésből.

$N_A = 6 \cdot 10^{23}$ $m = \frac{M \cdot N}{N_A} = \frac{32\frac{g}{mol} \cdot 7{,}5 \cdot 10^{24}}{6 \cdot 10^{23}} = 400g$

Alkalmazzuk a $\rho = \frac{m}{V}$ összefüggést! $\rho = \frac{0{,}4kg}{10^{-2}\,m^3} = 40\frac{kg}{m^3}$

Az oxigén sűrűsége a palackban 40 $\frac{kg}{m^3}$.

M.6.74

Megoldás:

p = 0,26 MPa

$\rho = 1{,}4\frac{kg}{m^3}$

a) v = ?

Fejezzük ki a sebességet a $p \cdot V = \frac{1}{3} \cdot m \cdot v^2$ egyenletből. Használjuk fel, hogy $\rho = \frac{m}{V}$!

Helyettesítsük be az adatokat.

$$p = \frac{1}{3} \cdot \rho \cdot v^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{3 \cdot p}{\rho}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 2{,}6 \cdot 10^5\,\frac{N}{m^2}}{1{,}4\,\frac{kg}{m^3}}} = 746\frac{m}{s}$$

A neon atomok átlagos sebessége 746 $\frac{m}{s}$

b)A neon atomok sebessége $746\frac{m}{s} \div 340\frac{m}{s} = 2{,}2$ szerese a levegőbeli hangsebességnek.

M.6.75. *

Megoldás:

V_1 = 8 dm³

p_1= 300 kPa

V_2 = 12 dm³

p_2= 400 kPa

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

p_k = ?

A csap megnyitása után a térfogatok és a mólok száma összeadódik.

$$p_k \cdot (V_1 + V_2) = (n_1 + n_2) \cdot R \cdot T$$

Mivel a rendszer sem hőközlési, sem munkavégzési kapcsolatban nem áll a környezetével, így a gáz belső energiája állandó marad. Az ideális gázok belső energiája csak a gáz anyagmennyiségétől, szabadsági fokszámától és hőmérsékletétől függ, ezért a csap kinyitása után a gáz hőmérséklete nem változik.

Alkalmazzuk az állapotegyenletet a két tartályra külön – külön, majd fejezzük ki az n_1 és az n_2 mólszámot. Ezeket helyettesítsük be a fenti egyenletbe.

$$p_1 \cdot V_1 = n_1 \cdot R \cdot T_1 \rightarrow n_1 = \frac{p_1 \cdot V_1}{R \cdot T}$$ Hasonlóan n_2 is kifejezhető.

Fejezzük ki a p_k közös nyomást és helyettesítsük be az adatokat.

$$p_k = \frac{p_1 \cdot V_1 + p_2 \cdot V_2}{V_1 + V_2} = \frac{300\text{kPa} \cdot 8\text{dm}^3 + 400\text{kPa} \cdot 12\text{dm}^3}{20\text{dm}^3} = 360\ \text{kPa}$$

A közös nyomás 360 kPa lesz.

M.6.76

Megoldás:

$M_{oxigén} = 32\ \frac{g}{mol}$

$V_1 = 15\ \text{dm}^3$

$p_1 = 1{,}5\ \text{MPa}$

$T_1 = 305\ \text{K}$

$V_2 = 20\ \text{dm}^3$

$p_2 = 2{,}5\ \text{MPa}$

$T_2 = 283\ \text{K}$

$T_k = 290\ \text{K}$

a) p_k = ?

Alkalmazzuk az állapotegyenletet a két palackra külön-külön, majd fejezzük ki az n_1 és az n_2 mólszámot. Helyettesítsük be az adatokat.

$$p_1 \cdot V_1 = n_1 \cdot R \cdot T_1 \rightarrow n_1 = \frac{p_1 \cdot V_1}{R \cdot T_1} = \frac{1{,}5 \cdot 10^6\,\text{Pa} \cdot 15 \cdot 10^{-3}\,\text{m}^3}{8{,}314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \cdot 305\text{K}} = 8{,}87\ \text{mol}$$

n_2 hasonlóan számítható: $n_2 = 21{,}3$ mol

Alkalmazzuk a gázkeverékek állapotegyenletét (Dalton törvénye).

$$p_k \cdot (V_1 + V_2) = (n_1 + n_2) \cdot R \cdot T_k$$

Fejezzük ki a p_k közös nyomást és helyettesítsük be az adatokat.

$$p_k = \frac{30{,}17\text{mol} \cdot 8{,}314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \cdot 290\text{K}}{35 \cdot 10^{-3}\,\text{m}^3} = 2{,}1\ \text{MPa}$$

A közös nyomás 2,1 MPa lesz.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

b) Alkalmazzuk az állapotegyenletet a 15 literes palackra, fejezzük ki a tömeget. Helyettesítsük be az adatokat.

$$m_1 = \frac{p_1 \cdot V_1 \cdot M}{R \cdot T_1} = \frac{1{,}5 \cdot 10^6\,\text{Pa} \cdot 15 \cdot 10^{-3}\,\text{m}^3 \cdot 32\frac{\text{g}}{\text{mol}}}{8{,}314\frac{\text{J}}{\text{mol}\cdot\text{K}} \cdot 305\text{K}} = 284\ \text{g}$$

A csap megnyitása után is számítsuk ki a gáz tömegét a 15 literes palackban.

$$m_1^* = \frac{p_k \cdot V_1 \cdot M}{R \cdot T_k} = \frac{2{,}1 \cdot 10^6\,\text{Pa} \cdot 15 \cdot 10^{-3}\,\text{m}^3 \cdot 32\frac{\text{g}}{\text{mol}}}{8{,}314\frac{\text{J}}{\text{mol}\cdot\text{K}} 290\text{K}} = 418\ \text{g}$$

Mivel a 15 l-es palackban nőtt, ezért a 20 l-es palackban csökkent a gáz tömege.
Ez a tény abból is következik, hogy a gáz a nagyobb nyomású tartályból áramlott át a kisebb nyomású palackba.

M.6.77. *

Megoldás:

$V_1 = 4\ \text{dm}^3$
$p_1 = 200\ \text{kPa}$
$V_2 = 6\ \text{dm}^3$
$p_2 = 150\ \text{kPa}$
$V_3 = 8\ \text{dm}^3$
$p_3 = 250\ \text{kPa}$

$p_k = ?$

A nyílások megnyitása után a térfogatok és a mólok száma összeadódik.

$$p_k \cdot (V_1 + V_2 + V_3) = (n_1 + n_2 + n_3) \cdot R \cdot T$$

Alkalmazzuk az állapotegyenletet a három térfogatra, fejezzük ki az n_1-t, n_2-t és n_3-t. Helyettesítsük be az egyenletbe.

$$p_1 \cdot V_1 = n_1 \cdot R \cdot T_1 \rightarrow n_1 = \frac{p_1 \cdot V_1}{R \cdot T}$$ Hasonlóan az n_2 és n_3 is kifejezhető.

Fejezzük ki a p_k közös nyomást, majd helyettesítsük be az adatokat.

$$p_k = \frac{p_1 \cdot V_1 + p_2 \cdot V_2 + p_3 \cdot V_3}{V_1 + V_2 + V_3} = \frac{200\text{kPa} \cdot 4\text{dm}^3 + 150\text{kPa} \cdot 6\text{dm}^3 + 250\text{kPa} \cdot 8\text{dm}^3}{18\text{dm}^3} = 206\ \text{kPa}$$

A közös nyomás 206 kPa lesz.

M.6.78.

$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \frac{J}{K}$

$p = 10^{-7}\text{Pa}$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

a) $V = 10^{-9}\ m^3$
T = 173 K
N = ?
Alkalmazzuk a $p \cdot V = N \cdot k \cdot T$ állapotegyenletet !
Fejezzük ki a N részecskeszámot és helyettesítsük be az adatokat!

$$N = \frac{p \cdot V}{k \cdot T} = \frac{10^{-7}\frac{N}{m^2} 10^{-9} m^3}{1{,}38 \cdot 10^{-23}\frac{J}{K} \cdot 173K} = 4{,}2 \cdot 10^4$$

Nagyon kevés, mindössze 42 ezer hélium atom van köbmilliméterenként ilyen nagy vákuumban. (A Hold teljesen elvesztette a légkörét, mégis nagyjából 400 részecske van a Hold felszínén ugyanekkora térfogatban.)

Nagyon kevés, mindössze 42 ezer hélium atom van köbmilliméterenként ilyen nagy vákuumban. (A Hold teljesen elvesztette a légkörét, mégis nagyjából 400 részecske van a Hold felszínén ugyanekkora térfogatban.)

b) $V = 10^{-6} m^3$
T = 273 K
N = ?
Alkalmazzuk a $p \cdot V = N \cdot k \cdot T$ állapotegyenletet !
Fejezzük ki a N részecskeszámot, majd helyettesítsük be az adatokat!

$$N = \frac{p \cdot V}{k \cdot T} = \frac{10^{-7}\frac{N}{m^2} 10^{-6} m^3}{1{,}38 \cdot 10^{-23}\frac{J}{K} \cdot 273K} = 2{,}654 \cdot 10^3$$

Oxigénből o°C-on, ilyen nagy vákuum mellett köbcentiméterenként 26 és fél millió molekula lenne. (Ez a példa is azt mutatja, hogy az atomok, molekulák nagyon kicsik és rendkívül sok van belőlük.)

M.6.79

Megoldás:

$M_{Ne} = 20{,}2\ \frac{g}{mol}$ $M_{Kr} = 83{,}8\ \frac{g}{mol}$

$m_{Ne} = 2 \cdot m_{Kr}$
$V = 500\ dm^3$
p = 400 kPa
T = 293 K
a) m_{Ne} =?
m_{Kr} =?
Alkalmazzuk a gázkeverékek állapotegyenletét (Dalton törvénye).

$p \cdot V = (\frac{m_{Ne}}{M_{Ne}} + \frac{m_{Kr}}{M_{Kr}}) \cdot R \cdot T$ Helyettesítsük be az adatokat és használjuk fel, hogy $m_{Ne} = 2 \cdot m_{Kr}$.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$$4\cdot10^5\,Pa\cdot0{,}5m^3=\left(\frac{2\cdot m_{Kr}}{20{,}2\frac{g}{mol}}+\frac{m_{Kr}}{83{,}8\frac{g}{mol}}\right)\cdot8{,}314\frac{J}{mol\cdot K}\cdot293K$$

Az egyenlet megoldása m_{Kr} = 740 g. A neon tömege 1480 g.

b) $\frac{N_{Ne}}{N_{Kr}}=?$ Alkalmazzuk az $N = N_A \cdot n$ összefüggést, ahol N_A az Avogadro szám. $N_A = 6\cdot10^{23}\frac{1}{mol}$

$$\frac{N_{Ne}}{N_{Kr}}=\frac{\frac{m_{Ne}}{M_{Ne}}\cdot N_A}{\frac{m_{Kr}}{M_{Kr}}\cdot N_A}=\frac{2\cdot m_{kr}\cdot83{,}8\frac{g}{mol}}{m_{Kr}\cdot20{,}2\frac{g}{mol}}=8{,}3$$

A neon és kripton atomok számának aránya 8,3.

M.6.80.

Megoldás:

k= 1,38 ·10^{-23} $\frac{J}{K}$

m_0= 5,66 · 10 $^{-26}$ kg.

V = 12 dm^3

T_1 = 298 K

T_2 = 293 K

m = 60 g

Δm = 25 g

a) p_1 = ? Alkalmazzuk a p · V = N · k · T állapotegyenletet !

Használjuk fel, hogy a részecskeszámot úgy kapjuk meg, hogy a teljes tömeget elosztjuk egy részecske tömegével: $N=\frac{m}{m_0}=\frac{60\cdot10^{-3}kg}{5{,}66\cdot10^{-26}kg}$ = 1,06·10^{24} részecske.

Fejezzük ki a p nyomást és helyettesítsük be az adatokat!

$$p=\frac{1{,}06\cdot10^{24}\cdot1{,}38\cdot10^{-23}\frac{J}{K}\cdot298K}{12\cdot10^{-3}m^3}=363\text{ kPa}$$

A gáz eredeti nyomása 363 kPa.

b) p_2 = ? A gázrészecskék száma csökken: $N=\frac{m}{m_0}=\frac{35\cdot10^{-3}kg}{5{,}66\cdot10^{-26}kg}$ = 6,18·10^{23}

A nyomás a használat után:

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$$p = \frac{6{,}18 \cdot 10^{23} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K} \cdot 293K}{12 \cdot 10^{-3} m^3} = 208 \text{ kPa}.$$

M.6.81

Megoldás:

$M_{nitrogén} = 28 \frac{g}{mol}$

m = 5 kg

T = 290 K

V = 40 dm³

a) p = ?

Alkalmazzuk a $p \cdot V = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T$ állapotegyenletet.

Fejezzük ki a p nyomást, majd helyettesítsük be az adatokat!

$$p = \frac{5000g \cdot 8{,}314 \frac{J}{mol \cdot K} \cdot 290K}{28 \frac{g}{mol} \cdot 40 \cdot 10^{-3} m^3} = 10{,}8 \text{ MPa}$$

Kezdetben a nitrogén gáz nyomása 10,8 MPa.

b) N = ? $N_A = 6 \cdot 10^{23}$

$m_2 = 0{,}4 \cdot 5 \text{ kg} = 2 \text{ kg}$

Alkalmazzuk az $N = n \cdot N_A = \frac{m_2}{M} \cdot N_A$ összefüggést, helyettesítsük be az adatokat!

$$N = \frac{2000g \cdot 6 \cdot 10^{23} \frac{1}{mol}}{28 \frac{g}{mol}} = 4{,}3 \cdot 10^{25}$$

A palackban $4{,}3 \cdot 10^{25}$ nitrogén molekula maradt.

M.6.82

Megoldás:

V = 2 m³

p= 180 kPa

$T_1 = 293$ K

Q = 1843 J

$T_2 = 294$ K

a) f = ?

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

V = állandó, ezért $Q = \Delta E_b = \frac{f}{2} \cdot n \cdot R \cdot \Delta T$

Alkalmazzuk a $p \cdot V = n \cdot R \cdot T$ állapotegyenletet.

Fejezzük ki az n·R mennyiséget, majd helyettesítsük be az adatokat!

$$n \cdot R = \frac{p \cdot V}{T} = \frac{180 \cdot 10^3\,Pa \cdot 2m^3}{293K} = 1228{,}67\frac{J}{K}$$

$Q = \frac{f}{2} \cdot n \cdot R \cdot \Delta T$ összefüggésből fejezzük ki az f szabadsági fokot és helyettesítsük be az adatokat!

$$f = \frac{2 \cdot Q}{n \cdot R \cdot T} = \frac{3686J}{1228{,}67\frac{J}{K} \cdot 1K} = 3$$

A gáz szabadsági foka 3.

b) f = 5

ΔT = ?

A $Q = \frac{f}{2} \cdot n \cdot R \cdot \Delta T$ összefüggésből fejezzük ki a ΔT hőmérséklet-változást és helyettesítsük be az adatokat!

$$\Delta T = \frac{2 \cdot Q}{n \cdot R \cdot f} = \frac{3686J}{5 \cdot 1228{,}67\frac{J}{K}} = 0{,}6\ K$$

A hőmérséklet 0,6 K – nel nőne.

M.6.83

Megoldás:

k= 1,38 ·10^{-23} $\frac{J}{K}$

T = 291 K

$M_{He} = 4\ \frac{g}{mol}$

a) E_o = ?

Alkalmazzuk az $E_0 = \frac{3}{2} \cdot k \cdot T$ képletet! $E_0 = \frac{3}{2} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23}\frac{J}{K} \cdot 291K = 6{,}02 \cdot 10^{-21}J$

Egy atom átlagos energiája 6,02·10^{-21}J.

b) N_A= 6,022·10^{23} $\frac{1}{mol}$

m_o = ?

$$m_0 = \frac{m}{N} = \frac{n \cdot M}{n \cdot N_A} = \frac{4\frac{g}{mol}}{6{,}022 \cdot 10^{23}\frac{1}{mol}} = 6{,}64 \cdot 10^{-24}g$$

Egy atom tömege 6,64·10^{-27} kg.

c) v = ?

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Alkalmazzuk az $E_0 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$ összefüggést, fejezzük a v átlagos sebességet és helyettesítsük be az adatokat!

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot E_0}{m}} = \sqrt{\frac{12{,}04 \cdot 10^{-21} J}{6{,}64 \cdot 10^{-27} kg}} = 1350 \frac{m}{s}$$

A hélium atom átlagos sebessége 1350 $\frac{m}{s}$.

M.6.84

Megoldás:

m = 16 kg
f = 5
ΔT = 5 K
Q = 52000 J
a) m_o = ?

V = állandó, ezért $Q = \Delta E_b = \frac{f}{2} \cdot N \cdot k \cdot \Delta T$

Fejezzük ki a N – t, helyettesítsük be az adatokat!

$$N = \frac{2 \cdot Q}{f \cdot k \cdot \Delta T} = \frac{104000 J}{5 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K} \cdot 5 K} = 3{,}014 \cdot 10^{26}$$

$$m_0 = \frac{16 kg}{3{,}014 \cdot 10^{26}} = 5{,}31 \cdot 10^{-26} kg$$

Egy gázrészecske tömege $5{,}31 \cdot 10^{-26}$ kg.

b) $N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23} \frac{1}{mol}$

M = ?

Számítsuk ki 1 mól gáz tömegét! $M = N_A \cdot m_o = 6{,}022 \cdot 10^{23} \frac{1}{mol} \cdot 5{,}31 \cdot 10^{-26}$ kg = 31,97 $\frac{g}{mol} \approx$

$32 \frac{g}{mol}$

A gáz moláris tömege 32 $\frac{g}{mol}$, tehát a gáz oxigén.

M.6.85

Megoldás:

$M_{N_2} = 28 \frac{g}{mol}$; $M_{Co_2} = 44 \frac{g}{mol}$; $N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23} \frac{1}{mol}$

m_{N_2} = 3 kg
m_{CO_2} = 1 kg
f = 5
ΔT = 28 K

a) ΔE_b = ?

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Számítsuk ki a mólok számát $n_{N_2} = \frac{m_{N_2}}{M_{N_2}} = \frac{3000g}{28\frac{g}{mol}} = 107\,\text{mol}$, hasonlóan n_{CO_2}= 22,7 mol.

$\Delta E_b = \frac{f}{2} \cdot (n_{N_2} + n_{CO_2}) \cdot R \cdot \Delta T = 2{,}5 \cdot 129{,}7 mol \cdot 8{,}314 \frac{J}{mol \cdot K} \cdot 28K =$ 75,5 kJ.

A gázkeverék belső energiája 75,5 kJ-lal nő.

b) N_{N_2} = ?

$N_{N_2} = n_{N_2} \cdot N_A = 6{,}4 \cdot 10^{25}$ nitrogén molekula van a palackban.

c) m_{0N_2}= ?

$m_{0N_2} = \frac{3kg}{6{,}4 \cdot 10^{25}} = 4{,}7 \cdot 10^{-26} kg$ egy nitrogén molekula tömege.

d) T = 290 K

E_{0N_2}= ?

$$E_{0N_2} = \frac{E_b}{N_{N_2}} = \frac{\frac{5}{2} 107 mol \cdot 8{,}314 \frac{J}{mol \cdot K} 290K}{6{,}4 \cdot 10^{25}} = 10^{-20} J$$

Egy nitrogén molekula átlagos mozgási energiája 10^{-20} J. Ennek az energiának a 3/5 része a haladási mozgási energia, a fennmaradó 2/5 rész pedig a forgási mozgási energia.

M.6.86

Megoldás:

V = 10 dm³ = állandó

p_1= 250 kPa

$p_2 = 4 \cdot p_1$

a) Q = ?

Q = ΔE_b,mert W = 0

Alkalmazzuk a $p \cdot V = n \cdot R \cdot T$ és az $E_b = \frac{f}{2} \cdot n \cdot R \cdot T$ összefüggéseket a két állapotra.

$$Q = \Delta E_b = \frac{5}{2} \cdot n \cdot R \cdot (T_2 - T_1) = \frac{5}{2} \cdot (p_2 - p_1) \cdot V = \frac{5}{2} \cdot 3 \cdot p_1 \cdot V$$

Az adatok behelyettesítése után Q = 7,5·250·10³ Pa·10⁻²m³ = 18,75 kJ.

A gázzal közölt hő 18,75 kJ.

b) $\frac{E_2}{E_1} = ?$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{\frac{5}{2} \cdot p_2 \cdot V}{\frac{5}{2} \cdot p_1 \cdot V} = 4$$

Az oxigén energiája négyszeresére nőtt.

Ha állandó térfogaton melegítés hatására a nyomás négyszeresére nő, akkor a gáz abszolút hőmérséklete is négyszeresére emelkedik. Ha például kezdetben 300 K volt az oxigén hőmérséklete 2,5 atmoszféra nyomáson, akkor a melegítés után 10 atmoszférás, 1200 K = 927°C hőmérsékletű oxigén lesz a 10 literes palackban, amivel remélhetőleg igen óvatosan bánnak a laboratóriumban.

M.M.6.87

Megoldás:

n = 12 mol Izochor állapotváltozás V = állandó

f = 3

A grafikonról leolvasható adatok: $p_1 = 120$ kPa; $p_2 = 240$ kPa ; $V = 0{,}8$ m³

a) ΔE_b = ?

Alkalmazzuk a $p \cdot V = n \cdot R \cdot T$ egyenletet az 1 – es állapotra.

Számítsuk ki a T_1 kezdő hőmérsékletet. $T_1 = \frac{120 \cdot 10^3 \text{ Pa} \cdot 0{,}8 \text{m}^3}{12 \text{mol} \cdot 8{,}314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}} = 962{,}2$ K

Alkalmazzuk Gay-Lussac II. törvényét: $\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1}$! Ebből $T_2 = 1924{,}4$ K

Helyettesítsünk be a: $\Delta E_b = \frac{f}{2} \cdot n \cdot R \cdot \Delta T$ összefüggésbe!

$\Delta E_b = 1{,}5 \cdot 12 \text{ mol} \cdot 8{,}314 \frac{J}{molK} \cdot 962{,}2 \text{ K} = 144$ kJ

A belső energia változása 144 kJ.

b) Q = ? Alkalmazzuk a hőtan I. főtételét! $\Delta E_b = Q + W$

Mivel V = állandó $\rightarrow$ W = 0 !

$Q = \Delta E_b = 144$ kJ

A környezettől felvett hő 144 kJ.

M.6.88.

Megoldás:

a) Izochor állapotváltozás, V = állandó.

b) $T_A = 250$ K Alkalmazzuk az állapotegyenletet az A állapotra! $p_A \cdot V_A = n \cdot R \cdot T_A$

$T_B = 400$ K Fejezzük ki az $n \cdot R$ szorzatot, helyettesítsük be az adatokat!

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

p_A = 160 kPa $\qquad n \cdot R = \frac{160 \cdot 10^3\,Pa \cdot 4m^3}{250K} = 2560\frac{J}{K}$

V = 4 m³

f= 5

ΔE_b = ? .

Helyettesítsük be az adatokat! $\Delta E_b = \frac{f}{2} \cdot n \cdot R \cdot \Delta T = 2{,}5 \cdot 2560\ \frac{J}{K} \cdot 150\ K = 960\ kJ$

A belső energia változása 960 kJ.

c) Q = ?

A térfogati munka nulla, mert V = állandó, ezért ΔE_b = Q.

A környezetből felvett hő 960 kJ.

M.6.89

Megoldás:

V_1 = 4 dm³

p = p_k =100 kPa = állandó

T_1 = 20 °C = 293 K

T_2 = 80 °C = 353 K

a) V_2 = ?

Alkalmazzuk Gay-Lussac I. törvényét: $\frac{T_2}{T_1} = \frac{V_2}{V_1}$! Ebből V_2 = 4,82 dm³.

A térfogat 4,82 dm³ lesz.

b) $M_N = 28\ \frac{g}{mol}$

Q = ?

Számítsuk ki a gáz tömegét $p \cdot V = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T$ állapotegyenletből!

$$m = \frac{p \cdot V_1 \cdot M}{R \cdot T_1} = \frac{10^5\,Pa \cdot 4 \cdot 10^{-3}\,m^3 \cdot 28\frac{g}{mol}}{8{,}314\frac{J}{mol \cdot K} \cdot 293K} = 4{,}6\ g$$

Helyettesítsük be az adatokat a Q =c_p·m·ΔT képletbe.

Q =c_p·m·ΔT = $1038\frac{J}{kg \cdot {}^0C}$ ·4,6·10⁻³kg ·60 °C = 286,5 J

A felvett hőmennyiség 286,5 J.

c) ΔE_b = ?

Alkalmazzuk a hőtan I. főtételét! $\Delta E_b = Q - p \cdot \Delta V$

$\Delta E_b = 286{,}5J - 10^5\,Pa \cdot 0{,}82 \cdot 10^{-3}\,m^3 = 204{,}5\ J$

A belső energia 204,5 J – al nőtt.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

d) A = 60 cm²
T_2 = 80 °C = 353 K
p_k =100 kPa
m*= ?

Az m* tömeg hatására a nyomás $p^* = p_k + \frac{m^* \cdot g}{A}$ lesz.

Izoterm állapotváltozás: $p^* \cdot V_1 = p_k \cdot V_2$
Fejezzük ki az m* tömeget és helyettesítsük be az adatokat!

$$m^* = \frac{10^5\,\text{Pa} \cdot 60 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2 \cdot 0{,}82 \cdot 10^{-3}\,\text{m}^3}{4 \cdot 10^{-3}\,\text{m}^3 \cdot 10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 12{,}3\ \text{kg}$$

A dugattyúra 12,3 kg tömegű testet kell tenni.

M.6.90

Megoldás:

a.) Izobár állapotváltozás

b.) Alkalmazzuk a térfogati munka kiszámítására kapott összefüggést!

$W = - p \cdot \Delta V = - 150 \cdot 10^3 \frac{N}{m^2} \cdot 4\ \text{m}^3 = -600$ kJ

A gázon végzett munka -600 kJ.

c.) f = 3
ΔE_b = ?

T_1= 17 °C = 290 K Írjuk fel az állapotegyenletet! $p_1 \cdot V_1 = n \cdot R \cdot T_1$

Fejezzük ki az $n \cdot R$ szorzatot !

$$n \cdot R = \frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{150 \cdot 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 2\text{m}^3}{290\text{K}} = 1034{,}5\frac{\text{J}}{\text{K}}$$

Alkalmazzuk Gay-Lussac I. törvényét: $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$!

$$T_2 = \frac{6\text{m}^3 \cdot 290\text{K}}{2\text{m}^3} = 870\ \text{K}$$

Alkalmazzuk a belső energia kiszámítására kapott összefüggést!
Helyettesítsük be az ismert mennyiségeket!

$$\Delta E_b = \frac{f}{2} \cdot n \cdot R \cdot \Delta T = 1{,}5 \cdot 1034{,}5\ \frac{J}{K} \cdot 580\ \text{K} = 900\ \text{kJ}$$

A gáz belső energiája 900 kJ-al nőtt.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Ugyanezt az eredményt a kezdőhőmérséklet ismerete nélkül is megkaphatjuk a $\Delta E = \frac{f}{2} p \Delta V$ összefüggés alapján.

M.6.91

Megoldás:

$V = 25\ dm^3$

$C = 12{,}48\ \frac{J}{K}$

a) V = állandó, izochor állapotváltozás.

b) $p_A = 100$ kPa

$T_A = 300$ K

$T_B = 354$ K

$p_B = ?$

Alkalmazzuk Gay-Lussac II. törvényét: $\frac{T_B}{T_A} = \frac{p_B}{p_A}$! Ebből $p_B = 118$ kPa

A *B* állapotban a nyomás 118 kPa.

c) Q = ?

Alkalmazzuk a $Q = C \cdot \Delta T$ összefüggést! $Q = 12{,}48\ \frac{J}{K} \cdot 54\ K = 674\ J$

A gáz 674 J hőt vett fel a környezetéből.

A feladatban szereplő adatokból meghatározhatjuk, hogy 1 mól gáz van a palackban, amelynek szabadsági fokszáma 3. Tehát egyatomos gázról szól a feladat.

M.6.92

Megoldás:

T = állandó

$Q_{fel} = 24$ kJ

a) $\Delta E_b = \frac{f}{2} \cdot n \cdot R \cdot \Delta T = 0$, mert T = állandó $\rightarrow \Delta T = 0$.

A gáz belső energiája nem változik!

b.) $\Delta V = ?$ Izoterm tágulás történt, $W < 0$, mert $Q > 0$!

$\Delta E_b = Q + W = 0$

A térfogat nőtt!

c.) $p \cdot V$ = állandó, mert izoterm állapotváltozás!

Ha a térfogat nő, akkor a nyomás csökken, ahányszorosára növekedett a térfogat, annyiad részére csökkent a nyomás.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.6.93

Megoldás:

a.) Izobár állapotváltozás

b.) Alkalmazzuk a térfogati munka kiszámítására kapott összefüggést!

$W = - p \cdot \Delta V = - 300 \cdot 10^3 \frac{N}{m^2} \cdot (- 6 \cdot 10^{-3}) \, m^3 = 1{,}8 \, kJ$

A gázon végzett munka 1,8 kJ.

c.) $f = 6$

$T_B = 399 \, K$

$\Delta E_b = ?$

Írjuk fel az állapotegyenletet! $p_B \cdot V_B = n \cdot R \cdot T_B$

Fejezzük ki az $n \cdot R$ szorzatot !

$$n \cdot R = \frac{p_B \cdot V_B}{T_B} = \frac{300 \cdot 10^3 \frac{N}{m^2} \cdot 9 \cdot 10^{-3} m^3}{399 \, K} = 6{,}77 \frac{J}{K}$$

Alkalmazzuk Gay-Lussac I. törvényét: $\frac{V_A}{T_A} = \frac{V_B}{T_B}$!

$$T_A = \frac{V_A \cdot T_B}{V_B} = \frac{3 dm^3 \cdot 399 K}{9 dm^3} = 133 K$$

Alkalmazzuk a belső energia kiszámítására kapott összefüggést!
Helyettesítsük be az ismert mennyiségeket!

$\Delta E_b = \frac{f}{2} \cdot n \cdot R \cdot \Delta T = 3 \cdot 6{,}77 \frac{J}{K} \cdot (- 266) \, K = - 5{,}4 \, kJ$

A gáz belső energiája 5,4 kJ-al csökkent.

d) $Q = ?$ Alkalmazzuk a hőtan I. főtételét:

$\Delta E_b = Q + W \Rightarrow \mathbf{Q} = \Delta E_b - W = - 7{,}2 \, kJ$

A gáz 7,2 kJ hőt adott át a környezetének.

M.6.94.

Megoldás:

$p = 150 \, kPa = állandó$ $\Delta V = V_2 - V_1 = -4 \, dm^3$

$V_1 = 10 \, dm^3$

$V_2 = 6 \, dm^3$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Q = 2100 J

a.) W = ? Alkalmazzuk a térfogati munka kiszámítására kapott képletet!

$W = - p \cdot \Delta V = (-1{,}5) \cdot 10^5 \frac{N}{m^2} \cdot (-4) \cdot 10^{-3}\ m^3 = 600\ J$

A térfogati munka 600 J.

b.) ΔE_b = ? Alkalmazzuk a hőtan I. főtételét! $\Delta E_b = - Q + W = (- 1500\ J)$

A gáz belső energiájának csökkenése 1500 J.

c.) f= ?

Alkalmazzuk a $\Delta E_b = \frac{f}{2} p \Delta V$ összefüggést.

Fejezzük ki az f szabadsági fokok számát és helyettesítsük be az adatokat.

$f = \frac{2 \cdot \Delta E_b}{p \cdot \Delta V} = \frac{3000J}{600J} = 5$

A hengerben kétatomos gáz van, mert a szabadsági fokok száma 5.

M.6.95.

Megoldás:

p = 180 kPa = állandó

Q = 1260 J

ΔE_b = 900 J

a.) W = ? Alkalmazzuk a hőtan I. főtételét! $\Delta E_b = Q + W$

Fejezzük ki a W térfogati munkát, majd helyettesítsük be az adatokat!

$W = \Delta E_b - Q = -360\ J$

A térfogati munka -360 J.

b.) ΔV = ?

Alkalmazzuk a térfogati munka kiszámítására kapott képletet!

$W = - p \cdot \Delta V$

Fejezzük ki a ΔV - t, helyettesítsük be az adatokat!

$$\Delta V = \frac{-W}{p} = \frac{360 N \cdot m}{1{,}8 \cdot 10^5 \frac{N}{m^2}} = 2\,dm^3$$

A térfogat 2 dm^3 – rel növekedett.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.6.96.

Megoldás:

p = 210 kPa = állandó $\Delta V = V_2 - V_1 = 500\ cm^3$

$V_1 = 400\ cm^3$

$V_2 = 900\ cm^3$

Q = 120 J

a.) W = ? Alkalmazzuk a térfogati munka kiszámítására kapott képletet!

$W = - p \cdot \Delta V = (-2{,}1) \cdot 10^5 \frac{N}{m^2} \cdot 5 \cdot 10^{-4}\ m^3 = (-105)\ J$

A térfogati munka (- 105) J.

b.) ΔE_b = ? Alkalmazzuk a hőtan I. főtételét! $\Delta E_b = Q + W = 262{,}5\ J - 105\ J = 157{,}5\ J$

A gáz belső energiája 157,5 J-lal nőtt.

A gáz belső energiája 95 J – al nőtt.

.M.6.97.

Megoldás:

p = 120 kPa = állandó $\Delta V = V_2 - V_1 = -600\ cm^3$

$V_1 = 900\ cm^3$

$V_2 = 300\ cm^3$

$\Delta E_b = -180\ J$

a.) W = ? Alkalmazzuk a térfogati munka kiszámítására kapott képletet!

$W = - p \cdot \Delta V = (-1{,}2) \cdot 10^5 \frac{N}{m^2} \cdot (-6) \cdot 10^{-4}\ m^3 = 72\ J$

A térfogati munka 72 J.

b.) Q = ?

Alkalmazzuk a hőtan I. főtételét! $\Delta E_b = Q + W$

Fejezzük ki a Q - t, helyettesítsük be az adatokat!

$Q = \Delta E_b - W = -180\ J - 72\ J = -252\ J$

A gáz 252 J hőt adott át a környezetének.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.6.98.

Megoldás:

m = 120 g

$\Delta T = (-40\ ^oC)$

$C_p = 1038\ \frac{J}{kg.^0C}$

p = állandó

a.) Q = ?

Alkalmazzuk a hőmennyiség kiszámítására kapott összefüggést!

$$Q = C_p \cdot m \cdot \Delta T = 1038\ \frac{J}{kg.^0C} \cdot 0{,}12\ kg \cdot (-40\ ^oC) = (-4{,}98)\ kJ$$

Az nitrogén 4,98 kJ hőt adott át a környezetének.

b.) $M = 28\ \frac{g}{mol}$

f = 5

ΔE_b = ?

Számítsuk ki az anyagmennyiséget: $n = \frac{m}{M} = 4{,}29$ mol !

Alkalmazzuk a belső energia kiszámítására kapott összefüggést!

ΔE_b = ? $\Delta E_b = \frac{5}{2} \cdot n \cdot R \cdot \Delta T = 2{,}5 \cdot 4{,}29\ mol \cdot 8{,}314\ \frac{J}{molK} \cdot (-40^oC) = (-3{,}57)\ kJ$

A belső energia csökkenése 3,57 kJ.

c.) **W = ?** Alkalmazzuk a hőtan I. főtételét: $\Delta E_b = Q + W$!

Fejezzük ki a munkát, helyettesítsük be az ismert adatokat!

$$W = \Delta E_b - Q = 1{,}41 kJ$$

A térfogati munka 1,41 kJ.

M.M.6.99.

Megoldás:

m = 1280 g Az oxigén moláris tömege: $M = 32\ \frac{g}{mol}$

$T_1 = 20\ ^oC$

W = 15 kJ Adiabatikus állapotváltozás: Q = 0 !

a.) ΔE_b = ? $\Delta E_b = W = 15$ kJ

A belső energia növekedése 15 kJ.

b.) f = 5

T_2 = ?

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Számítsuk ki az anyagmennyiséget: $n = \frac{m}{M} = 40$ mol !

Alkalmazzuk a belső energia kiszámítására kapott összefüggést!

$$\Delta E_b = \frac{f}{2} \cdot n \cdot R \cdot \Delta T$$

Fejezzük ki a hőmérsékletet-változást! Írjuk be az ismert adatokat!

$$\Delta T = \frac{2 \cdot \Delta E_b}{5 \cdot n \cdot R} = \frac{30\,\text{kJ}}{5 \cdot 40\,\text{mol} \cdot 8{,}314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}} = 18\ \text{K} = 18\ ^\circ\text{C}$$

$\Delta T = T_2 - T_1$ $\quad T_2 - 20\ ^\circ\text{C} = 18\ ^\circ\text{C}$ $\quad T_2 = 38\ ^\circ\text{C}$

Az új állapotban a hőmérséklet 38 °C.

M.M.6.100.

Megoldás:

$V_1 = 4$ dm³

$p_1 = 200$ kPa

$T_1 = 288$ K

$V_2 = 6$ dm³

$p_2 = 250$ kPa

$T_2 = 298$ K

a) $T_k = ?$

Alkalmazzuk az állapotegyenletet, számítsuk ki a mólok számát!

$p \cdot V = n \cdot R \cdot T$ $\quad n_1 = \frac{p_1 \cdot V_1}{R \cdot T_1} = \frac{2 \cdot 10^5\,\text{Pa} \cdot 4 \cdot 10^{-3}\,\text{m}^3}{8{,}314 \frac{\text{J}}{\text{molK}} \cdot 288\text{K}} = 0{,}33$ mol

Az n_2 hasonlóan számítható $n_2 = 0{,}61$ mol

Alkalmazzuk a belső energia kiszámítására kapott összefüggést! $E_b = \frac{f}{2} \cdot n \cdot R \cdot T$

A mólok száma összeadódik.

A hőmérséklet kiegyenlítődik, a belső energiák összeadódnak, a teljes belső energia állandó marad.

$$E_{bk} = E_b = \frac{f}{2} \cdot 0{,}94\ \text{mol} \cdot R \cdot T_k = \frac{f}{2} \cdot 0{,}33\ \text{mol} \cdot R \cdot 288\ \text{K} + \frac{f}{2} \cdot 0{,}61 \cdot R \cdot 298\ \text{K}$$

A közös hőmérséklet $T_k = 294{,}5$ K lesz.

b) $p_k = ?$

A térfogatok összeadódnak $V_k = 10$ dm³

Alkalmazzuk az állapotegyenletet! $p_k \cdot V_k = n_k \cdot R \cdot T_k$

Fejezzük ki a nyomást, helyettesítsük be az adatokat.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$$p_k = \frac{0{,}94\,\text{mol} \cdot 8{,}314\,\frac{\text{J}}{\text{molK}} \cdot 294{,}5\,\text{K}}{10^{-2}\,\text{m}^3} = 230\ \text{kPa}$$

A közös nyomás 230 kPa lesz.

M.6.101.*

Megoldás:

$V_1 = 3\ \text{dm}^3$

$V_2 = 5\ \text{dm}^3$

$p_1 = p_k = 100\ \text{kPa}$

$A = 80\ \text{cm}^2$

$T_1 = 290\ \text{K}$

$D = 12\ \frac{\text{N}}{\text{m}}$

a) $T_2 = ?$

Számítsuk ki a dugattyú elmozdulását a $\Delta V = A \cdot \Delta l$ összefüggésből.

$$\Delta l = \frac{\Delta V}{A} = \frac{2 \cdot 10^{-3}\,\text{m}^3}{80 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2} = 0{,}25\ \text{m}$$

A melegítés után a gáz nyomása a külső nyomás és a rugóerő ($F_r = D \cdot \Delta l$) által létrehozott nyomás

($p_r = \frac{F_r}{A}$) összege lesz.

Helyettesítsük be az adatokat.

$p_2 = 100\ \text{kPa} + 0{,}375\ \text{kPa} = 100{,}375\ \text{kPa}$

Alkalmazzuk az egyesített gáztörvényt.

$$\frac{p_2 \cdot V_2}{T_2} = \frac{p_1 \cdot V_1}{T_1}$$

Fejezzük ki a T_2 - t, helyettesítsük be az adatokat.

$$T_2 = \frac{100{,}375\,\text{kPa} \cdot 5\,\text{dm}^3 \cdot 290\,\text{kPa}}{100\,\text{kPa} \cdot 3\,\text{dm}^3} = 485\ \text{K}$$

A gáz hőmérséklete 485 K lesz.

b) $M = 4\ \frac{\text{g}}{\text{mol}}$

$f = 3$

$\Delta E_b = ?$

Írjuk fel az állapotegyenletet! $p_1 \cdot V_1 = n \cdot R \cdot T_1$

Fejezzük ki az $n \cdot R$ mennyiséget, alkalmazzuk a belső energia kiszámítására kapott összefüggést!

$\Delta E_b = \frac{f}{2} \cdot n \cdot R \cdot \Delta T$ Helyettesítsük be az adatokat.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$$\Delta E_b = \frac{3}{2} \cdot \frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} \Delta T = 1{,}5 \cdot \frac{10^5 \frac{N}{m^2} \cdot 3 \cdot 10^{-3} m^3}{290K} \cdot 195{,}15K = 303\ J$$

A belső energia megváltozása 303 J

M.6.102.

Megoldás:

N = 8,58 · 10²⁵

ΔT = 40 K

k= 1,38 ·10⁻²³ $\frac{J}{K}$

f = 5

a) ΔE_b = ?

Alkalmazzuk a belső energia kiszámítására kapott összefüggést!
Helyettesítsük be az ismert mennyiségeket!

$$\Delta E_b = \frac{f}{2} \cdot N \cdot k \cdot \Delta T = 2{,}5 \cdot 8{,}58 \cdot 10^{25} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K} \cdot 40\ K = 118\ kJ$$

A belső energia megváltozása 118 kJ.

b) W = ?

Alkalmazzuk a hőtan I. főtételét: ΔE_b = Q + W ! Q = 0, adiabatikus állapotváltozás.

ΔE_b = W = 118 kJ

A munkavégzés 118 kJ .

M.6.103.

Megoldás:

p = állandó ; k= 1,38 ·10⁻²³ $\frac{J}{K}$

T_1= 290 K

N = 9 · 10²⁶

W = ?

$V_2 = 3 \cdot V_1$

$\Delta V = 2 \cdot V_1$

W = ?

Írjuk fel az állapotegyenletet! $p \cdot V_1 = N \cdot k \cdot T_1$

Alkalmazzuk a $W = - p \cdot \Delta V$ összefüggést, helyettesítsük be az ismert mennyiségeket!

$$W = - p \cdot \Delta V = - p \cdot 2 \cdot V_1 = - 2 \cdot N \cdot k \cdot T_1 = - 2 \cdot 9 \cdot 10^{26} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K} \cdot 290\ K = -7{,}2\ MJ$$

A térfogati munka – 7,2 MJ. A negatív előjel azt jelenti, hogy táguláskor a gáz végez munkát a környezetén.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.6.104.

Megoldás:

m = 4 kg

ΔT = 30 °C

ΔE_b = 78360 J

Q = 0

a) c_V = ?

Használjuk a $\Delta E_b = c_V \cdot m \cdot \Delta T$ összefüggést.

Fejezzük ki a c_V állandó térfogat melletti fajhőt, majd helyettesítsük be az adatokat.

$$c_V = \frac{78360\text{J}}{4\text{kg} \cdot 30^0\text{C}} = 653\ \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot^0\text{C}}$$

b) A hengerben oxigént tároltak, mert a „Függvénytáblázat” megmutatja, hogy az oxigén fajhője éppen ennyi.

c) Alkalmazzuk a hőtan I. főtételét: $\Delta E_b = Q + W$! Q = 0, adiabatikus állapotváltozás.

$\Delta E_b = W$ = 78360 J

A munkavégzés 78,36 kJ .

M.M.6.105.

Megoldás:

a) n = 1 mol

f = 3

M = 4 $\frac{g}{mol}$

a) c_V = ?

Alkalmazzuk az állandó térfogat melletti mólhőt megadó $C_V = \frac{f}{2} \cdot R$ összefüggést

$$C_V = 1{,}5 \cdot 1\text{mol} \cdot 8{,}314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} = 12{,}5\ \frac{J}{K}$$

1 mol hélium 4 g, a fajhő $c_V = \frac{C_V}{m} = \frac{12{,}47\frac{\text{J}}{\text{K}}}{4 \cdot 10^{-3}\text{kg}} = 3120\ \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$

A hélium fajhője állandó térfogaton 3120 $\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$.

(A „Függvénytáblázat”-ban megtalálható mért adat: 3161 $\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$, ami azt mutatja, hogy a kinetikus modellre alapozott elméleti számítás nagyon jó közelítő értéket ad.)

b) n = 1 mol

f = 5

M = 2 $\frac{g}{mol}$

c_p = ?

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Alkalmazzuk az állandó nyomás melletti mólhőt megadó $C_p = \frac{f+2}{2} \cdot R$ összefüggést.

$$C_p = 3{,}5 \cdot 8{,}314 \frac{J}{mol \cdot K} = 29{,}1 \frac{J}{K}$$

1 mol hidrogén 2 g, a fajhő $c_p = \frac{C_p}{m} = \frac{29{,}1 \frac{J}{K}}{2 \cdot 10^{-3} kg} = 14{,}55 \frac{kJ}{kg \cdot K}$

A hidrogén fajhője állandó nyomáson $14{,}55 \frac{kJ}{kg \cdot K}$.

(A „Függvénytáblázat”-ban megtalálható mért adat: 14,236 $\frac{kJ}{kg \cdot K}$, ami azt mutatja, hogy a kinetikus modellre alapozott elméleti számítás nagyon jó közelítő értéket ad.)

c) f = ?

$\frac{C_p}{C_V} = ?$

$$\frac{C_p}{C_V} = \frac{\frac{f+2}{2} \cdot R}{\frac{f}{2} \cdot R} = \frac{f+2}{f} = \frac{5+2}{5} = \frac{7}{5} = 1{,}4$$

A kétféle mólhő aránya 1,4.

.M.6.10.6.

Megoldás:

T_A = 17 °C = 290 K

T_B = 51 °C = 324 K

V_A = 40 dm³

$C_p = 28{,}5 \frac{J}{K}$

a) Az állapotváltozás izobár.

b) V_B = ?

Alkalmazzuk Gay-Lussac I. törvényét: $\frac{T_B}{T_A} = \frac{V_B}{V_A}$!

Fejezzük ki a V_B végső térfogatot, majd helyettesítsük be az adatokat.

$$V_B = \frac{40 dm^3 \cdot 324 K}{290 K} = 44{,}7 \, dm^3$$

A gáz térfogata a B állapotban 44,7 dm³.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

c) Q = ?
Használjuk a $Q = C_p \cdot \Delta T$ összefüggést.

$Q = 28{,}5 \frac{J}{K} \cdot 34\ K = 969\ J$

M.6.107.

Megoldás:

$T_1 = 700\ K$
$\eta \rightarrow 1{,}12 \cdot \eta$
$T_2 \rightarrow 0{,}8 \cdot T_2$

a) $T_2 = ?$.

Alkalmazzuk a hőerőgép hatásfokának kiszámítására kapott összefüggést!

(1) $\eta = \frac{700 - T_2}{700}$ és (2) $1{,}12 \cdot \eta = \frac{700 - 0{,}8 \cdot T_2}{700}$

Osszuk el egymással a két egyenletet! $1{,}12 = \frac{700 - 0{,}8 \cdot T_2}{700 - T_2}$

Az egyenlet megoldása: $T_2 = 262{,}5\ K$, a hűtő hőmérséklete.

b) $\eta = ?$
A 262,5 K hőmérsékletet helyettesítsük be az (1) egyenletbe, így kiszámíthatjuk az ideális hőerőgép hatásfokát.

$$\eta = \frac{700K - 262{,}5K}{700K} = 0{,}625$$

Az ideális hőerőgép hatásfoka 62,5 %.

M.6.108.

Megoldás:

$Q_1 = 1200\ J$
$\eta \rightarrow 1{,}08 \cdot \eta$
$Q_2 \rightarrow 0{,}85 \cdot Q_2$

a) $Q_2 = ?$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Alkalmazzuk a hőerőgép hatásfokának kiszámítására kapott összefüggést!

(1) $\eta = \frac{1200 - Q_2}{1200}$ és (2) $1{,}08 \cdot \eta = \frac{1200 - 0{,}85 \cdot Q_2}{1200}$

Osszuk el egymással a két egyenletet! $1{,}08 = \frac{1200 - 0{,}85 \cdot T_2}{1200 - Q_2}$

Az egyenlet megoldása: Q_2 = 417,4 J hőt adott át a hőerőgép a környezetnek.

b) η =?

A 417,4 J hőmennyiséget helyettesítsük be az (1) egyenletbe, így kiszámíthatjuk a hatásfokot.

$$\eta = \frac{1200\text{J} - 417{,}4\,\text{J}}{1200\text{J}} = 0{,}652$$

Az ideális hőerőgép hatásfoka 65,2 %.

M.6.109.

Megoldás:

Q_2 = 450 J
$\eta \rightarrow$ 1,1· η
$Q_1 \rightarrow$ 1,28 · Q_1

a) Q_1 = ?

Alkalmazzuk a hőerőgép hatásfokának kiszámítására kapott összefüggést!

(1) $\eta = \frac{Q_1 - 450\text{J}}{Q_1}$ és (2) $1{,}1 \cdot \eta = \frac{1{,}28 \cdot Q_1 - 450\text{J}}{1{,}28 \cdot Q_1}$

Osszuk el egymással a két egyenletet! $1{,}1 = \frac{1{,}28 \cdot Q_1 - 450\text{J}}{1{,}28 \cdot (Q_1 - 450\text{J})}$

Az egyenlet megoldása: Q_1 = 1434,4 J.

b) η =?

Az 1434,4 J hőmennyiséget helyettesítsük be az (1) egyenletbe, így megkapjuk a hatásfokot.

$$\eta = \frac{1434{,}4\text{J} - 450\text{J}}{1434{,}4\text{J}} = 0{,}686$$

A hőerőgép hatásfoka 68,6 %.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.6.110.

Megoldás:

$T_1 = 293$ K
$p_1 = 200$ kPa
$p_3 = 600$ kPa
$V_1 = 1$ dm³
$V_2 = 3$ dm³

a.) $T_3 = ?$

$1 \rightarrow 3$ izochor folyamat, alkalmazzuk Gay-Lussac II. törvényét: $\frac{T_3}{T_1} = \frac{p_3}{p_1}$!

Fejezzük ki a hőmérsékletet, helyettesítsük be az adatokat! $T_3 = \frac{p_3 \cdot T_1}{p_1} = 879$ K

A 3 - as állapotban a hőmérséklet 879 K.

$T_2 = ?$

$1 \rightarrow 2$ izobár folyamat, alkalmazzuk Gay-Lussac I. törvényét
Fejezzük ki a hőmérsékletet, helyettesítsük be az adatokat!

$$T_2 = \frac{V_2 \cdot T_1}{V_1} = \frac{3\,\mathrm{dm}^3 \cdot 293\mathrm{K}}{1\mathrm{dm}^3} = 879\ \mathrm{K}$$

A 2 - es állapotban a hőmérséklet 879 K.

b.) $2 \rightarrow 3$ szakasz kezdetén és végén a hőmérséklet ugyanakkora (közben mindvégig magasabb), így a teljes folyamatban $\Delta T = 0$!

Alkalmazzuk a belső energia kiszámítására kapott összefüggést!

$$\Delta E_b = \frac{f}{2} \cdot n \cdot R \cdot \Delta T = 0$$

A belső energia nem változik $\Delta E_b = 0$, a folyamat elején és végén ugyanakkora, közben a folyamat feléig nő, azután csökken.

c.) $Q = ?$ $3 \rightarrow 1$ szakasz izochor folyamat, V = állandó.
$\Delta T = -586$ K
$f = 5$

Az 1 - es állapotra írjuk fel az állapotegyenletet : $p_1 \cdot V_1 = n \cdot R \cdot T_1$!

Fejezzük ki az $n \cdot R$ szorzatot ! $n \cdot R = \frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{2 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa} \cdot 1 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3}{293\mathrm{K}} = 0{,}68\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$

V = állandó, $\Delta V = 0$, a térfogati munka $W = -p \cdot \Delta V = 0$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Alkalmazzuk a hőtan I. főtételét, $\Delta E_b = Q + W$.

$Q = \Delta E_b = \frac{f}{2} \cdot n \cdot R \cdot \Delta T = 2{,}5 \cdot 0{,}68 \frac{J}{K} \cdot (-586K) = -1000J$

A hőleadás 1000 J.

(Ugyanerre az eredményre juthatunk a $Q = (f/2)\cdot(V\Delta p) = 2{,}5 \cdot (10^{-3}\ m^3) \cdot (400\ kPa) =$ 1000 J összefüggés alapján is.)

d.) W = ? $1 \rightarrow 2$ szakaszon a nyomás állandó. $\Delta V = 2\ dm^3$.

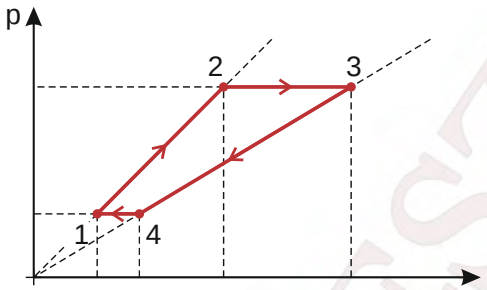
Alkalmazzuk a térfogati munka kiszámítására kapott összefüggést!

Helyettesítsük be az adatokat! $W = - p \cdot \Delta V = - 2{\cdot}10^5 \frac{N}{m^2} \cdot 2 \cdot 10^{-3} m^3) = - 400$ J

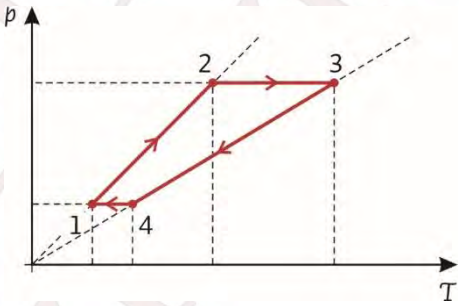
A térfogati munka (- 400) J.

M.6.111.

Megoldás: Alkalmazzuk a $\frac{p \cdot V}{T} = állandó$összefüggést!

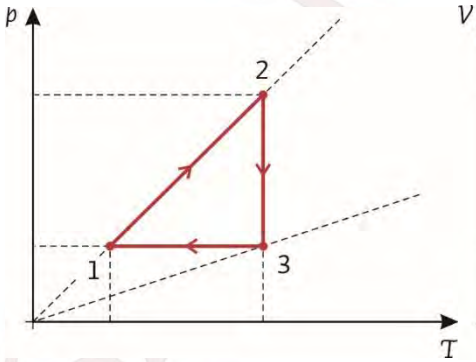


a)

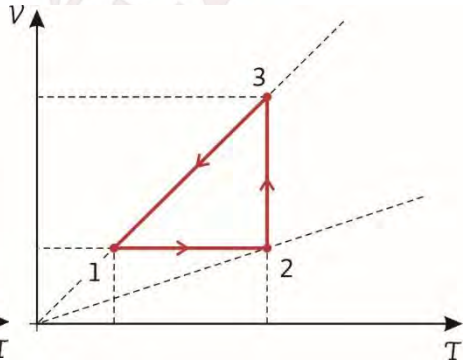


b)

M.6.112.



a)



b)

KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.6.113.

Megoldás:

n = 4 mol
p_A= 150 kPa
V_A= 3 dm³

a.) T_A = ? ; T_B = ? ; T_C = ?

Az *A* állapotra írjuk fel az állapotegyenletet :$p_A \cdot V_A = n \cdot R \cdot T_A$!

Fejezzük ki a hőmérsékletet, helyettesítsük be az adatokat! $T_A = \frac{p_A \cdot V_A}{n \cdot R}$

$$T_A = \frac{1{,}5 \cdot 10^5 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} \cdot 3 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3}{8{,}314 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol} \cdot \mathrm{K}} \cdot 4\,\mathrm{mol}} = 13{,}5\,\mathrm{K}$$ a hőmérséklet az *A* állapotban.

A → C izobár állapotváltozás, használjuk fel Gay-Lussac I. törvényét!

$$\frac{T_C}{T_A} = \frac{V_C}{V_A}$$

Fejezzük ki a hőmérsékletet, helyettesítsük be az adatokat!

$$T_C = \frac{T_A \cdot V_C}{V_A} = \frac{13{,}5\,\mathrm{K} \cdot 15\mathrm{dm}^3}{3\,\mathrm{dm}^3} = 67{,}5\ \mathrm{K}$$

A C állapotban a hőmérséklet 67,5 K.

C → B izochor állapotváltozás, használjuk fel Gay-Lussac II. törvényét!

$$\frac{T_B}{T_C} = \frac{p_B}{p_C}$$

Fejezzük ki a hőmérsékletet, helyettesítsük be az adatokat!

$$T_B = \frac{T_C \cdot p_B}{p_C} = \frac{13{,}5\mathrm{K} \cdot 600\mathrm{kPa}}{150\mathrm{kPa}} = 270\ \mathrm{K}$$

A B állapotban a hőmérséklet 270 K.

b.) η = ?

A hatásfok definíciója alapján: $\eta = \frac{W_{hasznos}}{Q_{fel}}$.

A hasznos munka a körfolyamat által körbezárt terület a p-V diagramon:

$W_{hasznos} = \frac{1}{2} \cdot (12 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^3) \cdot (450 \cdot 10^3\ \mathrm{Pa}) = 2700\ \mathrm{J}$.

A gáz csak az A → B folyamat közben vesz fel hőt, a körfolyamat másik két szakaszán hőleadás történik.

A felvett hő így számítható ki: $Q_{fel} = \Delta E_b - W$. A belső energia megváltozása:

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$$\Delta E_b = nR\Delta T = nR(T_B - T_A) = (4\ mol)\left(8{,}314\frac{J}{molK}\right)(257{,}5\ K) = \ 8560\ J.$$

Az A → B folyamat közben a munkavégzést a trapéz területével feleltethetjük meg. Tágulás esetén a munkavégzés negatív.

$$W = -\frac{(750\ kPa)\cdot(12\ dm^3)}{2} = -4500\ J$$

Tehát a folyamat közben felvett hő: $Q_{fel} = \Delta E_b - W = 8560\ J - (-\ 4500\ J) = 13\ 060\ J$.

A termikus hatásfok: $\eta = \frac{W_{hasznos}}{Q_{fel}} = \frac{2700\ J}{13\ 060\ J} = 0{,}207$, azaz 20.7 %.

(Megjegyezzük, hogy ha ideális Carnot-gép működne a T_B = 271 K-es hőtartály és a T_A = 13,5 K-es hőtartály között, akkor a maximálisan elérhető elméleti hatásfok 95 %-os lenne!)

M.M.6.114.

Megoldás:

T_D = 300 K

p_A=150 kPa

V_A= 5 dm³

p_D = 450 kPa

f = 5

a.) ΔE_b = ?

A *D* állapotra írjuk fel az állapotegyenletet: $p_D \cdot V_D = n \cdot R \cdot T_D$

Fejezzük ki az n · R szorzatot, helyettesítsük be az adatokat!

$$n \cdot R = \frac{p_D \cdot V_D}{T_D} = \frac{4{,}5\cdot 10^5 \frac{N}{m^2}\cdot 5\cdot 10^{-3}\,m^3}{300K} = 7{,}5\ \frac{J}{K}$$

Izochor állapotváltozás, használjuk fel Gay-Lussac II. törvényét!

$$\frac{T_A}{T_D} = \frac{p_A}{p_D}$$

Fejezzük ki a hőmérsékletet, helyettesítsük be az adatokat!

$$T_A = \frac{150kPa\cdot 300K}{450kPa} = 100\ K$$

Alkalmazzuk a belső energia kiszámítására kapott összefüggést!

$$\Delta E_b = \frac{f}{2}\cdot n \cdot R \cdot \Delta T = \frac{5}{2}\cdot 7{,}5\ \frac{J}{K}\cdot(-\ 200\ K) = -\ 3{,}75\ kJ$$

A belső energia 3,75 kJ – al növekedett.

b.) W = ?

A grafikonról leolvasható: ΔV = 15 dm³

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

B → A szakasz izobár állapotváltozás, használjuk a térfogati munka kiszámítására kapott összefüggést!

$W = - p \cdot \Delta V = -1{,}5 \cdot 10^5 \frac{N}{m^2} \cdot (-15) \cdot 10^{-3}\ m^3 = 2{,}25\ kJ$

Az B →A szakaszon a munka pozitív előjelű, nagysága 2,25 kJ.

c.) $\eta = ?$

A hatásfok definíciója alapján: $\eta = \frac{W_{hasznos}}{Q_{fel}}$.

A hasznos munka a körfolyamat által körbezárt terület a p-V diagramon:

$W_{hasznos} = (15 \cdot 10^{-3}\ m^3) \cdot (300 \cdot 10^3\ Pa) = 4500\ J = 4{,}5\ kJ$.

Hőfelvétel az A → D (izochor) és a D → C (izobár) szakaszokon történik, a C → B és a B → A szakaszokon hőleadás zajlik. A hőfelvétel kiszámításához szükségünk van a C pontbeli hőmérséklet értékre is. Mivel $T_D = 300\ K$, és a D → C szakaszon állandó nyomás mellett a térfogat négyszeresére nő, így az abszolút hőmérséklet is négyszeresére növekszik: $T_C = 1200\ K$.

A két szakaszon felvett hő:

$Q_{fel} = \frac{f}{2} nR\Delta T_{AD} + \frac{f+2}{2} nR\Delta T_{DC} = \frac{5}{2} \cdot 7{,}5 \frac{J}{K} \cdot (300K - 100K) + \frac{7}{2} \cdot 7{,}5 \frac{J}{K} \cdot (1200K - 300K) = 27\ 375\ J \approx 27{,}4\ kJ$.

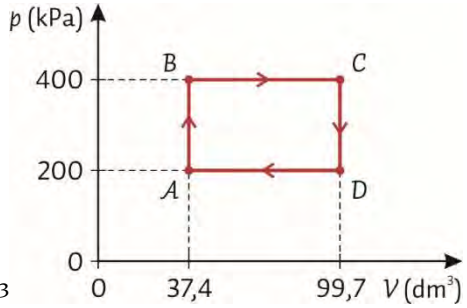
A termikus hatásfok: $\eta = \frac{W_{hasznos}}{Q_{fel}} = \frac{4{,}5\ kJ}{27{,}4 kJ} = 0{,}164$, azaz 16,4 %.

M.6.115.

Megoldás:

a) Az A állapotra írjuk fel az állapotegyenletet: $p_A \cdot V_A = n \cdot R \cdot T_A$

Fejezzük ki a térfogatot, helyettesítsük be az adatokat!



$V_A = \frac{6\,mol \cdot 8{,}314 \frac{J}{mol \cdot K} \cdot 150K}{2 \cdot 10^5 \frac{N}{m^2}} = 37.4\ dm^3$

A→D Izobár állapotváltozás, használjuk fel Gay-Lussac I. törvényét!

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$$\frac{V_D}{T_D} = \frac{V_A}{T_A}$$

Fejezzük ki a térfogatot, helyettesítsük be az adatokat!

$$V_D = \frac{37{,}4\,dm^3 \cdot 400K}{150K} = 99{,}7\ dm^3$$

b) A grafikonról leolvasható adatok.
p_B = 400 kPa
T_B = 300 K
n = 6 mol
ΔT_{CD} = - 400 K
Q_{CD} = ?
V = állandó, ΔV = 0 , W = 0
Alkalmazzuk az I főtételt! $\Delta E_b = Q + W$, de ΔV = 0, így W = 0, ezért $\Delta E_b = Q$.
Alkalmazzuk a belső energia kiszámítására kapott összefüggést!

$$Q = \Delta E_b = \frac{f}{2} \cdot n \cdot R \cdot \Delta T = \frac{5}{2} \cdot 6\ mol \cdot 8{,}314\ \frac{J}{mol \cdot K} \cdot (-400\ K) = (-49{,}9\ kJ)$$

A leadott hő 49,9 kJ.

c) W_{BC} = ?

A hasznos munka a körfolyamat által körbezárt terület a p-V diagramon:
$W_{hasznos} = (62{,}4 \cdot 10^{-3}\ m^3) \cdot (200 \cdot 10^3\ Pa) = 12\,480\ J \approx 12{,}5\ kJ$.

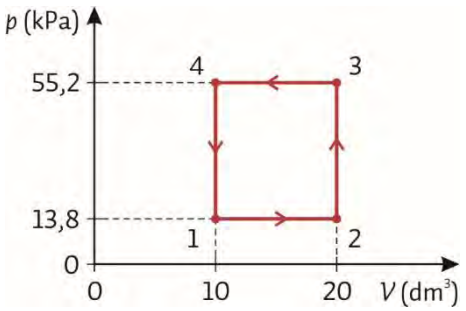
A körfolyamat során végzett hasznos munka 12,5 kJ.

M.6.116.

Megoldás:

a) Az 1-es állapotra írjuk fel az állapotegyenletet: $p_1 \cdot V_1 = N \cdot k \cdot T_1$
Fejezzük ki a nyomást, helyettesítsük be az adatokat!

$$p_1 = p_2 = \frac{2 \cdot 10^{23} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \frac{J}{K} \cdot 50K}{10^{-2}\ m^3} = 13{,}8\ kPa$$



Az állapotegyenlet a 3-as állapotra!
Fejezzük ki a nyomást, helyettesítsük be az adatokat!

$$p_3 = p_4 = \frac{2 \cdot 10^{23} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \frac{J}{K} \cdot 200K}{10^{-2}\ m^3} = 55{,}2\ kPa$$

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

b) $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$

$N = 2 \cdot 10^{23}$
A grafikonról leolvasható adatok.
$V_2 = 20\ dm^3$
$T_2 = 100\ K$

$\Delta T_{2,3} = 300\ K$
$f = 3$
$Q_{2,3} = ?$
V = állandó, $\Delta V = 0$, $W = 0$
Alkalmazzuk az I főtételt! $\Delta E_b = Q + W$, de $W = 0$, ezért $\Delta E_b = Q$.
Alkalmazzuk a belső energia kiszámítására kapott összefüggést!

$$Q = \Delta E_b = \frac{f}{2} \cdot N \cdot k \cdot \Delta T = \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot 10^{23} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K} \cdot 300\ K = 1{,}24\ kJ$$

A felvett hő 1,24 kJ.

c) $W_{3,4} = ?$
$p_3 = p_4 = 55{,}2\ kPa$
$W_{3,4} = - p \cdot \Delta V$
$W_{3,4} = - p \cdot \Delta V = -5{,}52 \cdot 10^4\ Pa \cdot (- 10^{-2})\ m^3 = 552\ J$
A munkavégzés 552 J.

M.6.117.

Megoldás:
$T_B = 280\ K$
a) $T_A = ?$
V = állandó
Az adatok az ábráról leolvashatók.
Izochor állapotváltozás, használjuk fel Gay-Lussac II. törvényét!

$$\frac{T_A}{T_B} = \frac{p_A}{p_B}$$

Fejezzük ki a T_A hőmérsékletet és helyettesítsük be az adatokat!

$$T_A = \frac{100kPa \cdot 280K}{500kPa} = 56\ K$$

A gáz hőmérséklete az *A* állapotban 56 K.

c) $T_C = ?$
Alkalmazzuk az egyesített gáztörvényt.
Fejezzük ki a T_C hőmérsékletet és helyettesítsük be az adatokat!

$$\frac{p_C \cdot V_c}{T_c} = \frac{p_B \cdot V_B}{T_B} \qquad T_C = \frac{300kPa \cdot 30dm^3 280K}{500kPa \cdot 10dm^3} = 504\ K$$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

A gáz hőmérséklete a *C* állapotban 504 K.
(Érdekességként említjük meg, hogy az A → B szakaszon ugyanannyival (224 K-nel) nő a gáz hőmérséklete, mint a B → C szakaszon, ezért mindkét folyamat során ugyanannyival nő a gáz belső energiája.)

c) η = ?
A hatásfok definíciója alapján: $\eta = \frac{W_{hasznos}}{Q_{fel}}$.
A hasznos munka a körfolyamat által körbezárt terület a p-V diagramon. A háromszög területét az alapszor magasság osztva kettővel formula szerint számíthatjuk ki:
$W_{hasznos} = \frac{1}{2} \cdot (400 \cdot 10^3\ Pa) \cdot (20 \cdot 10^{-3}\ m^3) = 4000\ J = 4\ kJ.$

Hőfelvétel az A → B és a B → C szakaszok alatt történik. (A B → C folyamat közben a hőmérséklet mindvégig növekszik, ezért a teljes szakaszon hőfelvétel zajlik.) Az A → B szakaszon (izochor folyamat) a hőfelvételt így számíthatjuk ki:

$$Q_1 = \frac{3}{2} nR\Delta T_{AB} = \frac{3}{2} \frac{p_A V_A}{T_A} (T_B - T_A) = 6\ kJ.$$

A B → C szakasz hőfelvétele:

$$Q_2 = \Delta E_b - W = \frac{3}{2} nR\Delta T_{BC} + \frac{(p_B + p_C)(V_C - V_B)}{2} =$$
$$= 1{,}5 \cdot 17{,}86 \frac{J}{K} \cdot (504K - 280K)$$
$$+ \frac{(500kPa + 300kPa) \cdot (30dm^3 - 10dm^3)}{2} = 14\ kJ.$$

A termikus hatásfok: $\eta = \frac{W_{hasznos}}{Q_1 + Q_2} = \frac{4\ kJ}{6kJ + 14kJ} = 0{,}2$, azaz 20 %.

M.6.118*

Megoldás:
N = $2 \cdot 10^{24}$
a) T_A = ?
Az *A* állapotra írjuk fel az állapotegyenletet: $p_A \cdot V_A = N \cdot k \cdot T_A$
Fejezzük ki a T_A – t , helyettesítsük be az adatokat!
Az adatok az ábráról leolvashatók.

$$T_A = \frac{2 \cdot 10^5 Pa \cdot 8 \cdot 10^{-2} m^3}{2 \cdot 10^{24} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}} = 580\ K$$

A gáz hőmérséklete az *A* állapotban 580 K.

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

b) ΔE_b = ?
ΔE_b = 0 , mert ΔT = 0

c)
A környezet által végzett munka a körfolyamat által körbezárt terület a p-V diagramon:
$W_{környezet} = \frac{1}{2} \cdot (60 \cdot 10^{-3}\ m^3) \cdot (800 \cdot 10^3\ Pa) = 24\ 000\ J = 24\ kJ$.
(Ennek a munkavégzésnek van pozitív és van negatív szakasza, sőt van nulla munkavégzésű szakasza is. Az A → B szakaszon a környezet munkája nulla (mert a térfogat állandó), a
B → C szakaszon a környezet munkája pozitív (mert a gáz összenyomódik), végül pedig a
C → A szakaszon a környezet munkája negatív, mert a gáz kitágul.)

A körfolyamat során a környezet által végzett összes munka 24 kJ.

d) Q = ?
Az ábrázolt körfolyamat egy hőszivattyú működésének feleltethető meg. A környezet munkát végez a hőszivattyúban lévő gázon (24 kJ), és hőt vesz fel a környezetéből. Ez a hőfelvétel az A → B és a C → A szakaszokon történik. Hőleadás zajlik a B → C szakaszon. Az első főtétel alapján ki tudjuk számítani a hőleadást:

$$Q_{le} = \Delta E_b - W = \frac{5}{2} N k \Delta T_{BC} + \frac{(p_B + p_C)(V_C - V_B)}{2} =$$

$$= 2{,}5 \cdot 2 \cdot 10^{24} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K} \cdot (290K - 2900K)$$

$$+ \frac{(1000kPa + 400kPa) \cdot (80dm^3 - 20dm^3)}{2} = -138\ kJ.$$

A körfolyamat során tehát az történik, hogy a hőszivattyú 138 kJ – 24 kJ = 114 kJ hőt vesz fel a környezetéből, és 138 kJ hőt ad le.

M.6.119

Megoldás:

$T_{jég}$ = 0 °C Az üdítő által leadott hőt a jég felveszi. $Q_{le} = Q_{fel}$
$m_{víz}$ =0,4 kg A jég az olvadásponton megolvad.
T_k = 10 °C $c_{víz} \cdot m_{víz} \cdot (T_{víz} - T_k) = L_o \cdot m_{jég} + c_{víz} \cdot m_{jég} \cdot T_k$
$T_{víz}$ = 26 °C $m_{jég} \cdot (L_o + c_{víz} \cdot T_k) = c_{víz} \cdot m_{víz} \cdot (T_{víz} - T_k)$
Fejezzük ki a jég tömegét, írjuk be az ismert adatokat!

$m_{jég}$ = ?

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$$m_{jég} = \frac{c_{víz} \cdot m_{víz} \cdot (T_{víz} - T_k)}{L_0 + c_{víz} \cdot T_k} = \frac{4200\frac{J}{kg \cdot {}^0C} \cdot 0{,}4kg \cdot 16\,{}^0C}{334\frac{kJ}{kg} + 4200\frac{J}{kg \cdot {}^0C} \cdot 10\,{}^0C} = 71{,}5\ g$$

Az üdítőbe 71,5 g jeget kell dobni.

Ha a jég (-5 °C) – os, akkor előbb az olvadáspontra kell felmelegíteni.

$c_{víz} \cdot m_{víz} \cdot (T_{víz} - T_k) = c_{jég} \cdot m_{jég} \cdot T_{jég} + L_o \cdot m_{jég} + c_{víz} \cdot m_{jég} \cdot T_k$

$m_{jég} \cdot (c_{jég} \cdot T_{jég} + L_o + c_{víz} \cdot T_k) = c_{víz} \cdot m_{víz} \cdot (T_{víz} - T_k)$

Fejezzük ki a jég tömegét, írjuk be az ismert adatokat

$$m_{jég} = \frac{4{,}2\frac{kJ}{kg \cdot {}^0C} \cdot 0{,}4kg \cdot 16\,{}^0C}{2{,}1\frac{kJ}{kg \cdot {}^0C} \cdot 5\,{}^0C + 334\frac{kJ}{kg} + 4{,}2\frac{kJ}{kg \cdot {}^0C} \cdot 10\,{}^0C} = 69{,}5\ g$$

Az üdítőbe 69,5 g (- 5 °C) - os jeget kell dobni.

M.6.120

Megoldás:

$m_{jég}$ = 6 kg A jeget fel kell melegíteni az olvadáspontra, meg kell olvasztani,
$T_{íz}$ = 20 °C majd a °C-os vizet melegíteni kell 20 °C-ra!
$T_{jég}$ = - 15 °C Helyettesítsük be a fajhőket és az olvadáshőt!

$Q = c_{jég} \cdot m_{jég} \cdot \Delta T_{jég} + L_o \cdot m_{jég} + c_{víz} \cdot m_{jég} \cdot \Delta T_{víz}$

Q = ?

$Q = 2{,}1\frac{kJ}{kg\,{}^0C} \cdot 6\ kg \cdot 15\ {}^0C + 334 \cdot 6\ kg + 4{,}2\frac{kJ}{kg\,{}^0C} \cdot 6\ kg \cdot 20\ {}^0C = 2697\ kJ$

A jéggel 2697 kJ hőt kell közölni.

Mi történik, ha Q = 1800 kJ ?

$Q_1 = c_{jég} \cdot m_{jég} \cdot \Delta T_{jég}$ = 189 kJ, a jég felmelegszik az olvadáspontra.

$Q_2 = L_o \cdot m_{jég}$ = 2004 kJ, nem miden 0°C – os jég olvad meg.

A melegítés után (1800 – 189) = 1611 kJ hő marad, ez olvasztja meg a jeget.

$L_o \cdot m_x$ = 1611 kJ → m_x = 4,82 kg jég olvad meg.

M.6.121

Megoldás:

$m_{jég}$ = 0,4 kg

$T_{jég}$ = -20 °C

Q = 230 kJ

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

a) Mi történik a jéggel?

$Q_1 = c_{jég} \cdot m_{jég} \cdot \Delta T = 16{,}8$ kJ

$Q_2 = L_o \cdot m_{jég} = 133{,}6$ kJ

Az összes jég felmelegszik az olvadáspontra, elolvad és marad még 79,6 kJ hő.

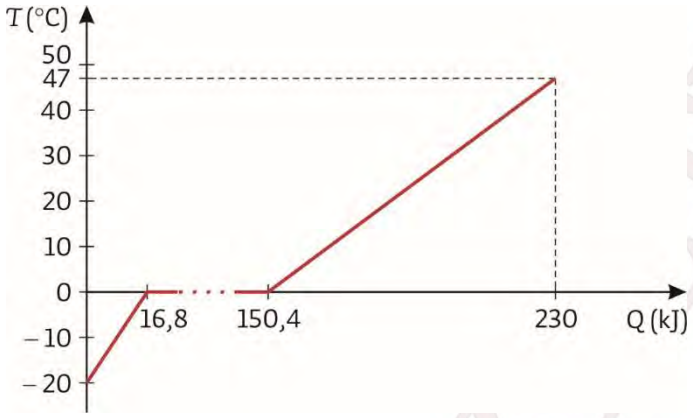
Ez a hőmennyiség felmelegíti a o °C-os vizet.

$79{,}6$ kJ $= c_{víz} \cdot m_{jég} \cdot T_x$

Fejezzük ki a hőmérsékletet, helyettesítsük be az adatokat!

$T_{víz} = 47$ °C-os víz lesz a termoszban.

b)



M.6.122.

Megoldás:

h = 0,8 m

g = 10 $\frac{m}{s^2}$

a) v = ?

Az összes helyzeti energia mozgási energiává alakul.

$$\frac{m \cdot v^2}{2} = m \cdot g \cdot h$$

Fejezzük ki a v – t, helyettesítsük be az adatokat!

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = 4 \frac{m}{s}$$

A lejtő alján a sebesség 4 $\frac{m}{s}$ lesz.

b) $v_1 = 3 \frac{m}{s}$

A mozgási energia $E_m = \frac{m \cdot v^2}{2} = 4{,}5 \cdot m(J)$

A helyzeti energia: $E_h = m \cdot g \cdot h$

A keletkezett hő a két energia különbsége: $Q = m \cdot g \cdot h - \frac{m \cdot v_1^2}{2}$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$$\frac{mgh-\frac{m\cdot v_1^2}{2}}{mgh}\cdot 100\% = (1-\frac{v_1^2}{2gh})\cdot 100\% = 44\%$$

A helyzeti energia 44 %-a alakult hővé.

c) ΔT = ?

$\frac{Q}{3} = c_{vas} \cdot m \cdot \Delta T$

Fejezzük ki a ΔT hőmérsékletváltozást, majd helyettesítsük be az adatokat.

$$\Delta T = \frac{Q}{3c_{vas}m} = \frac{gh-\frac{v_1^2}{2}}{3c_{vas}} = 2{,}5 \cdot 10^{-3}\ °C$$

$\Delta T = 2{,}5 \cdot 10^{-3}$ °C-kal nőtt a hasáb hőmérséklete, ami olyan kicsi, hogy elhanyagolható.

M.6.123.

Megoldás:

m = 1500 kg

$v_1 = 25\ \frac{m}{s}$

$v_2 = 15\ \frac{m}{s}$

a) Q = ?

$Q = E_2 - E_1 = \frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2) = 300$ kJ hő keletkezett.

b) m = 4,6 kg

ΔT = 79 °C

$Q_1 = 0{,}6 \cdot Q$

c = ?

Alkalmazzuk a $Q_1 = c \cdot m \cdot \Delta T$ összefüggést.

Fejezzük ki a c – t, helyettesítsük be az adatokat.

$$c = \frac{Q_1}{m\cdot\Delta T} = \frac{180\text{kJ}}{4{,}85\text{kg}\cdot 79^0\text{C}} = 469{,}8\ \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot{}^0\text{C}}$$

M.6.124.

Megoldás:

m = 8 kg

h = 20 m

$c_{réz}$= 385 $\frac{J}{kg\cdot{}^0C}$

g = 10 $\frac{m}{s^2}$

a) E_m = ?

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Az összes helyzeti energia mozgási energiává alakul.

$E_m = \frac{m \cdot v^2}{2} = m \cdot g \cdot h = 1600$ J a mozgási energia a becsapódáskor.

b) $\Delta T = ?$

A helyzeti energia 70 %-a melegíti az asztalt. $0{,}7 \cdot m \cdot g \cdot h = c \cdot m \cdot \Delta T$

Fejezzük ki a ΔT hőmérsékletváltozást, majd helyettesítsük be az adatokat.

$$\Delta T = \frac{0{,}7 \cdot 10 \frac{m}{s^2} \cdot 20 m}{385 \frac{J}{kg \cdot {}^0C}} = 0{,}36\,{}^0C$$ - kal nőtt a golyó hőmérséklete.

M.6.125.

Megoldás:

Az alumínium fajhője: $c = 900 \frac{J}{kg \cdot {}^0C}$. Az alumínium moláris tömege: $M = 26{,}98 \frac{g}{mol}$

.

Vegyünk 1 mol alumíniumot, n = 1 mol.

$c = \frac{C}{m}$ ebből a hőkapacitás $C = c \cdot m = 900 \frac{J}{kg \cdot {}^0C} \cdot 26{,}98 \cdot 10^{-3} kg = 24{,}3 \frac{J}{{}^0C}$

Az alumínium mólhője : $C_M = \frac{C}{n} = \frac{24{,}3 \frac{J}{{}^0C}}{1 mol} = 24{,}3 \frac{J}{mol \cdot {}^0C}$

(Vegyük észre, hogy a fajhő és a mólhő között a következő összefüggés áll fenn: $C_M = c \cdot M$, ami annak a következménye, hogy a fajhő egységnyi tömegre, a mólhő viszont a moláris tömegre vonatkozik.)

M.6.12.6.

Megoldás:

$m_{jég} = 8$ kg

$T_1 = -12$ °C

$T_2 = 30$ °C

$t = 50$ perc

$\eta = 0{,}45$

$Q = ?$

$P = ?$

A jeget fel kell melegíteni az olvadáspontra, meg kell olvasztani, majd a °C-os vizet fel kell melegíteni 30 °C-ra!

$Q = c_{jég} \cdot m_{jég} \cdot \Delta T_{jég} + L_o \cdot m_{jég} + c_{víz} \cdot m_{jég} \cdot \Delta T_{víz} = 8$ kg $\cdot (25{,}2 + 334 + 126) = 3881{,}6$ kJ

A melegítéshez 3881,6 kJ hőmennyiség szükséges.

A melegítés főzőlappal történik: $Q = 0{,}45 \cdot P \cdot t$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Fejezzük ki a P teljesítményt és helyettesítsük be az adatokat.

$$P = \frac{3881{,}6 \cdot 10^3\,J}{0{,}45 \cdot 3000s} = 2880\ w$$

A főzőlap teljesítménye 2880 watt.

M.6.127.

Megoldás:

$m_{jég} = 5$ kg
$T_1 = -10$ °C
$T_2 = 25$ °C
$P = 2500$ w
$\eta = 0{,}55$
$Q = ?$
$t = ?$

A jeget fel kell melegíteni az olvadáspontra, meg kell olvasztani, majd a °C-os vizet fel kell melegíteni 25 °C-ra!

$Q = c_{jég} \cdot m_{jég} \cdot \Delta T_{jég} + L_o \cdot m_{jég} + c_{víz} \cdot m_{jég} \cdot \Delta T_{víz} = 5\ kg \cdot (21 + 334 + 105) = 2300$ kJ

A melegítéshez 2300 kJ hőmennyiség szükséges.
A melegítés főzőlappal történik: $Q = 0{,}55 \cdot P \cdot t$
Fejezzük ki a t időt, majd helyettesítsük be az adatokat.

$$t = \frac{2300kJ}{0{,}55 \cdot 2500\frac{J}{s}} = 1673\ s = 28\ perc$$

A melegítés 28 percig tart.

M.M.6.128.

Megoldás:

$m_{víz} = 0{,}1$ kg
$m_{gőz} = 0{,}0053$ kg
$T_{kávé} = 25$ °C
$T_{gőz} = 100$ °C
a) $T_k = ?$
A vízgőz lecsapódik, lehűl, hőt ad le, amit a kávé felvesz.
A kávé felmelegszik
$Q_{le} = Q_{fel}$
$L_f \cdot m_{gőz} + c_{víz} \cdot m_{gőz} \cdot \Delta T_{gőz} = c_{víz} \cdot m_{víz} \cdot \Delta T_{víz}$

Helyettesítsük be az adatokat! Fejezzük ki a T_k közös hőmérsékletet!

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$2256 \cdot 0{,}0053\ \text{kg} + 4{,}2\frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot^0\text{C}} \cdot 0{,}0053\ \text{kg} \cdot (100^o\text{C} - T_k) = 4{,}2\frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot^0\text{C}} \cdot 0{,}1\ \text{kg} \cdot (T_k - 25^o\text{C})$

Tk = 55kJ,8 °C

A kávé hőmérséklete 55,8 °C lesz.

b) $T_{gőz} = 110\ ^oC$

$m_{gőz} = 0{,}0048\ \text{kg}$

$T_k = ?$

A vízgőz lehűl 100 °C – ra, lecsapódik, lehűl a közös hőmérsékletre T_k - ra, hőt ad le, amit a kávé felvesz.

$Q_{le} = Q_{fel}$

$$c_{gőz} \cdot m_{gőz} \cdot \Delta T_{gőz} + L_f \cdot m_{gőz} + c_{víz} \cdot m_{gőz} \cdot \Delta T_1 = c_{víz} \cdot m_{víz} \cdot \Delta T_2$$

Helyettesítsük be az adatokat! Fejezzük ki a T_k közös hőmérsékletet!

$1{,}9\frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot^0\text{C}} \cdot 0{,}0048\ \text{kg} \cdot 10\ ^oC + 2256 \cdot 0{,}0048\ \text{kg} + 4{,}2\frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot^0\text{C}} \cdot 0{,}0048\ \text{kg} \cdot (100^o\text{C} - T_k) =$

$= 4{,}2\frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot^0\text{C}} \cdot 0{,}1\ \text{kg} \cdot (T_k - 25^o\text{C})$

A kávé hőmérséklete $T_k \approx 53\ ^oC$ lesz.

M.M.6.129.

Megoldás:

M = 450 kg

ΔT = 0,5 °C

m = ?

Az elpárolgó víz hőt von el a környezettől, a ló testétől.

$$c_{víz} \cdot M \cdot \Delta T = L_p \cdot m$$

Fejezzük ki az elpárolgó víz m tömegét! Helyettesítsük be az adatokat!

$$m = \frac{c_{víz} \cdot M \cdot \Delta T}{L_p} = \frac{4{,}2\frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot^0\text{C}} \cdot 450\text{kg} \cdot 0{,}5^0\text{C}}{2400\frac{\text{kJ}}{\text{kg}}} = 0{,}39\ \text{kg}$$

A ló 0,39 kg vizet párologtat el.

(A lovak is állandó testhőmérsékletűek, ezért amikor vizet párologtatnak, akkor ezzel a folyamatosan testükben felszabaduló energiát vezetik el. A feladat lényegében arról szól, hogy 0,39 kg víz elpárologtatásával a ló testében felszabaduló Q = cmΔT = 945 kJ hő adódik át a környezetnek.)

M.6.130.

Megoldás:

$m_{víz} = 0{,}22\ \text{kg}$

$T_{víz} = 75\ ^oC$

Q = 530 kJ

$c_{víz} = 4200\frac{J}{kg^0C}$

A víz felmelegszik 100°C-ra.

$Q_1 = c_{víz} \cdot m_{víz} \cdot 25\ ^oC = 23\ \text{kJ}$

A 100 °C-os vízből 100 °C-os vízgőz lesz. $Q_2 = L_f \cdot m_{víz} = 496\ \text{kJ}$

Marad: (530 – 519)kJ = 11 kJ

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

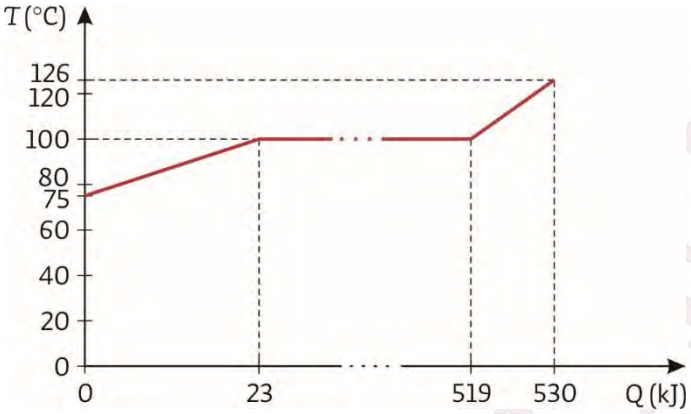
SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$L_f = 2256 \frac{kJ}{kg}$ Ez a hőmennyiség felmelegíti a vízgőzt. $c_{gőz} \cdot m_{víz} \cdot \Delta T = 11$ kJ

$c_{gőz} = 1900 \frac{J}{kg^0C}$ Fejezzük ki a hőmérséklet megváltozását!

Helyettesítsük be az adatokat! $\Delta T = \frac{11kJ}{1{,}9 \frac{kJ}{kg.^0C} \cdot 0{,}22kg} =$ = 26 °C

A kaloriméterben 220 g 126 °C-os gőz lesz.



M.6.131.

Megoldás:

$m_{jég}$= 280g $m_{gőz}$= 65 g $L_o = 3{,}34 \cdot 10^5 \frac{J}{kg}$ $L_f = 2{,}256 \cdot 10^6 \frac{J}{kg}$

$T_{jég}$= −25 °C $T_{gőz}$= 150 °C $c_{gőz} = 1900 \frac{J}{kg \cdot ^0C}$ $c_{víz} = 4200 \frac{J}{kg \cdot ^0C}$ $c_{jég} = 2100 \frac{J}{kg \cdot ^0C}$

A jég 0 °C-ra melegszik, majd megolvad. A felvett hőmennyiség:

$Q_{fel} = c_{jég} \cdot m_{jég} \cdot T_{jég} + L_o \cdot m_{jég} = 2100 \frac{J}{kg \cdot ^0C} \cdot 0{,}28 \text{ kg} \cdot 25 \text{ °C} + 3{,}34 \cdot 10^5 \frac{J}{kg} \cdot 0{,}28 \text{ kg} =$

= 108,22 kJ

A gőz lehűl 100 °C-ra, majd lecsapódik. A leadott hőmennyiség:

$Q_{le} = c_{gőz} \cdot m_{gőz} \cdot (T_{gőz} - 100^oC) + L_f \cdot m_{gőz} = 1900 \frac{J}{kg} \cdot 0{,}065 \text{ kg} \cdot 50 \text{ °C} +$

$+ 2{,}256 \cdot 10^6 \frac{J}{kg} \cdot 0{,}065 \text{ kg} = 208$ kJ

A számítások alapján látható, hogy a gőz által leadott hő meg tudja olvasztani az összes jeget.

Alkalmazzuk az energiamegmaradást kifejező $Q_{fel} = Q_{le}$ összefüggést:

$c_{jég} \cdot m_{jég} \cdot T_{jég} + L_o \cdot m_{jég} + c_{víz} m_{jég} T_k = c_{gőz} \cdot m_{gőz} \cdot (T_{gőz} - 100^oC) + L_f \cdot m_{gőz} + c_{víz} m_{gőz} (100°C - T_k)$

A számítások elvégzése után a kaloriméterben keletkező víz közös hőmérséklete:

$T_k = 87{,}7°C \approx 88°C$.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

A gőz lehűl 100 °C-ra, majd lecsapódik, a keletkezett víz lehűl o °C-ra. A leadott hőmennyiség:

$Q_{le} = c_{gőz} \cdot m_{gőz} \cdot (T_{gőz} - 100°C) + L_f \cdot m_{gőz} + c_{víz} \cdot m_{gőz} \cdot 100\ °C = 1900 \frac{J}{kg} \cdot 0{,}065\ kg \cdot 50\ °C +$

$+ 2{,}256 \cdot 10^6 \frac{J}{kg} \cdot 0{,}065\ kg + 4200 \frac{J}{kg \cdot {}^0C} \cdot 0{,}065\ kg \cdot 100\ °C = 27{,}3\ kJ$

A számítások alapján látható, hogy a gőz által leadott hő nem tudja az összes jeget megolvasztani.

A hiányzó hőmennyiség: $Q_x = Q_{fel} - Q_{le} = 80{,}92\ kJ$

Mennyi jeget (m_x) tudna ez a hiányzó hő megolvasztani?

$Q_x = L_o \cdot m_x \qquad m_x = \frac{Q_x}{L_0} = \frac{80{,}92 kJ}{334 \frac{kJ}{kg}} = 0{,}242 kg$

A kaloriméterben 0,242 kg o °C-os jég és 0,103 kg o °C-os víz keveréke lesz.

M.6.132.

Megoldás:

$m_{jég} = 250g \qquad m_{gőz} = 30\ g \quad L_o = 3{,}34 \cdot 10^5 \frac{J}{kg} \qquad L_f = 2{,}256 \cdot 10^6 \frac{J}{kg}$

$T_{jég} = -8\ °C \qquad T_{gőz} = 160\ °C \quad c_{gőz} = 1900 \frac{J}{kg \cdot {}^0C} \quad c_{víz} = 4200 \frac{J}{kg \cdot {}^0C} \quad c_{jég} = 2100 \frac{J}{kg \cdot {}^0C}$

A jég o °C-ra melegszik, majd megolvad. A felvett hőmennyiség:

$Q_{fel} = c_{jég} \cdot m_{jég} \cdot T_{jég} + L_o \cdot m_{jég} = 2100 \frac{J}{kg \cdot {}^0C} \cdot 0{,}25\ kg \cdot 8\ °C + 3{,}34 \cdot 10^5 \frac{J}{kg} \cdot 0{,}25\ kg =$

$= 87{,}7\ kJ$

A gőz lehűl 100 °C-ra, lecsapódik, majd lehűl o°C-ra. A leadott hőmennyiség:

$Q_{le} = c_{gőz} \cdot m_{gőz} \cdot (T_{gőz} - 100°C) + L_f \cdot m_{gőz} + c_{gőz} \cdot m_{gőz} \cdot 100°C = 1{,}9 \frac{kJ}{kg \cdot {}^0C} \cdot 0{,}03\ kg \cdot 60\ °C +$

$2256 \frac{kJ}{kg} \cdot 0{,}03\ kg + 4{,}2 \frac{kJ}{kg \cdot {}^0C} \cdot 0{,}03\ kg \cdot 100°C = 83{,}7\ kJ$

A számítások alapján látható, hogy a gőz által leadott hő nem tudja az összes jeget megolvasztani, valamennyi o°C-os jég marad a kaloriméterben a szintén o°C-os víz mellett. A maradék jég mennyiségét így tudjuk kiszámítani: $\Delta m_{jég} = \frac{Q_{fel} - Q_{le}}{L_0} = 12$ gramm. .

A kaloriméterben o°C-on 268 g víz és 12 g jég lesz a végállapotban.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.6.133.

Megoldás:

m_{vas} = 0,65 kg
$m_{víz}$ = 6 kg
$T_{víz}$ = 20 °C
T_k = 22 °C
$\Delta T_{víz}$= 2 °C

T_{vas} = ?

Alkalmazzuk a kalorimetria egyenletét: $Q_{fel} = Q_{le}$!

Helyettesítsük be az adatokat!

$c_{víz} \cdot m_{víz} \cdot \Delta T_{víz} = c_{vas} \cdot m_{vas} \cdot (T_{vas} - 22\ °C)$

$50400 = 302{,}25 \cdot (T_{vas} - 22)$ Fejezzük ki a hőmérsékletet!

$T_{vas} = 189\ °C$

A patkó hőmérséklete 189 °C volt.

.M.6.134.

Megoldás:

$c_{víz} = 4200 \frac{J}{kg^0C}$

L_o= 334

$c_{jég}$= 2100 $\frac{J}{kg^0C}$

$m_{jég}$= 1, kg

Q = 750 kJ

$T_{jég}$= - 18 °C

A jég felmelegszik az olvadáspontra.

$Q_1 = c_{jég} \cdot m_{jég} \cdot \Delta T_{jég} = 2{,}1 \frac{kJ}{kg \cdot ^0C} \cdot 1{,}6kg \cdot 18^0C = 60{,}5kJ$

A °C-os jég megolvad. $Q_2 = L_o \cdot m_{jég}$= 334 · 1,6 kg = 534 kJ

0 °C-os víz keletkezik és még marad 155,5 kJ hőmennyiség.

A maradék hő felmelegíti a 0 °C-os vizet.

$c_{víz} \cdot m_{jég} \cdot \Delta T$ = 155,5 kJ

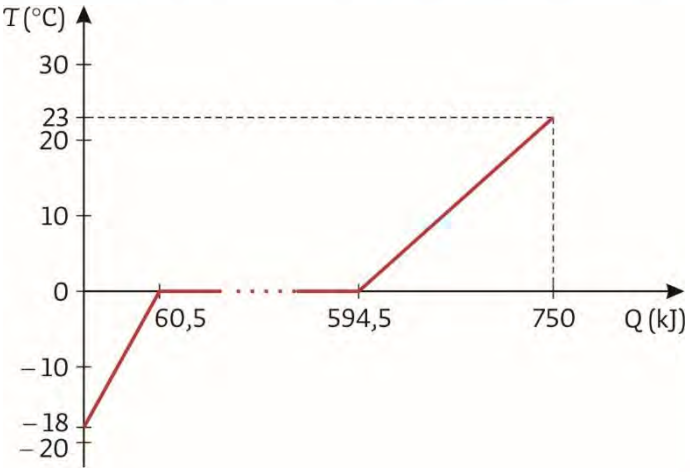
Fejezzük ki a ΔT hőmérsékletváltozást.

Helyettesítsük be az adatokat! $\Delta T = \frac{155{,}5kJ}{4{,}2 \frac{kJ}{kg \cdot ^0C} \cdot 1{,}6kg} = 23^0C$

A kaloriméterben 23 °C-os víz lesz.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT



M.6.135.

Megoldás:

$m_{víz}$ = 0,6 kg

$T_{víz}$ = 12 °C

η = 0,55

Q = ?

$m_{gáz}$ = ?

A vizet fel kell melegíteni a forráspontra, elforralni, majd a vízgőzt 140 °C – ra melegíteni.

$Q = c_{víz} \cdot m_{víz} \cdot \Delta T_{víz} + L_f \cdot m_{víz} + c_{gőz} \cdot m_{víz} \cdot \Delta T_{gőz} = 1{,}62$ MJ

A melegítéshez 1,62 MJ hő szükséges.

A hőmennyiséget a gáz elégetésével állítjuk elő.

$Q = 0{,}55 \cdot L_é \cdot m_{gáz}$

Fejezzük ki a gáz tömegét, helyettesítsük be az adatokat!

$$m_{gáz} = \frac{1{,}62 MJ}{0{,}55 \cdot 55 \frac{MJ}{kg}} = 0{,}054 \text{ kg}$$

Az elégetett földgáz tömege 54 g.

M.6.136.

Megoldás:

$c_{víz} = 4200 \frac{J}{kg \cdot {}^0C}$ $L_f = 2{,}256 \cdot 10^6 \frac{J}{kg}$

a) m = 2 kg

T_1 = 18 °C

T_2 = 100 °C

ΔT = 82 °C

Q = ?

A vizet felmelegítjük a forráspontra, majd elforraljuk.

$Q = c_{víz} \cdot m_{víz} \cdot \Delta T_{víz} + L_f \cdot m_{víz} = 5{,}25$ MJ

A melegítéshez 5,25 MJ szükséges.

b) P = 1800 w

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

η = 0,75
t = ?
A hőmennyiséget merülőforralóval állítjuk elő.
Q = 0,75·P·t
Fejezzük ki az időt, helyettesítsük be az adatokat!

$$t = \frac{5250\text{kJ}}{0{,}75 \cdot 1{,}8\frac{\text{kJ}}{\text{s}}} = 3888{,}9\ \text{s} = 65\ \text{perc}$$

A víz teljes elforralása 65 perc után következett be.

M.6.137.

A víz forráshője 90 °C – on $2282\frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$.

Megoldás:

$c_{víz} = 4200\ \frac{J}{kg \cdot {}^0C}$

$L_p = 2282\frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$.

$m_1 = 20$ kg
$T_1 = 22$ °C
$T_2 = 90$ °C
$\Delta T = 68$ °C
$m_2 = 12$ kg
Q = ?
A 20 kg paradicsomlevet 90 °C – ra melegítjük, ebből 12 kg – ot elforralunk.
$Q = c_{víz} \cdot m_1 \cdot \Delta T + L_f \cdot m_2 = 33{,}1$ MJ
A bepárláshoz 33,1 MJ hőmennyiség szükséges.

.M.6.138.

A víz forráshője 80 °C – on $2308\frac{kJ}{kg}$.

Megoldás:

$c_{víz} = 4200\ \frac{J}{kg \cdot {}^0C}$ $c_{gőz} = 1900\ \frac{J}{kg \cdot {}^0C}$

$L_f = 2308\frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$

$m_1 = 4000$ kg
$T_1 = 20$ °C
$T_2 = 80$ °C
$\Delta T_1 = 60$ °C
$m_2 = 2500$ kg
$T_{gőz} = 115$ °C

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$\Delta T_2 = 35\ ^oC$
$\eta = 0{,}65$
$m_{gőz} = ?$
Az almalevet 80 °C – ra kell melegíteni, majd 2,5 tonna vizet el kell forralni.
A szükséges hőt a gőz lehűlése, és 80°C-on történő lecsapódása szolgáltatja:
$c_{víz} \cdot m_1 \cdot \Delta T_1 + L_f \cdot m_2 = 0{,}65 \cdot (c_{gőz} \cdot m_{gőz} \cdot \Delta T_2 + L_f \cdot m_{gőz})$
Helyettesítsük be az adatokat, fejezzük ki a gőz tömegét.
$6{,}778 \cdot 10^6\ kJ = 0{,}65 \cdot m_{gőz} \cdot 2{,}37 \cdot 10^3\ kJ$
$m_{gőz} = 4400\ kg$
A sűrítéshez 4,4 tonna gőz szükséges.

M.6.139.

$L_o = 334$ $\qquad c_{jég} = 2100 \frac{J}{kg^0C}$ $\qquad c_{víz} = 4200 \frac{J}{kg^0C}$

Megoldás:
$m_{jég} = 15\ kg$
$T_1 = -18^oC$
$T_2 = 20^oC$
$m_{olaj} = ?$

A jeget fel kell melegíteni az olvadáspontra, meg kell olvasztani, majd a °C-os vizet fel kell melegíteni 20 °C-ra!
$Q = c_{jég} \cdot m_{jég} \cdot \Delta T_{jég} + L_o \cdot m_{jég} + c_{víz} \cdot m_{jég} \cdot \Delta T_{víz} = 0{,}6 \cdot L_é \cdot m_{olaj}$
Fejezzük ki az m_{olaj} tömeget, majd helyettesítsük be az adatokat.

$$m_{olaj} = \frac{m_{jég} \cdot (c_{jég} \cdot \Delta T_{jég} + L_o + c_{víz} \cdot \Delta T_{víz})}{0{,}6 \cdot L_é} = 0{,}28\ kg$$ gázolajat kell elégetni.

.M.6.140.

$L_é = 55 \frac{MJ}{kg}$ $\qquad L_o = 334$

Megoldás:
$m_{jég} = 150\ kg$
$m_{gáz} = 1\ kg$
$Q_{jég} = L_o \cdot m_{jég} = 50{,}1\ MJ$
$Q_{gáz} = L_é \cdot m = 55\ MJ$
A földgáz elégetésekor szabadul fel több energia.

M.6.141.

Megoldás:

1 kcal = 4,186 kJ

A zsírból nyerhető energia: $Q = 36\ g \cdot 9{,}3 \frac{kcal}{g} = 334{,}8\ kcal$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

A fehérjéből nyerhető energia: Q = 7,6 g ·4,2 $\frac{kcal}{g}$ = 31,9 kcal

A szénhidrátból nyerhető energia: Q = 46,5 g ·4,1 $\frac{kcal}{g}$ = 190,7 kcal

A tábla csoki elfogyasztásakor összesen 557,4 kcal energiát kap a szervezetünk, amely 2333,3 kJ-nak felel meg.

M.6.142.

Megoldás:

Legyen talpunk becsléssel kapott területe 156 cm², hőmérséklete 35 °C.

T= 35 °C= 308K

A= 156 cm²

$\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 \cdot K^4}$

ε=0,98

P= ?

Alkalmazzuk a hősugárzásra kapott összefüggést: $Q = \varepsilon \cdot \sigma \cdot A \cdot t \cdot T^4$

$P = \frac{W}{t} = \frac{Q}{t} = \frac{\varepsilon \cdot \sigma \cdot A \cdot t \cdot T^4}{t} = 0{,}98 \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 \cdot K^4} \cdot 1{,}56 \cdot 10^{-2} m^2 308^4 K^4 = 7{,}8 \text{ W} \approx 8W$

Ez meglepően sok. Van olyan takarékos izzólámpa, amelynek kisebb a teljesítménye (5 W). Ezt a kisugárzást hosszú távon nem tudná a szervezetünk biztosítani. Nincs is rá szükség, mert a hősugárzással együtt hőelnyelés is történik. A környezetünkben lévő testek (radiátor) által kisugárzott hőt elnyeli a testünk, ezért lényegesen kisebb hőteljesítményt állít elő.

M.6.143

Megoldás:

d= 3 mm; r = 1,5 mm

l = 40 cm

ΔT = 380 K

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

t = 4 perc= 240 s

$\lambda = 221 \frac{J}{m \cdot K \cdot s}$

$c_{víz} = 4200 \frac{J}{kg \cdot °C}$

m = 10 kg

Q = ?

$\Delta T_{víz}$ =?

Számítsuk ki az alumínium drót keresztmetszetét: $A = r^2 \cdot \pi = 7{,}1\ mm^2$

Alkalmazzuk a hővezetés képletét, helyettesítsük be az ismert adatokat: $Q = \frac{\lambda \cdot A \cdot t \cdot \Delta T}{l} = \frac{221 \frac{J}{m \cdot K \cdot s} \cdot 7{,}1 \cdot 10^{-6} m^2 \cdot 240 s \cdot 380 K}{4 \cdot 10^{-1} m}$ = 357,8 kJ

A drót által átvezetett hő 357,8 kJ.

A hő a vizet melegíti, $Q = c_{víz} \cdot m \cdot \Delta T$ összefüggést alkalmazzuk.

Fejezzük ki a ΔT hőmérséklet különbséget, helyettesítsük be az ismert adatokat.

$\Delta T = \frac{Q}{c_{víz} \cdot m} = \frac{357{,}8 kJ}{10\ kg \cdot 4{,}2 \frac{kJ}{kg \cdot °C}}$=85,2 °C

A víz hőmérséklete 85 °C-kal emelkedett.

M.6.144*

Megoldás:

d= 0,5 mm; r=0,25 mm

$\lambda = 0{,}08 \frac{J}{m \cdot K \cdot s}$

$\rho = 3{,}9 \cdot 10^{-7} \Omega m$

h = 0,04 mm

I = 13 A

ΔT = ?

A vezeték átmérőjének területe: $A = r^2 \cdot \pi$ =0,196 mm^2 = $1{,}96 \cdot 10^{-7} m^2$

Számítsuk ki 1 m hosszú vezeték ellenállását az $R = \rho \cdot \frac{l}{A}$ képlettel.

$R = 3{,}9 \cdot 10^{-7} \Omega m \cdot \frac{1m}{1{,}96 \cdot 10^{-7} m^2}$ =1,99 Ω≈ 2Ω

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

A műanyag szigetelő felülete egy henger palástja $P = 2 \cdot r_k \cdot \pi \cdot l$.

$r_k = \frac{0{,}25+0.29}{2} = 0{,}27mm$ a középkör sugara.

Helyettesítsük be az adatokat.

$P = 2 \cdot 0{,}27 \cdot 10^{-3}m \cdot \pi \cdot 1m = 1{,}7 \cdot 10^{-3}m^2$

A vezetékben keletkezett hőt vezeti el a szigetelő.

$I^2 \cdot R \cdot t = \lambda \cdot t \cdot \frac{P}{h} \cdot \Delta T$

Egyszerűsítsünk a t idővel, fejezzük ki a ΔT hőmérséklet különbséget, helyettesítsük be az adatokat.

$\Delta T = \frac{I^2 \cdot R \cdot h}{\lambda \cdot P} = \frac{169\,A^2 \cdot 2\Omega \cdot 4 \cdot 10^{-5}m}{0{,}08\,\frac{J}{m \cdot K \cdot s} \cdot 1{,}7 \cdot 10^{-3}m^2} = 99{,}4\ K \approx 99°C$

A hőmérséklet különbség 99 °C, majdnem 100 °C, megolvadhat a szigetelés.

M.6.145*

$\lambda_{szig} = 0{,}034\frac{J}{m \cdot K \cdot s}$, $\lambda_{tégla} = 0{,}5\frac{J}{m \cdot K \cdot s}$

Megoldás:

$\lambda_{szig} = 0{,}034\frac{J}{m \cdot K \cdot s}$ $\lambda_{tégla} = 0{,}5\frac{J}{m \cdot K \cdot s}$

$A = 1\ m^2$

$T_1 = 22\ °C = 295\ K$

$T_2 = (-8)\ °C = 265\ K$

$\Delta T = 30°C = 30\ K$

$l_{szig} = 10cm = 0{,}1\ m$

$Q = 38\ J$

$t = 1s$

$l_{fal} = ?$

$T = ?$

Alkalmazzuk a $Q = \lambda \cdot t \cdot \frac{A}{l} \cdot \Delta T$ képletet.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Fejezzük ki az l vastagságot, helyettesítsük be az adatokat.

$l_{fal} = \frac{\lambda \cdot t \cdot A \cdot \Delta T}{Q} = \frac{0{,}5 \frac{J}{m \cdot K \cdot s} \cdot 1s \cdot 1m^2 \cdot 30K}{38J} = 0{,}39\ m \approx 40cm$

A téglafal 40 cm vastag.

A falon átvezetett hő tovább terjed a szigetelőben, tehát:

$\lambda_{tégla} \cdot t \cdot \frac{A}{l_{tégla}} \cdot (295 - T) = \lambda_{szig} \cdot t \cdot \frac{A}{l_{szig}} \cdot (T - 265)$

$0{,}5 \frac{J}{m \cdot K \cdot s} \cdot t \cdot \frac{A}{40cm} \cdot (295 - T) = 0{,}034 \frac{J}{m \cdot K \cdot s} \cdot t \cdot \frac{A}{10cm} \cdot (T - 265)$

Egyszerűsítsünk, fejezzük ki a T hőmérsékletet, helyettesítsük be az adatokat.

3,5294·(295-T)= T-265

T = 288,4 K ≈ 15°C

A fal és a szigetelő között a hőmérséklet 15°C lesz.

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

TESZTEK

M.6.146. Két tanuló azon vitatkozott, hogy mennyi gázrészecske van 32 g oxigénben, illetve 28 g nitrogénben.

A. Az oxigénben több részecske van.
B. Egyenlő számú részecske van.
C. Nem dönthető el a kérdés.

Megoldás: A B válasz a helyes, Avogadro törvénye.

M.6.147. Zárt gázpalackban ideális gázt tárolnak. A tömege állandó. A gáz nyomása hogyan függ a részecskék átlagos sebességétől?

A. Nem függ.
B. Egyenesen arányos.
C. A sebesség négyzetével arányos.

Megoldás: A C válasz a helyes

M.6.148. A gázrészecskék Kelvin-skálán mért hőmérséklete hogyan függ a részecskék mozgási energiájától?

A. Fordítottan arányos.
B. Egyenesen arányos.
C. A mozgási energia négyzetével arányos.

Megoldás: A B válasz a helyes.

M.6.149. Két tartály közül az egyikben hélium a másikban oxigén van. A gázrészecskék száma és hőmérséklete egyenlő. Melyik állítás igaz a hélium és az oxigén belső energiájára?

A. Egyenlők.
B. A héliumé nagyobb.
C. Az oxigéné nagyobb.

Megoldás: A C válasz a helyes.

M.6.150. Hogyan lehet periódikusan működő gépet szerkeszteni, amely munkát végezne valamilyen energia felhasználása nélkül (perpetuum mobile). Melyik válasz nem igaz?

A. Ha fejlődik a tudomány akkor majd lehetséges lesz perpetuum mobile-t építeni.
B. A hőtan I. főtétele miatt nem lehet ilyen gépet építeni.
C. Soha nem lehet perpetuum mobile-t építeni.

Megoldás: Az A válasz a jó.

M.6.151. Izochor folyamat esetén a gáz belső energiáját mi változtatja meg?

A. A hőközlés.
B. A térfogati munka.
C. A hőközlés és a térfogati munka.

Megoldás: Az A válasz a helyes.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.6.152. Adiabatikus állapotváltozáskor az ideális gáz belső energiáját mi változtatja meg?

A. A hőközlés.
B. A térfogati munka.
C. A hőközlés és a térfogati munka.

Megoldás: A B válasz a helyes.

M.6.153. Az ideális gázoknál megkülönböztetünk állandó nyomáson (c_p) és állandó térfogaton (c_v) értelmezett fajhőt.

A. A c_v mindig nagyobb, mint a c_p .
B. A c_v mindig kisebb, mint a c_p .
C. Van olyan gáz, amelynél a c_p és a c_v egyenlő.

Megoldás: A B válasz a helyes.

M.6.154. Dízelmotor p –V diagramja. A CD szakaszon mi történik? (M.6.158.ábra)

A. Adiabatikus tágulás, munkavégzés.
B. Izotermikus tágulás.
C. A motor levegőt szív be.

Megoldás: Az A válasz a helyes.

M.6.155. A forró leves hamarabb elhűl, ha fújjuk. Mi a magyarázata?

A. A jelenségre nincs fizikai magyarázat.
B. A ráfújt hidegebb levegő csökkenti a leves belső energiáját.
C. A párolgás gyorsabb, ha a leves fölül fújással eltávolítjuk a keletkezett gőzt.

Megoldás: A C válasz a helyes.

M.6.156. Télen –10°C hőmérsékletig miért sózzák a jeges utakat?

A. A sóoldat fagyáspontja alacsonyabb, mint a vízé.
B. A csúszási súrlódási együttható növekszik.
C: A só maró hatása miatt.

Megoldás: Az A válasz a helyes.

M.6.157. Főzéskor gyakran használjuk a kuktafazekat. Miért?

A. A kuktafazék belsejében kisebb a nyomás, ezért megnő a víz forráspontja, a gyorsabb főzés.
B: A kuktafazék belsejében nagyobb a nyomás, ezért megnő a víz forráspontja, a főzés gyorsabb.
C. A kuktafazék belsejében jobb a hőáramlás.

Megoldás: A B válasz a helyes.

M.6.158. A fűtőszálon kívül miért van ventillátor is az elektromos melegítőben?

A. Ha nem lenne ventillátor, elégnének a fűtőszálak.
B. Jobban tudjuk irányítani a hőáramlást.
C. Jobb a melegítés hatásfoka.

Megoldás: Az A válasz a helyes.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.6.159. A termoszba töltött hideg ital a nyári melegben is sokáig megtartja hőmérsékletét. Mi a magyarázata?

A. A dugó és a plusz záró fedél miatt jó a szigetelés.
B. A kettős üveg között levegő van, amely jó hőszigetelő.
C. Az üvegtartály kettős fala között vákuum van. Se hőáramlás, se hővezetés nem jön létre.

Megoldás: A C válasz a helyes.

M.6.160. A következő fizikai mennyiségek közül melyek nem az ideális gázok állapotjelzői?

A. Munka, hő.
B. Térfogat, nyomás.
C. Hőmérséklet, tömeg.

Megoldás: Az A válasz a helyes.

M.6.161. Az ábrán ideális gáz körfolyamatát tanulmányozhatjuk.

A. A gáz által végzett munka nem függ a körüljárás irányától.
B. A gáz által végzett munka negatív.
C. A gáz által végzett munka pozitív.

Megoldás: A C válasz a helyes.

M.6.162. A grafikonon állandó tömegű ideális gázzal végzett körfolyamat látható. Melyik állítás igaz? A belső energia:

A. Az A – B folyamatban nőtt.
B. A D – A folyamatban csökkent.
C. A B – C folyamatban nőtt.

Megoldás: Az A válasz a helyes.

M.6. 163.Melyik igaz a következő állítások közül?

A) Adiabatikus állapotváltozás során a gáz nyomása állandó marad.
B) Izotermikus állapotváltozás során az állapothatározókat (p; V; T) a gáz anyagi minősége meghatározza.
C) Izotermikus állapotváltozás során a molekulák átlagos mozgási energiája állandó marad.

Megoldás: A C) válasz az igaz.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Esszék

6.164. Hogyan működik a kuktafazék?
Milyen halmazállapot változást nevezünk párolgásnak? A párolgáshő fogalma, értelmezése. Mitől függ a párolgás? Milyen állapotváltozás a forrás? Mi a különbség a párolgás és a forrás között? A folyadékok forráspontjának meghatározása. Mitől függ a forráspont? A kuktafazék felépítése. Hogyan működik a kuktafazék, mire használják? Milyen halmazállapot változás a lecsapódás? Hogyan változik az anyagok belső energiája forráskor, illetve lecsapódáskor?

6.165. Kinetikus gázelmélet, a gáz nyomása és hőmérséklete
A gázrészecskék hőmozgása. A Brown mozgás. Avogadro törvénye, az Avogadro szám. A mólnyi mennyiség fogalma. A kinetikus gázelmélet alapfeltevései. Az ideális gáz nyomásának értelmezése a kinetikus modellel. A hőmérséklet mikroszkópikus értelmezése a kinetikus gázelméletben. A Boltzmann állandó, az Avogadro szám és a Regnault állandó kapcsolata.
Van-e a gázrészecskék mozgási energiájának alsó határa? Hogyan lehet erre válaszolni a kinetikus gázelmélet, illetve a hőtan első főtételei alapján?

Kihívást jelentő feladatok

M.6.166.

Megoldás:

a) Alkalmazzuk a $p \cdot V = \textit{állandó}$ összefüggést!

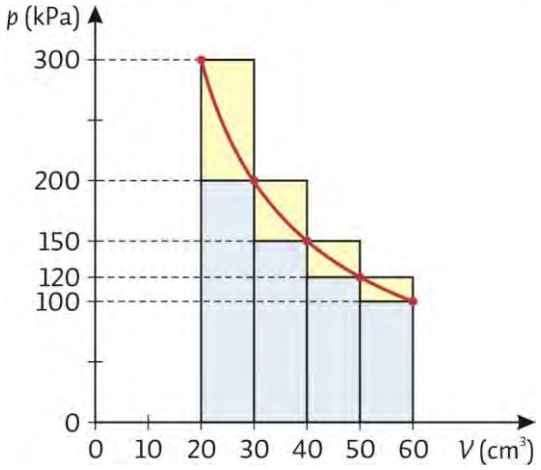
$p_2 \cdot 50\ \text{cm}^3 = 100\ \text{kPa} \cdot 60\ \text{cm}^3$-ből $p_2 = 120\ \text{kPa}$

Hasonló számolással: $p_3 = 150\ \text{kPa}$, $p_4 = 200\ \text{kPa}$ és $p_5 = 300\ \text{kPa}$.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

b)



c) Beírható téglalapok területe: W_{be} = 10 cm³·(200+150+120+100) kPa = 5,7 J
A kívül írható téglalapok területe: W_{ki}= 10 cm³·(300+200+150+120) = 7,7 J

A belülről és kívülről beírható téglalapok átlaga 6,7 J.

d) Integrálszámítással:

$NkT = p_0V_0 = 6$ J

$$W = \int_{20}^{60} p \cdot dV = \int_{20}^{60} \frac{N \cdot k \cdot T}{V} dV = N \cdot k \cdot T \cdot ln3 = 6{,}59\ J$$

Láthatjuk, hogy a négy részre osztásból kapott durva számítás is 10 %-nál pontosabb közelítő eredményt ad. Ha több egyenlő részre osztanánk fel az intervallumot, sokkal pontosabb lenne a közelítés!

M.6.167.

$\rho_{víz} = 1000\ \frac{kg}{m^3}$

Megoldás:

$p_o = 10^5$Pa

T_o= 273 K

A kamrában lévő levegő részecskéinek száma. Alkalmazzuk a $p_o \cdot V_o = N_l \cdot k \cdot T$.

Fejezzük ki az N_l –t, helyettesítsük be az adatokat!

$$N_l = \frac{p_0 \cdot V_0}{k \cdot T_0} = \frac{10^5 \frac{N}{m^2} \cdot 18m^3}{1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 273K} = 4{,}8 \cdot 10^{26}$$ részecske.

a) 1 mól azaz 18 g vízben $6 \cdot 10^{23}$ víz molekula van.1 liter víz jó közelítéssel 1 kg, a benne lévő molekulák száma: $N_{víz} = \frac{1kg}{0{,}018kg} \cdot 6 \cdot 10^{23} = 3{,}33 \cdot 10^{25}$.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

A vízbontás után $3{,}33\cdot10^{25}$ darab H_2 molekula és $(3{,}33\div2)\cdot10^{25} = 1{,}67\cdot10^{25}$ darab O_2 molekula lesz.

A kamrában lévő összes részecske: $N_ö = 4{,}8\cdot10^{26} + 0{,}333\cdot10^{26} + 0{,}167\cdot10^{26} = 5{,}3\cdot10^{26}$

A részecskék nyomása: $p = \frac{N_ö \cdot k \cdot T_0}{V_0} = \frac{5{,}278\cdot10^{26}\cdot1{,}38\cdot10^{-23}\frac{J}{K}\cdot273K}{18m^3}$=110,5 kPa

A nyomás változása: 110,5 kPa – 100kPa =10,5 kPa növekedés.

A Dalton-törvény alapján is kiszámítható a nyomásnövekedés:

$\Delta p = \frac{\Delta N \cdot k \cdot T}{V} = \frac{5\cdot10^{25}\cdot1{,}38\cdot10^{-23}\frac{J}{mol\cdot K}\cdot273K}{18m^3} = 10{,}5$ kPa

b) Párolgás után 1 liter vízből annyi párolog el, hogy a kamrában telített vízgőz jöjjön létre. A telített vízgőz sűrűsége 0°C-on a „Függvénytáblázat" alapján: 0,0048 kg/m³. Mivel a kamra 18 m³-es, így összesen 86,4 gramm víz párolog el, ami 4,8 mol. Ha alkalmazzuk az ideális gáz állapotegyenletét, illetve a Dalton-törvényt, akkor kiszámíthatjuk a telített vízgőz nyomásnövelő hatását:

$\Delta p = \frac{n \cdot R \cdot T}{V}$= 605 Pa

Ha ugyanezt az adatot megnézzük a Négyjegyű függvénytáblázatokban, akkor 608 Pa értéket kapunk a telített vízgőz 0°C-os hőmérséklethez tartozó nyomásáról, ami nagyon jól megegyezik az ideális gáztörvény alapján számított értékkel.

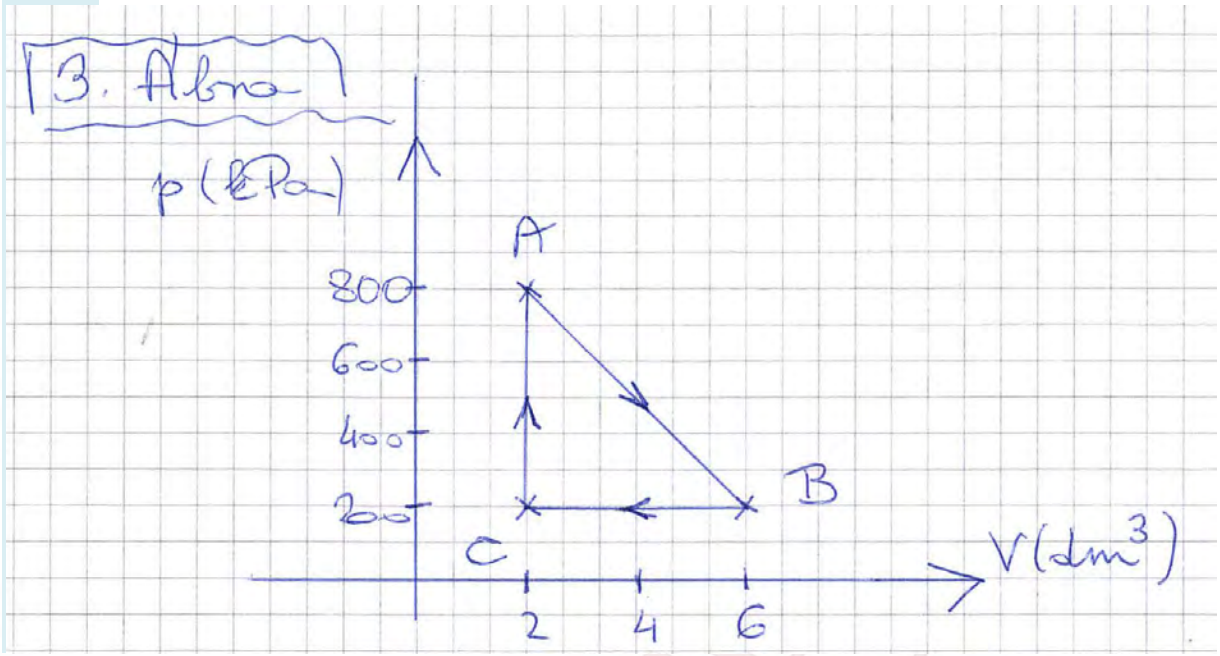
A nyomásnövekedés tehát valamivel több, mint 600 Pa.

Érdemes végül megjegyeznünk, hogy a 18 m³-es kamrába bejuttatott 1 liter víz térfogata elhanyagolható a kamra térfogatához képest, és ezt a számítás során kihasználtuk.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

6.168.*



Megoldás:

T_B= 20 °C = 293 K

f = 3

p_B = 200 kPa

V_B = 6 dm³

a) Q = ?

C → A izochor állapotváltozás: V = állandó, ΔV = 0.

A *B* állapotra írjuk fel az állapotegyenletet: $p_B \cdot V_B = n \cdot R \cdot T_B$

Fejezzük ki az n · R szorzatot, helyettesítsük be az adatokat!

$$n \cdot R = \frac{p_B \cdot V_B}{T_B} = \frac{2 \cdot 10^5 \frac{N}{m^2} \cdot 6 \cdot 10^{-3} m^3}{293K} = 4{,}1 \frac{J}{K}$$

Alkalmazzuk az I főtételt! $\Delta E_b = Q + W$, de ΔV = 0, ezért W = 0, így $\Delta E_b = Q$.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

A B → C állapotváltozás közben állandó nyomás mellett a térfogat harmadára csökken, tehát ugyanilyen arányban csökken az abszolút hőmérséklet: $T_C = \frac{T_B}{3} = 97{,}67\ K \approx 98\ K$.

A C → A állapotváltozás közben állandó térfogaton a nyomás négyszeresére nő, tehát az abszolút hőmérséklet is négyszeresére nő: $T_A = 4T_B = 390{,}67\ K \approx 391\ K$.

Alkalmazzuk a belső energia kiszámítására kapott összefüggést!

$$\Delta E_b = Q = \frac{f}{2} \cdot n \cdot R \cdot \Delta T = \frac{f}{2} nR(T_A - T_C) = \frac{3}{2} \cdot 4{,}1\ \frac{J}{K} \cdot 293\ K = 1{,}8\ kJ$$

A C → A állapotváltozás közben 1,8 kJ hőfelvétel történt.

b.) W = ?

A grafikonról leolvasható: $\Delta V = (-4\ dm^3)$

A B → C szakasz izobár állapotváltozás, használjuk a térfogati munka kiszámítására kapott összefüggést!

$$W = -p \cdot \Delta V = -2 \cdot 10^5 \frac{N}{m^2} \cdot (-4 \cdot 10^{-3}\ m^3) = 800\ J$$

A B → C szakaszon a munka pozitív, értéke 800 J.

c.) η = ?

A hatásfok definíciója alapján: $\eta = \frac{W_{hasznos}}{Q_{fel}}$.

A hasznos munka a körfolyamat által körbezárt terület a p-V diagramon:

$W_{hasznos} = (4 \cdot 10^{-3}\ m^3) \cdot (600 \cdot 10^3\ Pa)/2 = 1200\ J = 1{,}2\ kJ$.

A gáz a B → C folyamat közben hőt ad le, a C → A folyamat közben hőt vesz fel, míg az A → B folyamat első részében hőt vesz fel, majd ezután hőleadás következik.

A C → A izochor folyamat alatti hőfelvételt már az a) kérdésre adott válaszban kiszámítottuk:

$$Q_1 = \frac{3}{2} nR\Delta T_{CA} = 1{,}8\ kJ.$$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

A feladat kihívást jelentő része annak megállapítása, hogy az A → B folyamatban meddig tart a hőfelvétel. Az A → B folyamatot (ami a p – V diagramon negatív meredekségű egyenes) a következő egyenlettel írhatjuk le:

$$p = 1100\ kPa - \left(150\frac{kPa}{dm^3}\right)\cdot V = 1{,}1\cdot 10^6\ \text{Pa} - \left(1{,}5\cdot 10^8\ \frac{\text{Pa}}{\text{m}^3}\right)\cdot V.$$

Ennek az egyenesnek a meredeksége: –150 kPa/dm³ = $-1{,}5\cdot 10^8\ \frac{\text{Pa}}{\text{m}^3}$.

Hőfelvétel addig történik, amíg az egyenes adott pontjában az adiabata (az adiabatikus folyamatot leíró görbe) meredekebb, mint az egyenes. Ha már az egyenes a meredekebb, akkor hőleadás zajlik. Meg kell tehát találni azt a pontot, ahol az egyenes adott pontjához tartozó adiabata éppen érinti az egyenest, mert ekkor mindkettőnek azonos a meredeksége. Az adiabata (pV^κ = állandó ahol $\kappa = \frac{c_p}{c_V}$) meredekségét csak felsőbb matematika, az úgynevezett differenciálás segítségével tudjuk kiszámítani.

Az adiabata egyenletében szereplő állandót jelöljük *A*-val, és fejezzük ki a nyomást:

$$p = \frac{A}{V^\kappa}.$$

Végezzük el a nyomás térfogat szerinti deriválását:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V} = -A\kappa V^{-\kappa-1} = -1{,}5\cdot 10^8\ \frac{\text{Pa}}{\text{m}^3}.$$

Az A → B szakaszt érintő adiabatának az érintési ponthoz tartozó nyomását az A → B szakaszhoz tartozó egyenes egyenletével is kifejezhetjük:

$$p = \frac{A}{V^\kappa} = 1{,}1\cdot 10^6\ \text{Pa} - \left(1{,}5\cdot 10^8\ \frac{\text{Pa}}{\text{m}^3}\right)\cdot V,$$

amiből az *A* állandó meghatározható:

$$A = (1{,}1\cdot 10^6\ \text{Pa})\cdot V^\kappa - \left(1{,}5\cdot 10^8\ \frac{\text{Pa}}{\text{m}^3}\right)\cdot V^{\kappa+1}.$$

Írjuk be ezt az értéket a deriváltat kifejező egyenletbe:

$$A\kappa V^{-\kappa-1} = \left[(1{,}1\cdot 10^6\ \text{Pa})\cdot V^\kappa - \left(1{,}5\cdot 10^8\ \frac{\text{Pa}}{\text{m}^3}\right)\cdot V^{\kappa+1}\right]\kappa V^{-\kappa-1} = 1{,}5\cdot 10^8\ \frac{\text{Pa}}{\text{m}^3},$$

ami κ értékét beírva a következő egyenletre vezet:

$$\frac{1{,}833\cdot 10^6\ \text{Pa}}{V} - 2{,}5\cdot 10^8\ \frac{\text{Pa}}{\text{m}^3} = 1{,}5\cdot 10^8\ \frac{\text{Pa}}{\text{m}^3}.$$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

A számítások elvégzése után megállapíthatjuk, hogy a térfogat

$V^* = 4{,}58333\ dm^3 \approx 4{,}6\ dm^3$ értékéig van hőfelvétel.

Ebben a pontban a nyomás $p^* = 412{,}5$ kPa, és a hőmérséklet $T^* = 462$ K. Ezen a szakaszon a hőfelvételt a belső energia és a munkavégzés különbségeként számíthatjuk ki:

$$Q_2 = \Delta E_b - W = \frac{3}{2}nR\Delta T_{AA*} + \frac{(p_A + p_{A*})(V_{A*} - V_A)}{2} =$$
$$= 1{,}5 \cdot 4{,}1\frac{J}{K} \cdot (462K - 391K)$$
$$+ \frac{(800kPa + 412{,}5kPa) \cdot (4{,}583dm^3 - 2dm^3)}{2} = 2\ kJ.$$

A termikus hatásfok: $\eta = \frac{W_{hasznos}}{Q_1 + Q_2} = \frac{1{,}2\ kJ}{1{,}8kJ + 2kJ} = 31{,}6\%$

Érdekességként említhetjük meg, hogy az A → B egyenes szakaszon haladva a hőmérséklet először növekszik, majd csökken. A növekedés a térfogat 3,67 dm³-es értékéig tart, ahol a nyomás 550 kPa. A neon gáz maximális hőmérséklete ebben az állapotban 492 K. Ezt követően a hőmérséklet csökken, a gáz hőfelvétele mégis pozitív. Ez csak úgy lehetséges, hogy ezen a szakaszon a gáz mólhője (fajhője) negatív. Még meglepőbb azt is észrevenni, hogy amikor a hőmérséklet maximális értékű, akkor az A → B egyenest az izoterma érinti, ahol a mólhő (fajhő) ±végtelen, hiszen ott hőfelvétel történik hőmérsékletváltozás nélkül. (Adiabatikus folyamat mólhője (fajhője) pedig nulla, hiszen ekkor hőfelvétel nincs, de hőmérsékletváltozás van.)

Kiegészítés:

A feladat megoldható differenciálszámítás nélkül is.

Az első főtétel alapján: $Q = \Delta E - W = \frac{3}{2}Rn\Delta T + p\Delta V = Cn\Delta T$,

ahol C jelenti a folyamat közben folytonosan változó mólhőt. A gázegyenletet is írjuk fel, és az A → B folyamatot leíró egyenletet is használjuk fel ($p = b - aV$, ahol $b = 1{,}1 \cdot 10^6$ Pa és

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$a = 1{,}5 \cdot 10^8 \ \frac{\text{Pa}}{\text{m}^3}$):

$$nRT = pV = (b - aV)V = bV - aV^2.$$

Vegyük mindkét oldal megváltozását:

$$\Delta(nRT) = \Delta(bV - aV^2).$$

Egyedül V^2 megváltozását kell megmagyaráznunk:

$$\Delta(V^2) = (V + \Delta V)^2 - (V)^2 = V^2 + 2V\Delta V + (\Delta V)^2 - V^2 \approx 2V\Delta V,$$

mert a másodrendűen kicsi tagot, vagyis $(\Delta V)^2$-et elhanyagolhatjuk. Ezzel a megváltozásokat kifejező egyenlet így alakul:

$$nR\Delta T = b\Delta V - 2aV\Delta V = (b - 2aV)\Delta V,$$

amiből kifejezhetjük a ΔV megváltozást ΔT segítségével:

$$\Delta V = \frac{nR\Delta T}{b - 2aV}.$$

Írjuk ezt be a kiegészítés legelső egyenletébe (mert a célunk az volt, hogy a hőközlést úgy fejezzük ki, hogy a formulánkban csak ΔT szerepeljen):

$$Q = \frac{3}{2}Rn\Delta T + p\Delta V = \frac{3}{2}Rn\Delta T + p\frac{nR\Delta T}{b - 2aV} = \frac{3}{2}Rn\Delta T + \frac{b - aV}{b - 2aV}Rn\Delta T = Cn\Delta T.$$

Ha az utolsó előtti kifejezésből kiemeljük $(n\Delta T)$-t, akkor megkaptuk a mólhőt a térfogat függvényében:

$$C = \frac{3}{2}R + \frac{b - aV}{b - 2aV}R = \frac{5b - 8aV}{2(b - 2aV)}R.$$

Példát láthatunk arra, hogy egy bizonyos folyamat közben a mólhő változik (esetünkben a térfogat függvényében fejeztük ki a mólhőt). A feladatban az volt a kérdés, hogy meddig tart a pozitív hőfelvétel. Ilyenkor az A → B folyamat egyenese érinti az adiabatát, vagyis ekkor a mólhő nulla. Ez akkor következik be, ha $5b - 8aV = 0$, vagyis

$$V = \frac{5b}{8a} = \frac{5 \cdot (1{,}1 \cdot 10^6 \text{ Pa})}{8 \cdot \left(1{,}5 \cdot 10^8 \ \frac{\text{Pa}}{\text{m}^3}\right)} = 4{,}58333 \text{ dm}^3 \approx 4{,}6 \text{ dm}^3,$$

ahogy ezt az előzőekben is már megkaptuk. Ugyanígy számíthatjuk ki azt a helyzetet is, amikor maximális a hőmérséklet, mert akkor az egyenes izotermát érint, és a mólhő ±végtelen. Ez akkor következik be, ha a mólhő kifejezésében a nevező nulla:

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$$V = \frac{b}{2a} = \frac{1{,}1 \cdot 10^6\ \text{Pa}}{2 \cdot \left(1{,}5 \cdot 10^8\ \frac{\text{Pa}}{\text{m}^3}\right)} = 3{,}6667\ \text{dm}^3 \approx 3{,}7\ \text{dm}^3.$$

A ± előjel arra utal, hogy a nevező itt előjelet vált, és ekkor a mólhő pozitívból negatívba fordul.

A maximális hőmérséklet elérése után úgy lehet az A → B folyamatot követni, hogy pozitív hőt kell továbbra is közölnünk, azonban ez hőmérsékletcsökkenéssel jár. Ilyenkor a gáz által végzett munka egyrészt a hőközlés hatására, másrészt a belső energia rovására következik be.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

7. ELEKTROSZTATIKA
ALAPOZÓ FELADATOK
Elektromos állapot, Coulomb-törvény

7.1.

MEGOLDÁS: A töltések közelítésekor a köteleknek a függőlegessel bezárt szöge növekszik. A töltések között fellépő Coulomb-féle taszítóerő nagysága távolságfüggő; a töltések közelítésekor növekszik.

7.2.

MEGOLDÁS: Newton 3. törvénye itt is igaz, a két erő egyenlő.

7.3.

MEGOLDÁS: Newton 3. törvénye itt is igaz, a két erő egyenlő. A Coulomb-törvény matematikai alakjából ez formálisan is következik. (Azonban az elektromos megosztás miatt a Coulomb-törvényt csak akkor lehet egyszerűen úgy alkalmazni, mintha a töltések a fémgömbök középpontjában lennének összesűrítve, ha a fémgömbök mérete igen kicsiny a közöttük lévő távolsághoz képest.)

M.7.4.

MEGOLDÁS: Coulomb törvénye szerint az elektrosztatikus erő a töltések közötti távolság négyzetével fordítottan arányos; a távolság felezése tehát az erő négyszereződéséhez vezet.

M.7.5.

Hogyan változik a köztük fellépő elektrosztatikus erő?

MEGOLDÁS: Coulomb törvénye szerint az elektrosztatikus erő a töltések szorzatával arányos, a töltések megfeleződésével tehát az erő negyedére csökken.

M.7.6.

MEGOLDÁS: Az 1 C sztatikus töltés irreálisan nagy érték, a gyakorlatban egy közönséges méretű tárgyat csak 1 C töredékére tölthetünk fel. A természetben, a zivatarfelhőkben néhány coulomb töltés található. Ma már léteznek olyan nagy kondenzátorok, melyek fegyverzetein sok coulomb pozitív és ugyanennyi negatív töltés halmozható fel.

$F = k\frac{Q^2}{r^2} = 9\cdot 10^9 \frac{\mathrm{Nm^2}}{\mathrm{C^2}} \cdot \frac{1\mathrm{C^2}}{(1{,}5\cdot 10^3)^2\,\mathrm{m^2}} = 4000\mathrm{N}$. Ez kb. egy 400 kg-os test súlya.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.7.7.

MEGOLDÁS: a. $F = k\frac{Q^2}{r^2}$. Ebből $Q = r\cdot\sqrt{\frac{F}{k}} = 160\text{m}\cdot\sqrt{\frac{100\text{N}}{9\cdot10^9\frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}}} = 1,69\cdot10^{-2}\text{C}$.

b. $Q_2 = r_2\cdot\sqrt{\frac{F_2}{k}} = 10\text{m}\cdot\sqrt{\frac{1600\text{N}}{9\cdot10^9\frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}}} = 4,22\cdot10^{-3}\text{C}$.

A tizenhat szálú kötélre erősíthető töltés pontosan a negyede az egy szálúra erősíthetőnek. A zsinór teherbírása ugyan 16-ször nagyobb lett, de a hossza, és így a töltések távolsága 16-szor kisebb. Az eredmények a zsinór átmérőjétől függetlenek.

M.7.8.

MEGOLDÁS: $F = k\frac{4Q^2}{r^2}$ Ebből $Q = \frac{r}{2}\cdot\sqrt{\frac{F}{k}} = \frac{6\cdot10^{-2}\text{m}}{2}\cdot\sqrt{\frac{40\text{N}}{9\cdot10^9\frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}}} = 2\cdot10^{-6}\text{C}$.

M.7.9.

MEGOLDÁS: A műanyag rúd negatív töltésűvé tehető a varázsköpennyel megdörzsölve.

A. Ha a feltöltött rudat elektroszkóphoz érinti, az negatív töltésűvé válik.

B. A feltöltött műanyag rudat az elektroszkóphoz közelíti, de nem érinti hozzá. Ekkor a negatív töltések a fémszerkezet távolabbi részeibe mozognak el, a gömb pozitív és a rúd negatív töltései fogva tartják egymást. Ha ekkor a műanyag rudat változatlanul a közelben tartva, ujjával megérinti az elektroszkóp gömbjét, akkor a rúd negatív töltéseket juttat az elektroszkópról András testén keresztül a földbe. Ezzel az eddig összességében semleges elektroszkóp pozitív töltésű lett. Előbb az ujját, majd a műanyag rudat az elektroszkóptól eltávolítva, az pozitív töltésű is marad.

C. A vízmolekulák polárosak, bennük a pozitív és a negatív töltések középpontja nem esik egybe. A műanyag rúd negatív töltéseinek hatására a vízmolekulák pozitív töltésű oldalukkal fordulnak a rúd felé. A vízsugár rúdhoz közelebbi felületén pozitív, távolabbi felületén negatív töltés halmozódik fel, a vízsugáron belül a pozitív és a negatív töltések lényegében kiegyenlítik egymást. A pozitív felületi töltések közelebb vannak a rúdhoz, mint a negatívak, a vonzóerő nagyobb lesz, mint a taszító.

M.7.10.

MEGOLDÁS: 1 g 1 atomos H gáz A = $6\cdot10^{23}$ atomot, atomonként 1-1db, azonos e = $1,6\cdot10^{-19}\text{C}$ töltésű protont és elektront tartalmaz. A két Sarok távolsága nagyjából a Föld sugarának kétszerese, kb. 2·6400 km. Így a keresett erő

$F = k\frac{(\text{A}\cdot\text{e})^2}{r^2} = 9\cdot10^9\frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}\cdot\frac{(6\cdot10^{23}\cdot1,6\cdot10^{-19})^2\text{C}^2}{(2\cdot6,4\cdot10^6)^2\text{m}^2} \approx 5\cdot10^5\text{N}$. Ez nagyjából 50 tonna tömeg súlya, mesebelien nagy erő, persze a kísérlet is mesebeli.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.7.11.

MEGOLDÁS:

$$F = k\frac{e^2}{r^2} = 9\cdot10^9\,\frac{\mathrm{Nm^2}}{\mathrm{C^2}}\cdot\frac{(1{,}6\cdot10^{-19})^2\mathrm{C^2}}{(2{,}8\cdot10^{-10})^2\mathrm{m^2}} = 2{,}9\cdot10^{-9}\mathrm{N}\,.$$

M.7.12.

MEGOLDÁS: A fémgolyókon lévő töltések kiegyenlítődnek, a golyók egyenlő sugara miatt azonos lesz a töltésük. Figyelembe vesszük a töltésmegmaradás törvényét is.

$$Q_1 = Q_2 = \frac{-5\cdot10^{-6}\mathrm{C} + 10^{-6}\mathrm{C}}{2} = -2\cdot10^{-6}\mathrm{C}\,.$$

M.7.13.

MEGOLDÁS: A golyóra három erő hat: függőlegesen az $F_1 = mg$ nehézségi erő, vízszintesen az $F_2 = E\cdot Q$ elektrosztatikus erő, és az ezek eredőjét kiegyenlítő fonálerő. A 45° éppen felezi a függőleges és vízszintes irányt, tehát $F_1 = F_2$, vagyis $mg = EQ$, tehát $E = \frac{mg}{Q}$.

Elektromos mező, térerősség, erővonalak

M.7.14.

MEGOLDÁS: $F = E\cdot Q = 10^{-6}\mathrm{C}\cdot10^3\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} = 10^{-3}\mathrm{N}\,.$

M.7.15.

MEGOLDÁS: Ponttöltés terében a térerősség nagyságának a töltéstől való távolságát az $E = k\cdot\frac{Q}{r^2}$ összefüggés írja le. Adott nagyságú *E* térerősséghez adott *r* érték tartozik.

Az összefüggésből $r = \sqrt{k\cdot\frac{Q}{E}} = \sqrt{9\cdot10^9\,\frac{\mathrm{Nm^2}}{\mathrm{C^2}}\cdot\frac{4\cdot10^{-6}\mathrm{C}}{10^5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}}} = 0{,}6\mathrm{m}$. A kérdezett pontok a ponttöltés körül rajzolt o,6 m sugarú gömb felületi pontjai.

M.7.16.

MEGOLDÁS: A megadott pontokban a térerősség a ponttöltés által keltett $\vec{E_1}$ térerősségnek és a homogén mező $\vec{E_2}$ térerősségének vektori összege. A ponttöltés mezője által keltett térerősség nagysága: $E_1 = k\cdot\frac{Q}{r^2} = 9\cdot10^9\,\frac{\mathrm{Nm^2}}{\mathrm{C^2}}\cdot\frac{10^{-9}\mathrm{C}}{(3\cdot10^{-1})^2\mathrm{m^2}} = 100\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$. A

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

két térerősség vektor által bezárt szög 0° és 180° között változik. A megadott pontokban az eredő térerősség nagysága $600\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$ és $400\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$ közötti értékeket vesz fel.

M.7.17

MEGOLDÁS: A kérdezett pontokban meghatározzuk külön-külön a két töltés által keltett mező térerősségét, és ezek vektori összege adja a keresett térerősséget.
A *C* pontban (origó) a két töltés azonos nagyságú és irányú

$E = k\cdot\frac{Q}{r^2} = 9\cdot10^9\,\frac{\mathrm{Nm^2}}{\mathrm{C^2}}\cdot\frac{10^{-8}\mathrm{C}}{(1\mathrm{m})^2} = 90\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$ térerősséget kelt. Így

$E_C = 2\cdot90\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} = 180\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$ A szimmetrikusan elhelyezkedő *D* és *E* pontok pontokbeli térerősség egyenlő nagyságú és irányú. A pontok távolsága *A* és *B* pontoktól $x = \sqrt{2}\mathrm{m}$. Ezekben a pontokban az egyes töltésektől származó térerősség összetevők nagysága $E_1 = k\cdot\frac{Q}{x^2} = 9\cdot10^9\,\frac{\mathrm{Nm^2}}{\mathrm{C^2}}\cdot\frac{10^{-8}\mathrm{C}}{(\sqrt{2})^2\mathrm{m}^2} = 45\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$. A két egyenlő nagyságú összetevő merőleges egymásra, így eredőjük: $E_D = E_E = \sqrt{2}\cdot E_1 = \sqrt{2}\cdot45\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} \approx 63{,}6$ N/C. Irányuk az *x* tengely pozitív iránya.
A *G* és *F* pontok is szimmetrikus helyzetűek, azonos nagyságú., ellentétes irányú térerősségvektorokkal. Távolságuk a dipólus egyes töltéseitől $x_2 = 1\mathrm{m}$ és $x_3 = 3\mathrm{m}$
Az egyes töltésekből származó térerősség összetevők nagysága:

$E_2 = k\cdot\frac{Q}{x_2^2} = = 9\cdot10^9\,\frac{\mathrm{Nm^2}}{\mathrm{C^2}}\cdot\frac{10^{-8}\mathrm{C}}{1^2\mathrm{m}^2} = 90\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$ és $E_3 = k\cdot\frac{Q}{x_3^2} = = 9\cdot10^9\,\frac{\mathrm{Nm^2}}{\mathrm{C^2}}\cdot\frac{10^{-8}\mathrm{C}}{3^2\mathrm{m}^2} = 10\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$.

A *G* és *F* pontokban E_2 és E_3 térerősség vektorok ellentétes előjelűek, így nagyságuk:

$E_G = E_F = |E_2 - E_3| = 80\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$. Mindkét pontban a térerősség vektorok az *x* tengely negatív irányába mutatnak.

M.7.18.

MEGOLDÁS: Az *a* felület esetén

$\Psi_a = 4\pi\cdot k\cdot\sum Q = 4\pi kq = 4\pi\cdot9\cdot10^9\,\frac{\mathrm{Nm^2}}{\mathrm{C^2}}\cdot10^{-6}\mathrm{C} = 1{,}13\cdot10^5\,\frac{\mathrm{Nm^2}}{\mathrm{C}}$

b felület esetén $\Psi_b = 4\pi\cdot k\cdot\sum Q = 4\pi\cdot k\cdot3q = 3{,}39\cdot10^5\,\frac{\mathrm{Nm^2}}{\mathrm{C}}$

c felületben lévő töltések algebrai összege o, ezért $\Psi_c = 0$

M.7.19.

MEGOLDÁS: A gömb belsejében–bárhol - ponttöltés, ill. töltött fémgömb található. A töltés nagysága a $\Psi_a = 4\pi\cdot k\cdot Q$ összefüggésből: $Q = \frac{\Psi}{4\pi k} = \frac{36\cdot\pi\cdot10^4\,\frac{\mathrm{Nm^2}}{\mathrm{C}}}{4\pi\cdot9\cdot10^9\,\frac{\mathrm{Nm^2}}{\mathrm{C^2}}} = 10^{-5}\mathrm{C}$.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.7.20.

MEGOLDÁS: a. $E = k \cdot \frac{Q}{r^2}$, ebből $Q = \frac{Er^2}{k} = \frac{2{,}25 \cdot 10^3 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} \cdot (2\mathrm{m})^2}{9 \cdot 10^9 \frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{C^2}}} 10^{-6}\mathrm{C}$.

b. $E = k \cdot \frac{Q}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{C^2}} \cdot \frac{10^{-6}\mathrm{C}}{(3\mathrm{m})^2} = 10^3 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$

c. $E = k \cdot \frac{Q}{r^2}$ ebből $r = \sqrt{k \cdot \frac{Q}{E}} = \sqrt{9 \cdot 10^9 \frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{C^2}} \cdot \frac{10^{-6}\mathrm{C}}{9 \cdot 10^3 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}}} = 1\mathrm{m}$

Az elektromos mező munkája, feszültség

M.7.21.

MEGOLDÁS: $[E] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$.

$[E] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}}{\mathrm{A \cdot s}} = \frac{\mathrm{kg \cdot m}}{\mathrm{A \cdot s^3}}$.

M.7.22.

MEGOLDÁS: Munkatétellel: $U \cdot e = \frac{1}{2} m v^2$. Ebből

$v = \sqrt{\frac{2Ue}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^4 \mathrm{V} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\mathrm{C}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\mathrm{kg}}} = 5{,}9 \cdot 10^7 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

M.7.23.

MEGOLDÁS: $7\mathrm{TeV} = 7 \cdot 10^{12} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\mathrm{C} \cdot 1\mathrm{V} = 1{,}12 \cdot 10^{-6}\mathrm{J}$.

M.7.24.

M: A BC elmozdulás térerősség irányú összetevője 1,5-szer akkora az AB elmozdulásé, a CA elmozdulásé pedig -2,5-szer. Így: $W_{\mathrm{BC}} = 180\mathrm{J}$ és $W_{\mathrm{CA}} = -300\mathrm{J}$.

M.7.25.

MEGOLDÁS: A térerősség-irányú elmozdulás kiszámítása: $W = E \cdot Q \cdot y$

összefüggésből: $y = \frac{W}{E \cdot Q} = \frac{6 \cdot 10^{-4}\mathrm{J}}{5 \cdot 10^3 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} \cdot 2 \cdot 10^{-6}\mathrm{C}} = 0{,}06\mathrm{m} = 6\ \mathrm{cm}.$

Az ábra arányaiból és Pitagorasz tételével az AC távolság 10 cm.

M.7.26E.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

MEGOLDÁS: Ponttöltés terében a térerősség az $E = k \cdot \frac{Q}{r^2}$, a potenciál pedig az $U = k \cdot \frac{Q}{r}$ összefüggés szerint alakul. Látható, hogy akkor csökken a térerősség nagysága, ha a ponttöltéstől távolodunk. Negyedére pedig akkor, ha az *r* távolságot megduplázzuk. Ekkor a potenciál a felére csökken. Az *A* és a *B* pontok között tetszőleges pályán mozoghatunk, a megkötés csak annyi, hogy a *B* pont olyan koncentrikus körön legyen, melynek sugara 2*r*.

M.7.27E.

MEGOLDÁS: Homogén mezőben a térerősség állandó, nem változik. (A potenciál a térerősség-vektor hatásvonala mentén lineárisan változik.)

M.7.28.

MEGOLDÁS: $W = F \cdot s = E \cdot Q \cdot s = 10^5 \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \cdot 10^{-5}\mathrm{C} \cdot 2 \cdot 10^{-2}\mathrm{m} =$ 2·10-2 J.

M.7.29.

MEGOLDÁS: A munkatétel szerint: $Q \cdot U = \Delta E_{\mathrm{kin}}$, esetünkben $Q \cdot U = \frac{1}{2} m v^2$, ebből

$$U = \frac{m v^2}{2Q} = U = \frac{10^{-7}\mathrm{kg} \cdot 10^2 \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}}{2 \cdot 10^{-8}\mathrm{C}} = 500\ \mathrm{V}.$$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.7.30.
Megoldás:

A feladatban az elektrosztatikus és gravitációs erő aránya $\frac{E\cdot Q}{mg}=\frac{2\cdot 10^5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\cdot 10^{-5}\mathrm{C}}{2\cdot 10^{-6}\mathrm{kg}\cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}=10^5$,

vagyis a gravitációs erő elhanyagolható az elektrosztatikus erőhöz képest. A részecske gyorsulását az $F=E\cdot Q=m\cdot a$ összefüggésből határozzuk meg:

$$a=\frac{E\cdot Q}{m}=\frac{2\cdot 10^5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\cdot 10^{-5}\mathrm{C}}{2\cdot 10^{-6}\mathrm{kg}}=10^6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Az elért sebesség $v=\sqrt{2as}=\sqrt{2\cdot 10^6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 2\cdot 10^{-2}\mathrm{m}}=200\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Vezetők elektromos mezőben, kondenzátorok

M.7.31.
MEGOLDÁS: A kis gömbön lévő töltés elektromos mezője töltésszétválasztást eredményez a nagy gömbben. A nagy gömbnek a kis gömbön lévő töltésekkel ellentétes előjelű töltései közelebb kerülnek a kis gömbhöz, mint a megegyezők, ezért vonzóerő alakul ki a két gömb között.

M.7.32.
MEGOLDÁS: Fémtestre vitt többlettöltések a külső felületen helyezkednek el, tehát a töltéseket a külső felületről lehet elvenni.

M.7.33
MEGOLDÁS: A bezárt részben elektromos töltés van.

M.7.34.
MEGOLDÁS: Egy adott kondenzátor kapacitása állandó, nem függ a rákapcsolt feszültségtől. A kondenzátor feszültségével arányosan változik a töltése, a $\frac{Q}{U}$ tört számlálója tehát nem állandó, mint ahogy a vizsgált mondat feltételezi. Ha viszont megadott, rögzített értékű töltéssel látunk el különböző testeket, akkor valóban a kétszeres feszültséghez tartozó test kapacitása feleakkora.

M.7.35.
MEGOLDÁS: A kondenzátor töltése: $Q=C\cdot U=20\cdot 10^{-6}\mathrm{F}\cdot 24\mathrm{V}=4{,}8\cdot 10^{-4}\mathrm{C}$.

A kondenzátor energiája: $E=\frac{1}{2}CU^2=\frac{1}{2}\,20\cdot 10^{-6}\mathrm{F}\cdot(24\mathrm{V})^2=5{,}76\cdot 10^{-3}\mathrm{J}$.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.7.36.

MEGOLDÁS: $C = \frac{Q}{U} = \frac{5 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{C}}{10\,\mathrm{V}} = 5 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{F} = 5\,\mathrm{nF}$.

M.7.37E.

MEGOLDÁS: Párhuzamosan kapcsolt kondenzátorok feszültsége közös, így $U_1 = U_2 = U$.

Töltésük az egyenlő kapacitás miatt egyenlő: $Q_1 = Q_2 = C \cdot U$.

Sorosan kapcsolt kondenzátorok feszültségének összege egyenlő a feszültségforrásával, az egyenlő kapacitások miatt egyenlő: $U_1 = U_2 = \frac{U}{2}$. Töltésük egyenlő: $Q_1 = Q_2 = \frac{C \cdot U}{2}$.

M.7.38E

M.

Párhuzamos kapcsolás:

A kondenzátorok feszültsége: $U_1 = U_2 = U$ =120 V.

Töltés: $Q_1 = C_1 \cdot U = 2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{F} \cdot 120\,\mathrm{V} = 2{,}4 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{C}$ és

$Q_2 = C_2 \cdot U = 3 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{F} \cdot 120\,\mathrm{V} = 3{,}6 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{C}$.

Soros kapcsolás:

Az eredő kapacitás: $C_e = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = \frac{2\,\mu\mathrm{F} \cdot 3\,\mu\mathrm{F}}{2\,\mu\mathrm{F} + 3\,\mu\mathrm{F}} = 1{,}2\,\mu\mathrm{F}$.

Töltés: $Q_1 = Q_2 = C_e \cdot U = 1{,}2\,\mu\mathrm{F} \cdot 120\,\mathrm{V} = 1{,}44 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{C}$.

Feszültség: $U_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{1{,}44 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{C}}{2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{F}} = 72\,\mathrm{V}$ és $U_2 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{1{,}44 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{C}}{3 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{F}} = 48\,\mathrm{V}$.

M.7.39E.

MEGOLDÁS: Esetek: 1. három sorosan, 2. egy sorosan a másik kettő párhuzamosan. 3. kettő sorosan a harmadikkal párhuzamosan. 4. mind a három párhuzamosan.

Eredő kapacitások: 1. $\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C} + \frac{1}{C} = \frac{3}{C}$ -ból $C_e = \frac{C}{3}$.

2. $C_e = \frac{C \cdot 2C}{C + 2C} = \frac{2}{3}C$.

3. $C_e = \frac{C}{2} + C = \frac{3}{2}\mathrm{C}$.

4. $C_e = 3C$.

M.7.40.

MEGOLDÁS: A kondenzátor töltése eredetileg: $Q = C \cdot U = 20\,\mu\mathrm{F} \cdot 24\,\mathrm{V} = 4{,}8 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{C}$.

A kondenzátor kapacitása: $C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$ alapján a lemezek *d* távolságának megduplázásakor feleződik: $C' = 10\,\mu\mathrm{F}$. Az áramforrással való kapcsolat fenntartása

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

miatt a kondenzátor feszültsége nem változik. A kondenzátor töltése:
$Q = C' \cdot U = 10\mu\text{F} \cdot 24\text{V} = 2,4 \cdot 10^{-4}\text{C}$.
A kondenzátor töltése a felére csökkent.

M.7.41.

MEGOLDÁS: A kondenzátor töltése: $Q = C \cdot U = 20\mu\text{F} \cdot 24\text{V} = 4,8 \cdot 10^{-4}\text{C}$. $C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$ alapján a lemezek *d* távolságának megduplázásakor feleződik: $C' = 10\mu\text{F}$. A lemezeket töltésük megváltoztatása nélkül mozgatjuk, így a kondenzátor töltése változatlan marad: $Q' = Q = 4,8 \cdot 10^{-4}\text{C}$. A kondenzátor feszültsége: $U' = \frac{Q'}{C'} = \frac{4,8 \cdot 10^{-4}\text{C}}{10^{-5}\text{F}} = 48\text{V}$. A kondenzátor feszültsége megkétszereződik.

M.7.42E.

MEGOLDÁS: Az új kapacitás: $C = \varepsilon_r C_0 = 5 \cdot 5\text{nF} = 25\text{nF}$. A feszültség nem változik, 24 V marad.
Az új töltés: $Q = C \cdot U = 25\text{nF} \cdot 24\text{V} = 6 \cdot 10^{-7}\text{C}$ ami az eredeti töltés ötszöröse.

M.7.43E.
MEGOLDÁS: Az új kapacitás: $C = \varepsilon_r C_0 = 5 \cdot 5\text{nF} = 25\text{nF}$. A töltés változatlan:
$Q = C_0 \cdot U = 5\text{nF} \cdot 24\text{V} = 1,2 \cdot 10^{-7}\text{C}$. Az új feszültség: $U = \frac{Q}{C} = \frac{1,2 \cdot 10^{-7}\text{C}}{25\text{nF}} = 4,8\text{V}$.

GYAKORLÓ FELADATOK

Elektromos állapot, Coulomb törvénye

M.7.44.
MEGOLDÁS: Ha az egyik gömbről viszünk töltést a másikra, akkor a két töltés összege nem változik. A töltések közti erő a Coulomb-törvény szerint a töltések szorzatával arányos. Tudjuk, hogy ha két szám összege állandó, akkor a szorzatuk abban az esetben maximális, ha a két szám egyenlő. A gömbök közti taszítóerő tehát töltésátvitel esetén csökken.

M.7.45.

MEGOLDÁS: Az eredeti fonálerő: $F = k \frac{Q^2}{l^2}$.

a. Szigetelőanyagból készült fonal esetén: $F' = k \frac{1,2 \cdot Q \cdot Q}{l^2} = 1,2F$, azaz 20%-os a növekedés.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

b. Vezetőanyagból készült fonal esetén – az azonos sugarak miatt – a többlettöltés fele-fele arányban jut az egyes gömbökre: $F' = k\frac{(1{,}1\cdot Q)^2}{l^2} = 1{,}21F$. Ez 21%-os növekedést jelent.

M.7.46.

MEGOLDÁS: Ha a két gömb távolsága 2a, akkor: $F = k\frac{Q^2}{4a^2}$

A *C* gömbnek az *A* gömbhöz érintése után mindkettőnek $\frac{Q}{2}$ töltése lesz.

A $\frac{Q}{2}$ töltésű *C* gömb és *Q* töltésű *B* gömbök összeérintése után mindkettőnek $\frac{Q+\frac{Q}{2}}{2} = \frac{3Q}{4}$ töltése lesz.

Az *A* és *C* gömb közötti erő *a* távolságból $F_A = k\frac{\frac{Q}{2}\cdot\frac{3Q}{4}}{a^2} = k\frac{3Q^2}{8a^2}$ erő hat.

A *B* és *C* gömb közötti erő *a* távolságból $F_B = k\frac{\left(\frac{3Q}{4}\right)^2}{a^2} = k\frac{9Q^2}{16a^2}$ erő hat.

A két erő különbsége: $F_B - F_A = k\frac{3Q^2}{16a^2} = \frac{3}{4}F$ és az *A* felé mutat.

M.7.47

MEGOLDÁS: Egy-egy golyóra három erő hat: az F_C Coulomb-féle taszítóerő, az *mg* gravitációs erő és ezek eredőjének ellentettjével egyenlő fonál erő. Az erőtani ábra alapján:

$\mathrm{tg}\alpha = \frac{F_C}{mg}$, ebből $k\frac{Q^2}{l^2} = mg\,\mathrm{tg}\alpha$ és

$$Q = l\sqrt{\frac{mg\,\mathrm{tg}\alpha}{k}} = 0{,}5\mathrm{m}\sqrt{\frac{5\cdot10^{-5}\mathrm{kg}\cdot10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,\mathrm{tg}30^0}{9\cdot10^9\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2}}} = 8{,}95\cdot10^{-8}\mathrm{C}$$

Elektromos mező, térerősség, erővonalak

M.7.48.

MEGOLDÁS: Egyenes erővonalakat kell keresni a megadott mezőkben.

a, b, Homogén mező és ponttöltés mezőjének minden erővonala egyenes, itt bármely pont megfelelő.

c, Dipólus mezőjében a töltéseket tartalmazó egyenes pontjai.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.7.49.

MEGOLDÁS: a. Az elektrosztatikus és a gravitációs erő aránya:

$$\frac{E\cdot Q}{mg}=\frac{10^3\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\cdot 10^{-4}\mathrm{C}}{10^{-5}\mathrm{kg}\cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}=10^3 .$$

A gravitáció elhanyagolható.

b. A térerősség vektorral ellentétes irányú kezdősebesség esetén fékeződik le teljesen a részecske.

c. A munkatétellel számolva: $EQs=\frac{1}{2}mv^2$ Ebből $s=\frac{mv^2}{2EQ}=\frac{10^{-5}\mathrm{kg}\cdot 20^2\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}}{2\cdot 10^3\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}10^{-4}\mathrm{C}}=2\ \mathrm{cm}.$

d. A térerősség irányában $a=\frac{E\cdot \mathrm{Q}}{m}=\frac{10^3\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\cdot 10^{-4}\mathrm{C}}{10^{-5}\mathrm{kg}}=10^4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ állandó gyorsulással egyenes vonalú mozgást végez.

M.7.50E

MEGOLDÁS: a. A proton parabola alakú pályán mozog, *x* irányban egyenletesen, *y* irányban pedig lefelé gyorsulva. Legkisebb a sebessége akkor, amikor a függőleges sebessége zérus.

$a_y=\frac{F}{m}=\frac{E\cdot e}{m}$. Így a keresett idő: $t=\frac{v_{0y}}{a_y}=\frac{v_0\cdot\sin\alpha}{\frac{E\cdot e}{m}}=\frac{m\cdot v_0\cdot\sin\alpha}{E\cdot e}$.

Numerikusan: $t=\frac{m\cdot v_0\cdot\sin\alpha}{E\cdot e}=\frac{1,67\cdot 10^{-27}\mathrm{kg}\cdot 10^4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot\sin 30^0}{250\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\cdot 1,6\cdot 10^{-19}\mathrm{C}}=2,1\cdot 10^{-7}\mathrm{s}$.

b. Az *x* tengely irányában egyenletesen mozog $v_x=v_0\cdot\cos\alpha$ sebességgel. A fent kiszámított idő alatt megtett útja $x=v_x\cdot t=v_0\cdot t\cdot\cos\alpha=\frac{m\cdot v_0^2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{E\cdot e}$.

Numerikusan: $x=\frac{m\cdot v_0^2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{E\cdot e}=\frac{1,67\cdot 10^{-27}\mathrm{kg}\cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}\cdot\sin 30^0\cdot\cos 30^0}{250\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\cdot 1,6\cdot 10^{-19}\mathrm{C}}=1,81\mathrm{mm}$.

Az *y* irányú elmozdulást az eltelt idő és az *y* irányú átlagsebesség szorzata adja:

$y=\frac{v_0\cdot\sin\alpha}{2}\cdot t=\frac{v_0\cdot\sin\alpha}{2}\cdot\frac{m\cdot v_0\cdot\sin\alpha}{E\cdot e}=\frac{m\cdot v_0^2\cdot\sin^2\alpha}{2\cdot E\cdot e}$.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Numerikusan: $y=\dfrac{1,67\cdot10^{-27}\,\text{kg}\cdot10^{8}\,\dfrac{\text{m}^2}{\text{s}^2}\cdot\sin^2 30^0}{2\cdot250\,\dfrac{\text{N}}{\text{C}}\cdot1,6\cdot10^{-19}\,\text{C}}=0,52\text{mm}$.

M.7.51.

MEGOLDÁS: A q töltésű lemezre ható erők kiegyenlítik egymást: $mg=Eq=\dfrac{U}{d}q$.

Ebből

$$q=\frac{mgd}{U}=\frac{mgd}{U}=\frac{1,2\cdot10^{-14}\,\text{kg}\cdot9,81\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot12\cdot10^{-2}\,\text{m}}{600\text{V}}=2,35\cdot10^{-17}\,\text{C}.$$

Ez az elemi töltés $\dfrac{2,35\cdot10^{-17}\,\text{C}}{1,6\cdot10^{-19}\,\text{C}}=147$-szerese.

M.7.52E.

MEGOLDÁS: A töltött testre ható erők eredője: $mg+Eq$. A látszólagos nehézségi gyorsulás: $g'=\dfrac{mg+Eq}{m}=g+\dfrac{Eq}{m}>g$. Az inga lengésideje $T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g'}}=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g+\dfrac{Eq}{m}}}$.

M.7.53E.

MEGOLDÁS: A golyóra három erő hat: függőlegesen az $F_1=mg$ gravitációs erő, vízszintesen az $F_2=E\cdot Q$ elektrosztatikus erő, és az ezek eredőjét kiegyenlítő fonálerő. A 45° éppen felezi a függőleges és vízszintes irányt, tehát $F_1=F_2$, vagyis $mg=EQ$, tehát $Q=\dfrac{mg}{E}$. Az egyensúly stabil.

A 45°-os helyzetben a gravitációs és az elektrosztatikus erő eredőjének nagysága $\text{mg}\sqrt{2}$. A látszólagos nehézségi gyorsulás $\text{g}\sqrt{2}$. A 45°-os helyzetű fonálingának, mint matematikai ingának rezgésének frekvenciája $f=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g'}{l}}=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}\cdot g}{l}}$.

M.7.54.

MEGOLDÁS: Ha összesen Q töltésű elektront szállítunk, akkor a feladat szerint:

$f\dfrac{Mm}{R^2}=k\dfrac{Q^2}{R^2}$. Ebből $Q=\sqrt{\dfrac{f\cdot M\cdot m}{k}}=\sqrt{\dfrac{6,67\cdot10^{-11}\cdot5,97\cdot10^{24}\cdot7,35\cdot10^{22}}{9\cdot10^{9}}}\text{C}=5,7\cdot10^{13}\,\text{C}.$

Az elektronok száma: $n=\dfrac{Q}{e}=\dfrac{5,7\cdot10^{13}\text{C}}{1,6\cdot10^{-19}\text{C}}=3,56\cdot10^{32}$. Az elektronmennyiség tömege:

$3,56\cdot10^{32}\cdot9,1\cdot10^{-31}\text{kg}=324$ kg (Az egyharmad tonna kevésnek tűnik, azonban az elektronok annyira könnyűek, hogy ennyi elektront nagyjából 1300 tonna anyagból

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

nyerhetünk ki teljes mértékű ionizációval . Ennyi elektron hiány a Föld felszínén 125 millió V/cm térerősséget eredményezne, ami több mint négyezerszerese a levegő átütési térerősségének (30 000 V/cm). Vagyis az ötlet esetleges megvalósítása közben hatalmas villámok csapkodnának. Ez is jól mutatja a feladat képtelenségét.)

Észrevehetjük, hogy a feladat eredménye a távolságtól független. Ennek az a magyarázata, hogy a Newton-féle gravitációs erő ugyanúgy a távolság négyzetével fordítottan arányos, mint a Coulomb-erő.

M.7.55.

MEGOLDÁS: a. A gömbben nincs töltés, ezért a fluxusa nulla.

b. és d. Ez a két gömb mindkét töltést tartalmazza: $\Sigma Q = 2\mu C\text{-}1\mu C = 1\mu C$.

$$\Psi_{ö} = 4\pi k \cdot \Sigma Q = 4\pi \cdot 9 \cdot 10^9 \frac{\mathrm{Nm^2}}{\mathrm{C^2}} \cdot 1 \cdot 10^{-6}\mathrm{C} = 1{,}13 \cdot 10^5 \frac{\mathrm{Nm^2}}{\mathrm{C}}.$$

c. Ez a gömb csak a Q_1 töltést tartalmazza:

$$\Psi_{ö} = 4\pi \cdot k \cdot \Sigma Q = 4\pi \cdot 9 \cdot 10^9 \frac{\mathrm{Nm^2}}{\mathrm{C^2}} \cdot 2 \cdot 10^{-6}\mathrm{C} = 2{,}26 \cdot 10^5 \frac{\mathrm{Nm^2}}{\mathrm{C}}.$$

M.7.56.

MEGOLDÁS:

a. A hengeren belül $\frac{1500}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}\mathrm{C} = 1{,}32 \cdot 10^{-8}\mathrm{C}$ töltés van. A töltések elrendezése: a henger tengelyével párhuzamos igen hosszú egyenes, vagy párhuzamos egyenesek mentén egyenletes eloszlásban.

b. A hengeren belül $\frac{3000}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}\mathrm{C} = 2{,}64 \cdot 10^{-8}\mathrm{C}$ töltés van.

A töltések elrendezése: a henger alap, illetve fedőlapjával párhuzamos nagy kiterjedésű síkon egyenletes eloszlásban.

M.7.57.

MEGOLDÁS: a. A gömb fluxusa nulla, nincs töltés a gömbben. Az erővonalrendszert egyenletes eloszlású feltöltött sík eredményezi. A sík a gömbön kívül helyezkedik el.

b- A gömbön belül $\frac{2000}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}\mathrm{C} = 1{,}77 \cdot 10^{-8}\mathrm{C}$ töltés van. Az erővonalrendszert egyenletes eloszlású feltöltött sík eredményezi. A sík tartalmazza a gömb középpontját.

c- A gömb belsejében $\frac{1000}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}\mathrm{C} = 8{,}8 \cdot 10^{-9}\mathrm{C}$ töltés van. Az erővonal rendszert egy a gömböt metsző síkon lévő töltések keltik egyenletes eloszlásban.

M.7.58.

MEGOLDÁS: Mindkét esetben akkor a legnagyobb a felületek fluxusa, ha a legtöbb töltés van a felületeken belül.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

a. Gömb estén, ha az egyenes vezető átmegy a gömb középpontján. Ekkor a felület fluxusa: $\Psi_{ö} = 4\pi \cdot k \cdot \Sigma Q = 4\pi \cdot k \cdot \rho \cdot 2R$.

b. Kocka esetén, ha az egyenes vezető a kocka egyik testátlóját tartalmazza. Ekkor a felület fluxusa: $\Psi_{ö} = 4\pi \cdot k \cdot \Sigma Q = 4\pi \cdot k \cdot \rho \cdot a \cdot \sqrt{3}$.

Az elektromos mező munkája, feszültség

M.7.59.

MEGOLDÁS: A munkatétel szerint: $Q \cdot U = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$. Ebből

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + \frac{2QU}{m}} = \sqrt{100\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} + \frac{2 \cdot 10^{-6}\mathrm{C} \cdot 6 \cdot 10^{4}\mathrm{V}}{5 \cdot 10^{-5}\mathrm{kg}}} = 50\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

M.7.60.

20 cm hosszú üvegcsőből készült kisülési csőre 500V feszültséget kapcsolunk.
a. Mekkora a térerősség a csőben?
b. Mekkora erő hat a csőben lévő elektronra?
c. Mennyi idő alatt teszi meg az elektron a két elektróda közti távolságot, ha feltételezzük, hogy ütközés nélkül halad végig a csövön?
d. Az elektron végsebessége hány százaléka a fénysebességnek?

M a. A térerősség: $E = \frac{U}{d} = \frac{500\mathrm{V}}{0,2\mathrm{m}} = 2500\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$.

b. Az elektronra ható erő: $F = Ee = = 2500\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}\mathrm{C} = 4 \cdot 10^{-16}\mathrm{N}$.

c. Az elektron gyorsulása: $a = \frac{F}{m} = \frac{4 \cdot 10^{-16}\mathrm{N}}{9,1 \cdot 10^{-31}\mathrm{kg}} = 4,44 \cdot 10^{14}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Az elektron mozgásának ideje: $t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,2\mathrm{m}}{4,44 \cdot 10^{14}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = 3 \cdot 10^{-8}\mathrm{s}$.

d. Az elektron végsebessége az átlagsebesség kétszerese:

$v = 2\frac{s}{t} = 2\frac{0,2\mathrm{m}}{3 \cdot 10^{-8}\mathrm{s}} = 1,33 \cdot 10^{7}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ Ez a fénysebességnek $\frac{1,33 \cdot 10^{7}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{3 \cdot 10^{8}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 4,4\%$

M.7.61E.

MEGOLDÁS: A részecske vízszintes sebessége állandó: $v_x = v_0$. A mozgás vizsgált ideje: $t = \frac{l}{v_0}$.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Függőleges irányban elért sebessége: $v_y = a \cdot t = \frac{F}{m} \cdot t = \frac{E \cdot q}{m} \cdot t = \frac{E \cdot q \cdot l}{m \cdot v_0}$. A két sebesség hányadosa megadja a pálya meredekségét, ami az adott szög tangense.

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\frac{E \cdot q \cdot l}{m \cdot v_0}}{v_0} = \frac{E \cdot q \cdot l}{m \cdot v_0^2}$. Ebből $E = \frac{m \cdot v_0^2 \cdot \operatorname{tg}\alpha}{q \cdot l}$.

A lemezek közti feszültség: $U = Ed = \frac{m \cdot v_0^2 \cdot d \cdot \operatorname{tg}\alpha}{ql}$.

M.7.62.

MEGOLDÁS: a. Mindkét pontban $F = E \cdot q = 10^4 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} \cdot 10^{-6}\mathrm{C} = 10^{-2}\mathrm{N}$ nagyságú, $\vec{E}$ irányú erő hat.

b. A munkavégzés kiszámításánál az elmozdulás vektornak az $\vec{E}$ vektorral párhuzamos összetevőjét kell szorozni az elektrosztatikus erővel:

$W = Eqd_x = Eq(x_B - x_A) = 10^4 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} \cdot 10^{-6}\mathrm{C}\left(6-(-4)\right) \cdot 10^{-2}\mathrm{m} = 10^{-3}\mathrm{J}$

c. $U = \frac{W}{q} = \frac{10^{-3}\mathrm{J}}{10^{-6}\mathrm{C}} = 1000\mathrm{V}$. (Megjegyezzük, hogy az *A* pont feszültsége a *B*-hez képest 1000 V, míg a *B* pont feszültsége az *A*-hoz képest –1000 V.)

M.7.63E.

MEGOLDÁS: a. Numerikusan: $F_A = 9 \cdot 10^9 \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2} \cdot \frac{10^{-6}\mathrm{C} \cdot 10^{-5}\mathrm{C}}{((-8)^2 + 6^2) \cdot 10^{-4}\mathrm{m}^2} = 9\mathrm{N}$ és

$F_B = 9 \cdot 10^9 \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2} \cdot \frac{10^{-6}\mathrm{C} \cdot 10^{-5}\mathrm{C}}{(5^2 + 0^2) \cdot 10^{-4}\mathrm{m}^2} = 36\mathrm{N}$.

c. Célszerű először a két pont közti feszültséget kiszámítani: $U_{AB} = k \cdot Q \cdot \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) =$

$9 \cdot 10^9 \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2} \cdot 10^{-5}\mathrm{C} \cdot \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) = 9 \cdot 10^9 \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2} \cdot 10^{-5}\mathrm{C} \cdot \left(\frac{1}{0{,}1\mathrm{m}} - \frac{1}{0{,}05\mathrm{m}}\right) = -9 \cdot 10^5\mathrm{V}$.

b. Az általunk végzett munka a mező által végzett munka ellentettje:

$W = -U_{AB} \cdot q = 9 \cdot 10^5\mathrm{V} \cdot 10^{-6}\mathrm{C} = 0{,}9\mathrm{J}$.

M.7.64E.

MEGOLDÁS: Az $U = k\frac{Q}{r}$ összefüggésből $r = k\frac{Q}{U}$. Így $r_1 = k\frac{Q}{U_1} = 9 \cdot 10^9 \frac{10^{-9}}{1}\mathrm{m} = 9\mathrm{m}$ és

$r_2 = k\frac{Q}{U_2} = 9 \cdot 10^9 \frac{10^{-9}}{9}\mathrm{m} = 1\mathrm{m}$. Ponttöltés terében az ekvipotenciális felületetek gömbök, így a két pont lehetséges *d* távolsága: $r_1 - r_2 \le d \le r_1 + r_2$ azaz: $8\mathrm{m} \le d \le 10\mathrm{m}$.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.7.65.

MEGOLDÁS: a. Egyensúly esetén a Q_1 töltéstől x_1, a Q_2 töltéstől x_2 távolságra lévő q töltésű gyűrűre ható két erő egyenlő: $k \cdot \frac{Q_1 \cdot q}{x_1^2} = k \cdot \frac{Q_2 \cdot q}{x_2^2}$. Ebből

$$\frac{x_1}{x_2} = \sqrt{\frac{Q_1}{Q_2}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{C}}{10^{-6}\,\mathrm{C}}} = 2.$$

A nagyobb töltéstől 6o cm távolságra van egyensúlyban a gyűrű.

b. Stabilis az egyensúlyi helyzet.

c-d. Egy negatív töltésű gyűrű ugyanitt lenne labilis egyensúlyi helyzetben.

M.7.66E.

M. A helyzeti (potenciális) és mozgási (kinetikus) energiák összege minden pontban állandó:

a. $k\frac{Q \cdot q}{x} = k\frac{Q \cdot q}{l} + \frac{1}{2}mv^2$ Ebből $v = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot Q \cdot q}{m} \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{l}\right)}$

b. Nagyon hosszú pálca esetén $\frac{1}{l} \approx 0$, így a fenti összefüggés így alakul:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot Q \cdot q}{m} \cdot \frac{1}{x}}.$$

M.7.67E.

MEGOLDÁS: a. A helyzeti (potenciális) és a mozgási (kinetikus) energia összege állandó: $-k\frac{Qq}{x_0} = -k\frac{Qq}{x_1} + \frac{1}{2}mv_1^2$

Ebből $v_1 = \sqrt{\frac{2kQq}{m}\left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_0}\right)} =$

$$\sqrt{\frac{2 \cdot 9 \cdot 10^9 \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2} \cdot 2 \cdot 10^{-6}\mathrm{C} \cdot 10^{-9}\mathrm{C}}{10^{-7}\,\mathrm{kg}}\left(\frac{1}{4\mathrm{m}} - \frac{1}{5\mathrm{m}}\right)} = \sqrt{18}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 4{,}24\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

b. „Ne térjen vissza”: nagy (végtelen) távolságban, ahol a potenciális energia nulla, a kinetikus energiája is nulla legyen: $-k\frac{Qq}{x_0} + \frac{1}{2}mv_0^2 = 0$ Ebből a szökési sebesség:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2kQq}{x_0 \cdot m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9 \cdot 10^9 \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2} \cdot 2 \cdot 10^{-6}\mathrm{C} \cdot 10^{-9}\mathrm{C}}{5\mathrm{m} \cdot 10^{-7}\,\mathrm{kg}}} = \sqrt{72}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 8{,}48\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$ (Ha a másik töltéssel ellenkező irányba mutat a kezdősebesség vektor, akkor az elindított részecske egyenes vonalban távolodik a másik töltéstől. Ha a másik töltés felé indítjuk el a részecskét, akkor szintén egyenes mentén mozog, azonban egy ideig közeledik a töltéshez, majd

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

eltávolodik tőle. Meg lehet mutatni, hogy tetszőleges irányú v_0 kezdősebesség esetén a részecske parabolapályán halad, és ugyancsak végtelen messzire eltávolodik a töltéstől.)

M.7.68.

MEGOLDÁS: a. A gömb belsejében nulla a térerősség.

b. A gömb felszínétől x távolságban: $E = k \cdot \frac{Q}{(R+x)^2}$.

c. Nem változik a gömb árnyékoló hatása miatt.

M.7.69E.

MEGOLDÁS:

x	0cm	1cm	2 cm (közvetlenül a felszín alatt)	2cm közvetlenül a felszín alatt)	3cm	12cm
E	0	0	0	$5400\ \frac{\text{V}}{\text{m}}$	$2400\ \frac{\text{V}}{\text{m}}$	$150\ \frac{\text{V}}{\text{m}}$
U	108	108	108	108	72	18

M.7.70E .

x	0cm	1cm	2 cm (közvetlenül a felszín alatt)	2cm közvetlenül a felszín fölött)	3cm	72cm
E	0	0	0	$5400\ \frac{\text{V}}{\text{m}}$	$3600\ \frac{\text{V}}{\text{m}}$	$150\ \frac{\text{V}}{\text{m}}$

M.7.71E.

MEGOLDÁS: A megfelelő összefüggések: $E_A = k\frac{Q}{a^2}$ ill. $E_B = k\frac{Q}{b^2}$, valamint

$$W_{AB} = kQq\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

Ezekből $Q = \frac{W_{AB}^2}{kq^2\left(\sqrt{E_A} - \sqrt{E_B}\right)^2} = \frac{(3\cdot 10^{-3}\,\text{J})^2}{9\cdot 10^9\ \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}\,(10^{-7}\,\text{C})^2\left(\sqrt{4\cdot 10^4\ \frac{\text{N}}{\text{C}}} - \sqrt{10^4\ \frac{\text{N}}{\text{C}}}\right)^2} = 10^{-5}\,\text{C}$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.7.72E.

MEGOLDÁS: Az energia-megmaradás alapján: $\frac{k\cdot Q\cdot q}{x_A}+\frac{m\cdot v^2}{2}=\frac{k\cdot Q\cdot q}{x_A-s}$. Numerikusan SI-ben, dimenziók nélkül:

$\frac{9\cdot10^9\cdot2\cdot10^{-5}\cdot10^{-6}}{x_A}+\frac{1{,}6\cdot10^{-3}\cdot30^2}{2}=\frac{9\cdot10^9\cdot2\cdot10^{-5}\cdot10^{-6}}{x_A-0{,}8}$. A másodfokú egyenlet pozitív gyöke: $x_A=1\text{m}$. A keresett potenciál: $U_A=k\frac{Q}{x_A}=9\cdot10^9\frac{2\cdot10^{-5}}{1}\text{V}=1{,}8\cdot10^5\text{V}$.

M.7.73. **MEGOLDÁS:** $E=\frac{1}{2}mv^2$ Ebből $v=\sqrt{\frac{2E}{m}}=\sqrt{\frac{2\cdot4\cdot10^4\cdot1{,}6\cdot10^{-19}}{9{,}1\cdot10^{-31}}}\frac{\text{m}}{\text{s}}=1{,}19\cdot10^8\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Ez a fénysebességnek $\frac{1{,}19\cdot10^8\frac{\text{m}}{\text{s}}}{3\cdot10^8\frac{\text{m}}{\text{s}}}\approx40\%$-a. A relativisztikus tömegnövekedés nem hanyagolható el, tehát nem ér el ekkora sebességet az elektron.

M.7.74.

MEGOLDÁS: A rugóerő egyenlő a Coulomb féle vonzóerővel:

$Dx=k\frac{Q^2}{x^2}$. Ebből: $x=\sqrt[3]{\frac{kQ^2}{D}}=\sqrt[3]{\frac{9\cdot10^9(3\cdot10^{-6})^2}{3\cdot10^3}}\text{m}=3\cdot10^{-2}\text{m}$.

Vezetők elektromos mezőben, kondenzátorok

7.75E.

MEGOLDÁS: A fémgolyók szétválasztás utáni q_1 és q_2 töltéseire fennáll:

$q_1+q_2=Q_1+Q_2=-4\cdot10^{-6}\text{C}$.

Összeérintéskor a golyók azonos potenciálúak lesznek: $k\frac{q_1}{R_1}=k\frac{q_2}{R_2}$.

a. $q_1=q_2=-2\cdot10^{-6}\text{C}$.

b. $q_1=-10^{-6}\text{C}\quad q_2=-3\cdot10^{-6}\text{C}$.

7.76.

M. a. $E_X=k\frac{Q}{a^2}\quad E_Y=k\frac{Q}{9a^2}$

b. $E_Y=k\frac{Q}{9a^2}$

c. $E_X=E_C=0$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.7.77.

M. A kondenzátor energiája $E=\frac{1}{2}CU^2$ Ebből $C=\frac{2E}{U^2}=C=\frac{2\cdot 100\text{J}}{(350\text{V})^2}=1600\mu\text{F}$

M.7.78.

MEGOLDÁS: a. A kapacitás a $C=\varepsilon_0\frac{A}{d}$ összefüggés alapján csökken.

b. c. d A töltés, a térerősség, és a vonzóerő nem változik.

e. A kondenzátor energiája az $E=\frac{Q^2}{2C}$ összefüggés szerint nő.

M.7.79.

MEGOLDÁS: A lemezek távolításakor végzett munka növeli a kondenzátor energiáját. $W=E_2-E_1=\frac{Q^2}{2C_2}-\frac{Q^2}{2C_1}=\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A}(x_2-x_1)$. (Érdekességként jegyezzük meg, hogy az összefüggésből leolvashatjuk a lemezek között ható vonzóerőt: $F = W/(x_2-x_1) = Q^2/2\varepsilon_0 A$.)

M.7.80.E

MEGOLDÁS: Az előző feladat eredményét felhasználva a lemezek közti távolságot o-ról x-re növelve, a munkavégzés $\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 \text{A}}x$. Felhasználva, hogy a vonzóerő nagysága állandó: $F=\frac{W}{x}=\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 \text{A}}$.

M.7.81E.

MEGOLDÁS: a. A feszültség nem változik, az áramforrás feszültségével megegyező.

b. A $C=\varepsilon_0\frac{A}{d}$ összefüggés szerint a kapacitás csökken.

a. A $Q=C\cdot U$ összefüggés szerint a kondenzátor töltése csökken.

b. Az $E=\frac{U}{d}$ összefüggés szerint a térerősség csökken.

c. A lemezek közötti vonzóerő csökken.

d. Az $E=\frac{1}{2}CU^2$ összefüggés szerint a kondenzátor energiája csökken.

e. A kondenzátor energiacsökkenése $\Delta E_{\text{kond}}=\frac{1}{2}(\Delta C)U^2=\frac{1}{2}(\Delta C)U^2$.

A kondenzátor töltése csökken: $\Delta Q=U(\Delta C)$. Az akkumulátor töltése és a benne tárolt energia nő. $\Delta E_{\text{akku}}=U\cdot\Delta Q=U^2\cdot\Delta C$.

Ennek éppen a fele a kondenzátor energiacsökkenése. A másik felét a lemezek távolításakor végzett W munka adja. $\Delta E_{\text{akku}}=W+\Delta E_{\text{kond}}$.

Érdekes, hogy az általunk végzett munka megegyezik a kondenzátor energiacsökkenésével: $W=\Delta E_{\text{kond}}$.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.7.82.

MEGOLDÁS: A párhuzamosan kapcsolt kondenzátorok eredő kapacitása: $C_e=C_1+C_2$; töltése: $Q_e = Q_1 + Q_2 = C_1U_1 + C_2U_2$; feszültsége:

$$U_e = \frac{Q_e}{C_e} = \frac{C_1U_1 + C_2U_2}{C_1 + C_2} = \frac{2\cdot 100+3\cdot 200}{2+3}\,\mathrm{V} = 160\,\mathrm{V}.$$

M.7.83.

MEGOLDÁS: A kondenzátor energiája a csillámlemez nélkül: $E_0 = \frac{1}{2}C_0U^2$. Az új kapacitás: $C = \varepsilon_r C_0$. A feszültség nem változik. A kondenzátor energiája a csillámlemezzel: $E = \frac{1}{2}CU^2 = E = \frac{1}{2}\varepsilon_r C_0U^2 = \varepsilon_r E_0$. A kondenzátor energiája ε_r-szeresére nőtt.

M.7.84.E

MEGOLDÁS: A kondenzátor energiája a csillámlemez nélkül: $E_0 = \frac{1}{2}C_0U^2$.

Az új kapacitás: $C = \varepsilon_r C_0$. A töltés változatlan: $Q = C_0 \cdot U$. A kondenzátor energiája a csillámlemezzel: $E = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{(C_0\cdot U)^2}{\varepsilon_r C_0} = \frac{E_0}{\varepsilon_r}$. A kondenzátor energiája ε_r-ed részére csökken.

M.7.85.E

MEGOLDÁS: A kondenzátor eredeti energiája: $E_0 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_0}$. A kapacitása a lemez eltávolításakor ε_r-ed részére csökken: $C = \frac{C_0}{\varepsilon_r}$. Az energia ε_r-szeresére nő: $E = \varepsilon_r E_0$. A csillámlemez eltávolításakor végzett munka a két energia különbsége: $W = E - E_0 = \varepsilon_r E_0 - E_0 = E_0(\varepsilon_r - 1)$.

Erőtani magyarázat: a kondenzátor lemezein lévő töltések és a csillámlemez felületén lévő másodlagos töltések közti vonzóerő ellenében kell munkát végezni. Mindez csak akkor érthető meg, ha a kondenzátorlemezek közül kihajló erővonalakat is figyelembe vesszük, vagyis a csillámlemezre ható erő nem magyarázható akkor, ha úgy modellezzük a kondenzátort, hogy csak a lemezek között van tér, és a térerősség merőleges a lemezekre.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Tesztek:

7.86. Egy elektroszkóp mutatója kitért, miután gömbjéhez megdörzsölt üvegrudat érintettünk. Ezután egy megdörzsölt műanyag rúddal közelítünk a gömbhöz, de nem érünk hozzá. Hogyan változik a mutató helyzete?
A) A kitérés csökken. B) A kitérés nő. C) A kitérés nem változik. D) A kitérés attól függően nő vagy csökken, hogy melyik rúd töltése volt nagyobb.
M: A helyes válasz: A. A töltött üvegrúddal pozitív töltéseket vittünk fel. A töltött negatív műanyag rúd közelítésekor pozitív töltések vándorolnak az elektroszkóp fémrúdján lévő gömbre, ezzel csökkentik a mutatón és annak tartószerkezetén lévő pozitív töltések mennyiségét, vagyis kisebb elforgató hatást érez a mutató.

7.87. A töltetlen elektroszkóp mutatója kitér, ha fémgömbjéhez feltöltött műanyag rudat érintünk. Mi történik, ha a műanyag rudat ismételt megdörzsölés után közelítjük az elektroszkóp fémgömbjéhez?
A) Az elektroszkóp mutatójának kitérése nagyobb lesz, mert az elektroszkópról negatív töltések lépnek át a műanyag rúdra.
B) A mutató kitérése változatlan marad, mivel nem értünk hozzá a gömbhöz.
C) A mutató kitérése növekszik az elektromos megosztás miatt.
D) A mutató kitérése csökken az elektromos megosztás miatt.
M: A helyes válasz: C.

7.88. Egy elektroszkópra pozitív töltéseket viszünk megdörzsölt üvegrúd segítségével. Az elektroszkóp gömbjét kézzel megérintjük. Mi történik?
A) Az elektroszkóp töltése növekszik, mert újabb pozitív töltésű részecskék áramlanak rá a földből, a testünkön keresztül
B) Az elektroszkóp elveszíti töltését, mert a földből testünkön keresztül elektronok áramlanak az elektroszkópra, és az semleges lesz.
C) Az elektroszkóp megtartja töltését.
D) Feltöltött elektroszkóp gömbjét áramütés veszélye miatt tilos megérinteni.
M: A helyes válasz :B

7.89. Két pontszerű, elektromosan töltött test távolságát felére csökkentjük. Hogyan változik a testek közötti elektromos erő?
A) Felére csökken. B) Kétszeresére nő. C) Négyszeresére nő. D) Negyedére csökken.
M. A helyes válasz: C. A Coulomb-törvényből adódik.

7.90. Melyik a HAMIS állítás?
A) Az elektromos erőtérbe helyezett pozitív előjelű próbatöltés az erővonalak mentén mozog.
B) Az elektromos erőtérbe helyezett pozitív előjelű töltésre a töltés helyén átmenő erővonallal megegyező irányú erő hat.
C) Az erőtérbe helyezett negatív előjelű töltés a töltés helyén átmenő erővonallal párhuzamosan gyorsul.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

D) Az elektromos erőtérbe helyezett negatív előjelű töltés mozoghat erővonal mentén.
M. A helyes választás: A. A mozgás pályája általában nem egyezik meg az erővonallal.

7.91. Miért mondjuk, hogy az elektrosztatikus mező konzervatív? Válassza ki a HAMIS magyarázatot!

A) Elektrosztatikus mezőben végzett munkavégzés az úttól független.
B) Elektrosztatikus mezőben végzett munkavégzés csak a kezdő és végponttól függ.
C) Elektrosztatikus mezőben zárt görbe mentén végzett munka mindig nulla.
D) Elektrosztatikus mezőben zárt görbe mentén végzett munka mindig pozitív.

M. A helyes választás: D. Zárt görbe mentén a munka nulla.

7.92. Két szabadon mozgó, azonos nagyságú, negatív $q = -4\mu C$ ponttöltést egy, a töltéseket összekötő szakasz felezőpontjába helyezett pozitív Q ponttöltés tart egyensúlyban. Mekkora a Q töltés nagysága?

A) $1\,\mu C$. B) $2\,\mu C$. C) $3\,\mu C$. D) $4\,\mu C$.

M. A helyes válasz: A. A két töltés bármelyikére két erő hat. A $-q$ töltés taszítja, a $+Q$ töltés vonzza. A $+Q$ töltés a jelzett pontban fele akkora távolságban van, mint a $-q$ töltés, ezért negyedakkora $+Q$ egyenlíti ki a $-q$ hatását.

7.93. Két rögzített, azonos nagyságú, negatív $q = -4\mu C$ töltés között, a töltéseket összekötő szakasz felezőpontjában egy Q töltés van egyensúlyban. Mekkora a Q töltés?

A) $+1\,\mu C$. B) $+2\,\mu C$. C) Bármekkora. D) $-4\,\mu C$.

M. A helyes válasz C. A két azonos töltés felezőpontjában a térerősség nulla. Nem hat erő semmilyen töltésre.

7.94. Hogyan változik a matematikai inga lengésideje, ha a fonálra erősített testre pozitív töltést viszünk, és az inga függőlegesen lefelé mutató térerősségű elektromos mezőben leng.

A) A lengésidő nem változik. B) A lengésidő nő. C) A lengésidő csökken.

M. A helyes válasz: C. A töltött testre a nehézségi erőn kívül a szintén lefelé mutató elektrosztatikus erő is hat. Látszólag nagyobb lesz a nehézségi gyorsulás. A lengésidő ennek négyzetgyökével fordítottan arányos.

7.95E. Egy négyzet csúcsaiba azonos töltéseket helyezünk. Van-e olyan pont, ahol a térerősség nulla?

A) Minden oldal felezőpontja ilyen, mert itt az oldal végpontjaiban lévő töltések hatása kioltja egymást.
B) Nincs ilyen pont.
C) A négyzet középpontja ilyen, mert itt a négy töltés hatása kioltja egymást.
D) A négyzet két átlójának minden pontja ilyen, mert itt a négy töltés hatása kioltja egymást.

M. A helyes válasz: C

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

7.96. Válassza ki az igaz állítást!

A) A feltöltött kondenzátor lemezei közötti térerősség a pozitív lemeztől távolodva egyenletesen csökken.
B) A feltöltött kondenzátor lemezei között térerősség nagysága állandó.
C) A kondenzátor kapacitása a lemezek távolításakor növekszik.
D) A kondenzátor kapacitása a $C = \frac{Q}{U}$ összefüggésnek megfelelően a kondenzátor Q töltésével egyenesen arányosan nő.

M. A helyes válasz: B.

7.97. Egy rögzített + Q ponttöltés által keltett mezőbe a töltéstől r távolságra elhelyezünk, és magára hagyunk egy $+q$ töltéssel rendelkező részecskét. Milyen mozgást fog végezni?

A) Egyenletesen növekvő sebességgel távolodik a Q töltéstől.
B) Egyenletes körmozgást végez a Q töltés körül r sugarú körpályán.
C) Növekvő sebességű, csökkenő gyorsulású mozgással távolodik a Q töltéstől.
D) Egy ideig távolodik, majd megáll és visszatér a kiindulási pontba.
M. A helyes válasz: C. A sebesség nő, mert az erőhatás miatt gyorsul a részecske. A gyorsulás nagysága csökken, mert növekvő távolság esetén a gyorsító erő csökken.

7.98. $\vec{E}$ térerősségű homogén elektromos mezőben elhelyezünk, és magára hagyunk egy $-q$ töltéssel rendelkező részecskét. Milyen mozgást fog végezni?

A) Egyenletesen növekvő sebességgel mozog az $\vec{E}$ vektor irányában.
B) Egyenletesen növekvő sebességgel mozog az $\vec{E}$ vektorral ellentétes irányban.
C) Növekvő sebességgel mozog az $\vec{E}$ vektorra merőleges irányban.
D) Állva marad, mert a homogén mező csak a pozitív töltésekre hat.

M. A helyes válasz:B A térerősség vektor iránya a pozitív töltésre ható erő irányával egyezik meg.

7.99. Mi az elektromos csúcshatás?

A) Feltöltött vezetőn az elektromos töltés az élek, csúcsok mentén halmozódik fel, ezért az elektromos térerősség a csúcsok közelében nagyobb lesz, mint más helyeken.
B) Csúcshatás a villámhárítók működési elve: fémek hegyes csúcsain nem fér el sok elektromosan töltött részecske, és ezért ide nem csap bele a villám.
C) Hegyes csúcsok (pl. árbocvég) az elektromos töltések hatására felmelegednek, felizzanak. Középkori hajósok ezt nevezték Szent Elmo tüzének.
D) Gyertyával melegített hegyes fémtűből a hő hatására kilépő elektronok elfújják a gyertyát (elektromos szél).

M. A helyes válasz: A

7.100. Mi a Faraday-kalitka?

A) Fémhálóval körülvett térrész, amelyből a belső elektromos erőtér nem jön ki.
B) Fémhálóval körülvett térrész, amelybe a külső elektromos erőtér nem hatol be.
C) Fémhálóval körülvett térrész, amelynek határán az elektromos erőtér nem megy át.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

D) Faraday által kifejlesztett ketrec, amelybe gyenge elektromos áramot vezetve szelíd módszerrel akadályozzuk meg a bezárt állat kiszabadulását.

M. A helyes válasz: B

7. 101. Feltöltött síkkondenzátort lekapcsolunk a feltöltő feszültségforrásról. Ezután szigetelőanyagból készült eszközökkel növeljük a kondenzátorlemezek távolságát.
Az alábbi négy állítás közül három helyes. Válasszuk ki a hamisat!

A) A kondenzátor töltése nem változik.
B) Távolítás közben a lemezek közti vonzóerő a távolság négyzetével fordított arányban csökken.
C) A lemezek közti a feszültség távolságukkal arányosan nő.
D) A kondenzátor energiája a lemezek távolságával arányosan nő.

Megoldás: B

7. 102. Feltöltött síkkondenzátor kapcsolatát a feltöltő feszültségforrással megtartva lemezeinek távolságát szigetelőanyagból készült eszközökkel növeljük.
Az alábbi négy állítás közül három helyes. Válasszuk ki a hamisat!

A) A kondenzátor feszültsége növekszik.
B) A kondenzátor töltése csökken
C) A kondenzátor kapacitása csökken.
D) A kondenzátor lemezeinek távolításakor munkát végzünk, ennek ellenére a kondenzátor energiája csökken

Megoldás: A

ESSZÉKÉRDÉSEK

7.103. *Elektrosztatikus mező.*
Térerősség, erővonalak, feszültség és potenciál definíciója.
Homogén elektromos mező és ponttöltés által keltett mező jellemzése:
- térerősség függése a helytől a kétféle mezőben,
- erővonalrendszer a kétféle mezőben,
- ekvipotenciális felületek a kétféle mezőben.

Elektromos dipólus erővonalrendszere.

7.104. *A gravitációs tér és a sztatikus elektromos mező összehasonlítása*
Mi hozza létre a kétféle mezőt és mire hat?
Erőhatások hasonlósága, különbsége.
Gravitációs erőtörvény és a Coulomb-féle erőtörvény.
Erővonal rendszer, térerősség, ekvipotenciális felületek elektromos és gravitációs mezőben.
Munkavégzés zárt vonalú pályán a kétféle mezőben.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Hasonlítsa össze a H atomban a proton és az elektron között fellépő gravitációs és elektromos erők nagyságrendjét! (A szükséges adatokat keresse ki a Négyjegyű függvénytáblázatokból!)

7.105. *Vezetők elektrosztatikus mezőben*
Töltések elhelyezkedése semleges fémekben külső elektromos tér hatására. Térerősség, potenciál a vezető belsejében, erővonalak a fémfelületen. Elektromos árnyékolás. Töltött vezető elektromos tere. Többlet töltések elhelyezkedése. Térerősség, potenciál a vezető belsejében, erővonalak a fémfelületen. Csúcshatás. Érdekes kísérletek csúcshatással (elektromos szél, elektromos Segner-kerék).

KIHÍVÁST JELENTŐ FELADATOK

M.7.106.

MEGOLDÁS: a. A golyóra három erő hat: függőlegesen az $F_1 = mg$ gravitációs erő, vízszintesen az $F_2 = E \cdot Q$ elektrosztatikus erő, és az ezek eredőjét kiegyenlítő fonálerő.

Az erőtani ábrában $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{mg}{EQ} = \dfrac{10^{-4}\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{5 \cdot 10^4\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} \cdot 10^{-8}\,\mathrm{C}} = 2$. Ebből $\alpha = 63,4°$.

b. A sebességet munkatétellel számítjuk ki: A gravitációs erő munkája *mgl*.

Az elektrosztatikus erő munkája $-EQl$. Így $\frac{1}{2}mv^2 = mgl - EQl$. Ebből

$$v = \sqrt{\frac{2l(mg - EQ)}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,5\mathrm{m} \cdot (10^{-4}\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} - 5 \cdot 10^4\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} \cdot 10^{-8}\,\mathrm{C})}{10^{-4}\,\mathrm{kg}}} = 2{,}24\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

c. A mozgási (kinetikus) energiát írjuk fel a szög függvényében, a munkatétel segítségével:

$E_{\mathrm{kin}} = mgl\sin\alpha - EQ(l - l\cos\alpha)$. Ennek az α szögtől függő része: $Y = mg\sin\alpha + EQ\cos\alpha$.

Ez akkor maximális, ha deriváltja nulla: $(mg\sin\alpha + EQ\cos\alpha)' = 0$, vagyis
$mg\cos\alpha - EQ\sin\alpha = 0$.

Ebből $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{mg}{EQ}$, éppen az egyensúlyi helyzet, amint ez várható is, hiszen az egyensúlyi helyzetig folyamatosan nő a sebesség, utána pedig csökken.

d. Használjuk a függőleges helyzetben elért sebességre kapott $v = \sqrt{\dfrac{2l(mg - EQ)}{m}}$ összefüggést. Határesetében *v* = o. Ekkor $mg - EQ = 0$. Vagyis

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$E = \frac{mg}{Q} = \frac{10^{-4}\,\text{kg} \cdot 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{10^{-8}\,\text{C}} = 10^5\,\frac{\text{N}}{\text{C}}$. Ha $E > 10^5\,\frac{\text{N}}{\text{C}}$, akkor az inga nem jut el a függőleges helyzetig.

7.107.

MEGOLDÁS: a. Rögzített töltés esete:

A helyzeti (potenciális) és a mozgási (kinetikus) energia összege állandó:

$\frac{1}{2}mv_0^2 + k\frac{q^2}{x_0} = k\frac{q^2}{x_{\min}}$.

Ebből $x_{\min} = \frac{1}{\frac{mv_0^2}{2kq^2} + \frac{1}{x_0}}$. Ha az x_0 távolság igen nagy, akkor $x_{\min} = \frac{2kq^2}{mv_0^2}$.

b. Ha a másik tömeg rögzítetlen, a minimális távolság esetén a két részecske sebessége egyenlő. $\frac{1}{2}mv_0^2 = k\frac{q^2}{x_{\min}} + \frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}mu^2$. Zárt rendszer impulzusa állandó:

$mv_0 = mu + mu$.

Ebből $u = \frac{mv_0}{2m} = \frac{v_0}{2}$. Ezt beírva az energiaegyenletbe: $x_{\min} = \frac{4kq^2}{mv_0^2}$.

Ez az érték az előzőnek éppen kétszerese.

7.108. E

MEGOLDÁS: A levegős kondenzátor kapacitása: $C_0 = \varepsilon_0\frac{A}{d}$.

a. A szigetelő anyaggal teljesen kitöltött kondenzátor kapacitása:

$C_1 = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \frac{A}{d} = \varepsilon_r \cdot C_0 = 5C_0$.

b. Legyen a lemezek töltése Q, a kondenzátor szigetelőanyagot tartalmazó részében a térerősség E_1, a levegős féltérben E_2. A lemezek közötti feszültség így $U = E_1\frac{d}{2} + E_2\frac{d}{2}$. A térerősségek kiszámítása Gauss tételével:

ÁBRA

Az X zárt felületből kizárólag az x, az Y zárt felületből kizárólag az y síkfelületen lépnek ki erővonalak. Így $E_1A = \frac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$, illetve $E_2A = \frac{Q}{\varepsilon_0}$.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

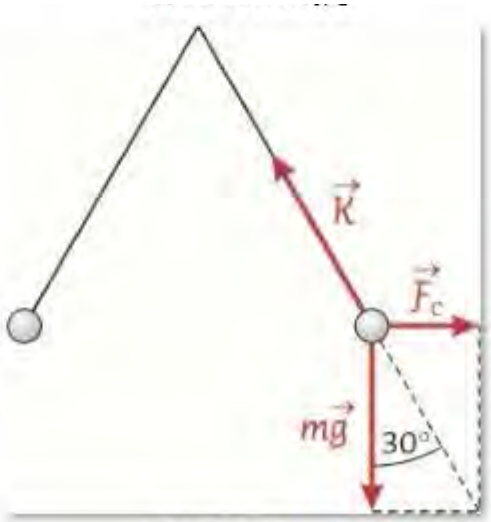
Ezzel a kondenzátor feszültsége: $U = \frac{Q}{A\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{d}{2} + \frac{Q}{A\varepsilon_0}\frac{d}{2} = \frac{Q}{A\varepsilon_0}\frac{d}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon_r}+1\right)$ a kapacitása

pedig: $C_{½} = \frac{Q}{U} = \varepsilon_0\frac{A}{d}\cdot\frac{2}{\frac{1}{\varepsilon_r}+1} = C_0\cdot\frac{2}{\frac{1}{\varepsilon_r}+1} = \frac{5}{3}C_0$.

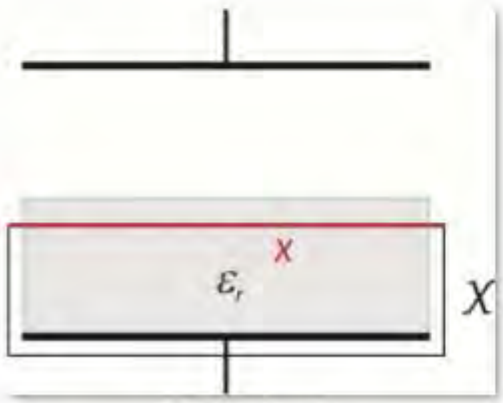
b rész másik megoldása:
Tekinthetjük az elrendezést két sorosan kapcsolt kondenzátornak, melyek kapacitása:

$C_1 = \varepsilon_0\frac{2A}{d}$ és $C_2 = \varepsilon_0\cdot\varepsilon_r\frac{2A}{d}$ Ezek eredője:

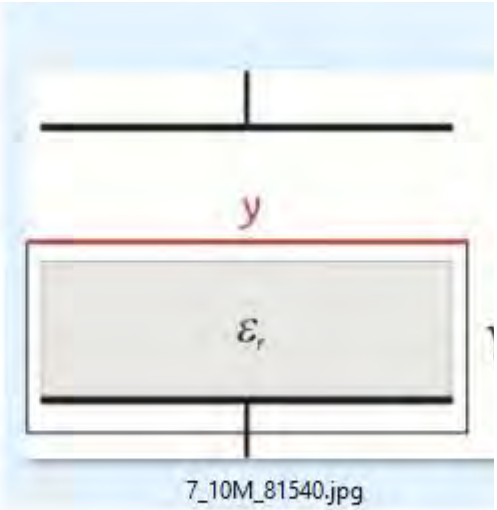
$$C_e = \frac{C_1\cdot C_2}{C_1+C_2} = \frac{\varepsilon_0\frac{2A}{d}\cdot\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r\frac{2A}{d}}{\varepsilon_0\frac{2A}{d}+\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r\frac{2A}{d}} = \frac{\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r\frac{2A}{d}}{1+\varepsilon_r} = \varepsilon_0\frac{A}{d}\cdot\frac{2\varepsilon_r}{1+\varepsilon_r} = \frac{5}{3}C_0$$



7_04,5M_81540.jpg



7_09M_81540.jpg



7_10M_81540.jpg

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

8. AZ ELEKTROMOS ÁRAM - MEGOLDÁSOKKAL

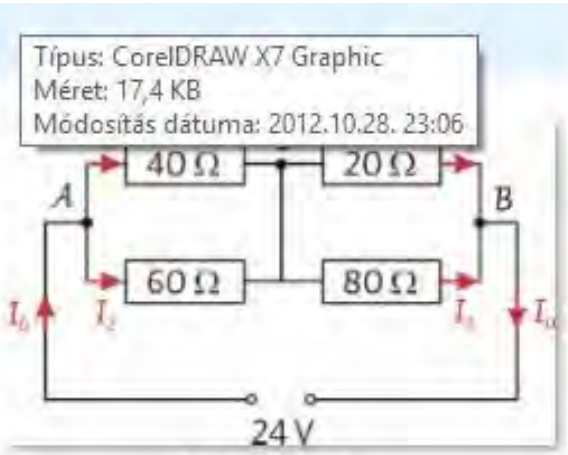
ALAPOZÓ FELADATOK

Áram, áramerősség

8_10M_81540.cdr

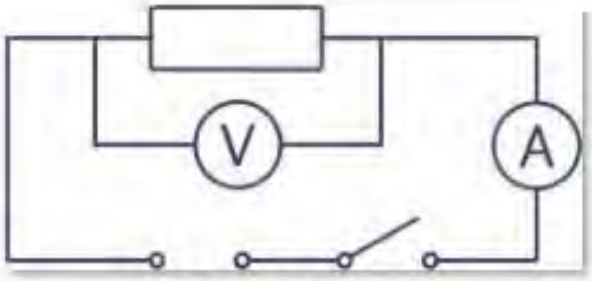


8_10M_81540.jpg



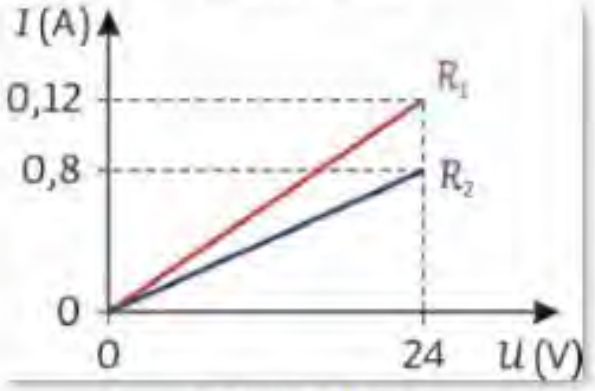
8_28M_81540.jpg

8_03M_81540.cdr



8_03M_81540.jpg

8_04M_81540.cdr



8_04M_81540.jpg

M.8. 1.

M: $I = \frac{Q}{t} = \frac{0{,}5\text{C}}{20 \cdot 10^{-3}\text{s}} = 25\text{A}$

M.8. 2.

M a. $Q = I \cdot t = 0{,}1\text{ A} \cdot 600\text{s} = 60\text{ C}$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

b. Az átáramlott töltés a grafikon alatti terület $Q = \frac{0{,}1\text{A} \cdot 600\text{s}}{2} = 30\text{C}$

M.8. 3.

$$I = \frac{Q}{t} = \frac{50 \cdot 10^{-3} \cdot \text{Ah}}{2{,}25 \cdot 365 \cdot 24\text{h}} = 2{,}6 \cdot 10^{-6}\text{A} = 2{,}5\mu\text{A}$$

$n = \frac{It}{e} = \frac{2{,}6 \cdot 10^{-6}\text{A} \cdot 1\text{s}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\text{C}} = 1{,}6 \cdot 10^{13}$ Ez a szám $\frac{1{,}6 \cdot 10^{13}}{100 \cdot 10^{9}} = 160$ -szorosa a 100 milliárdnak.

M.8. 4

M: A 60 Ah 20%-a 12 Ah. 5 A erősségű töltőárammal $\frac{12\text{Ah}}{5\text{A}} = 2{,}4\text{h}$ alatt lehet feltölteni.

M.8. 5.

Ellenállás, Ohm törvénye

M: $m = \rho V = \rho A l = 2{,}7 \cdot 10^{3} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 10^{-4}\text{m}^2 \cdot 3 \cdot 10^{5}\text{m} = 8{,}1 \cdot 10^{4}\text{kg}$ =81 t

$$R = \rho \frac{l}{A} = 2{,}67 \cdot 10^{-8}\Omega\text{m} \frac{3 \cdot 10^{5}\text{m}}{10^{-4}\text{m}^2} = 80\Omega$$

M.8. 7.

M: a. $R = \rho \frac{l}{A} = \rho \frac{l}{r^2\pi} = 1{,}69 \cdot 10^{-8}\Omega\text{m} \frac{10^{3}\text{m}}{10^{-6}\pi\text{m}^2} = 5{,}4\Omega$

b. $R = \rho \frac{l}{A} = \rho \frac{l}{r^2\pi}$ Ebből $r = \sqrt{\frac{\rho l}{R\pi}} = r = \sqrt{\frac{1{,}69 \cdot 10^{-8}\Omega\text{m} \cdot 10^{3}\text{m}}{1\Omega \cdot \pi}} = 2{,}3\text{mm}$

A vezeték átmérője 4,6 mm

c. $R = \rho \frac{l}{A}$. Ebből $l = \frac{A \cdot R}{\rho} = \frac{10^{-6}\text{m}^2 \cdot 10^{3}\Omega}{8{,}5 \cdot 10^{-6}\Omega\text{m}} = 118\text{m}$

M.8. 8.

M: $R_1 = \rho \frac{l}{A}$ $R_2 = \rho \frac{\frac{l}{10}}{10A} = \frac{R_1}{100}$

A tized olyan hosszú, tízszer akkora keresztmetszetű huzal ellenállása 100-ad akkora.

M.8. 9.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Készítsünk áramköri rajzot, melyben mérjük a kapcsolóval működtetett fogyasztó feszültségét és áramát!

M: $R=\frac{U}{I}=\frac{12\text{V}}{0,6\text{A}}=20\Omega$ 9. ÁBRA

M.8. 10.

M: 10. ÁBRA

A grafikon meredeksége az ellenállás reciproka.

M.8. 11.

	U_1	U_2	I
A kapcsoló nyitva	0V	9V	0
A kapcsoló zárva	9V	0V	0,18A

Az áram munkája és hőhatása. Vegyi hatás

M.8. 12

Mekkora az áramfelvétele és az ellenállása?

M. A $P=U\cdot I$ összefüggésből $I=\frac{P}{U}=\frac{140\text{W}}{12\Omega}=11,7\text{A}$

A $P=\frac{U^2}{R}$ összefüggésből $R=\frac{U^2}{P}=\frac{(12\text{V})^2}{140\text{W}}\approx 1\Omega$

M.8. 13.

M. A bekapcsolt fogyasztók összteljesítménye: 985 W.

Mivel ezek áramfelvétele: $I=\frac{P}{U}=\frac{985\text{W}}{230\text{V}}=4,3\text{A}\ll 16\text{A}$, valószínűleg az utolsónak bekapcsolt fogyasztó lehet zárlatos.

M.8. 14.

M: A $P=\frac{U^2}{R}$ összefüggésből $R=\frac{U^2}{P}=\frac{(230\text{V})^2}{2000\text{W}}=26\Omega$. $I=\frac{P}{U}=\frac{2000\text{W}}{230\text{V}}=8,7\text{A}$

Az $\eta Pt=cm\Delta t$ összefüggésből $\eta=\frac{cm\Delta t}{Pt}=\frac{4200\frac{\text{J}}{\text{kgK}}\cdot 5\text{kg}\cdot 40\text{K}}{2\cdot 10^3\text{W}\cdot 9\cdot 60\text{s}}=0,77=77\%$

A melegítés ára: $2\text{kW}\cdot\frac{9}{60}\text{h}\cdot 50\frac{\text{Ft}}{\text{kWh}}=15\text{Ft}$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.8. 15.

M:

Világító eszköz			Fogyasztása	
fajta	darabszám	ár	kWh	Ft
LED	1	8500	300	15000
fénycső	5	7000	360	18000
izzó	30	2550	1800	90000

Így összesen: LED: 23 500Ft, fénycső: 25 000Ft, izzó: 92 550Ft

Ez a költség több mint 20 év alatt jelentkezik.

Megjegyzés: A fenti számolás azt jelzi, hogy igen nehéz gazdaságossági számításokat végezni, mert a napi 4 órát használt LED csak 20 év alatt megy tönkre, de addig mindenféle körülmény megváltozik.

M.8. 16.

M: Az elektroliton átfolyó áram erőssége: $I = \frac{U}{R} = \frac{12\text{V}}{10\Omega} = 1,2\text{A}$.

A katódon kiváló króm tömege: $m = k \cdot I \cdot t = 0,18\frac{\text{mg}}{\text{C}} \cdot 1,2\text{A} \cdot 1,5 \cdot 3600\text{s} = 1,17\text{g}$

M.8. 17

M: A réz elektrokémiai egyenértéke a megadott adatokból.

$k = \frac{M}{z \cdot F} = \frac{0,063 \cdot 10^6 \frac{\text{mg}}{\text{mol}}}{2 \cdot 96500 \frac{\text{C}}{\text{mol}}} = 0,33\frac{\text{mg}}{\text{C}}$. Így az elektrolizáló áram erőssége:

$I = \frac{m}{k \cdot t} = \frac{5\text{g}}{0,33\frac{\text{mg}}{\text{C}} \cdot 3600\text{s}} = 4,2\text{A}$

Fogyasztók kapcsolása

M.8. 18.

M Két ellenállás sorosan, a harmadik ezekkel párhuzamosan van kapcsolva, így

$R_e = \frac{(R_1 + R_2)R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$ A három lehetőség: $R_{e1} = \frac{(30\Omega + 60\Omega) \cdot 90\Omega}{180\Omega} = 45\Omega$

$R_{e2} = \frac{(30\Omega + 90\Omega) \cdot 60\Omega}{180\Omega} = 40\Omega$ és $R_{e3} = \frac{(60\Omega + 90\Omega) \cdot 30\Omega}{180\Omega} = 25\Omega$

M.8. 19.

M:

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

	K1 zárva	K1 nyitva
K2 zárva	9,2 Ω	20 Ω
K2 nyitva	40 Ω	90 Ω

Ha mindkét kapcsoló zárva van, akkor a három ellenállás párhuzamosan, ha mindkettő nyitva, akkor sorosan van kapcsolva. Ha egyedül a K1 van zárva, akkor csak a 40 Ω-os ellenálláson, ha egyedül a K2 van zárva, akkor a csak a 20 Ω-os ellenálláson folyik áram.

M.8. 20.

párhuzamosan. Mekkora az egyes mellékágak és a főág áramerőssége?
Mit tudunk mondani a két mellékági áramerősség arányáról?

M: A mellékágak áramerőssége: $I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{9\text{V}}{60\Omega} = 0{,}15\text{A}$ és $I_2 = \frac{U}{R_2} = \frac{9\text{V}}{30\Omega} = 0{,}3\text{A}$

A főágé. $I = I_1 + I_2 = 0{,}15\text{A} + 0{,}3\text{A} = 0{,}45\text{A}$

A mellékágak áramerősségének aránya $\frac{I_1}{I_2} = \frac{0{,}15\text{A}}{0{,}3\text{A}} = 0{,}5$ a megfelelő ellenállások arányának reciproka.

M.8. 21.

M: Az egyes ellenállásokon eső feszültségek:

$$U_1 = IR_1 = \frac{U}{R_e}R_1 = \frac{U}{R_1 + R_2}R_1 = \frac{9\text{V}}{60\Omega + 30\Omega}\cdot 60\Omega = 6\text{V} \text{ és}$$

$$U_2 = IR_2 = \frac{U}{R_e}R_2 = \frac{U}{R_1 + R_2}R_2 = \frac{9\text{V}}{60\Omega + 30\Omega}\cdot 30\Omega = 3\text{V}$$

Az egyes feszültségek aránya $\frac{6\text{V}}{3\text{V}} = 2$ a megfelelő ellenállások arányával egyezik meg.

Megjegyzés: Mindkét fogyasztón 0,1 A áram folyik.

M.8. 22

M: Sorosan kapcsolt ellenállásokon eső feszültségek aránya megegyezik az ellenállások arányával. Így a 30 Ω-os ellenálláson 18V feszültség esik.

Az ellenállásokon átfolyó áram erőssége: $I = \frac{U}{R} = \frac{12\text{V}}{20\Omega} = \frac{18\text{V}}{30\Omega} = 0{,}6\text{A}$

M.8. 23.

M: Párhuzamosan kapcsolt ellenállások áramerőssége fordítottan arányos az ellenállásokkal, így a 30 Ω-os ellenálláson átfolyó áram erőssége 40mA.
Az ellenállásokon eső feszültség: $U = IR = 60\text{mA}\cdot 20\Omega = 40\text{mA}\cdot 30\Omega = 1{,}2\text{V}$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.8. 24.

M: A két sorosan kapcsolt ellenállás eredője $6,4\Omega$, így az átfolyó áram erőssége:

$$I = \frac{U}{R_e} = \frac{3,2\text{V}}{6,4\Omega} = 0,5\text{A}$$

Megjegyzés: A 6 Ω-os ellenállásra eső feszültséget nem érdemes így mérni, mert az árammérő erősen befolyásolja az eredményt, hiszen a feszültségmérő 3,2 V feszültséget jelez, miközben a 6 Ω-os ellenállásra eső feszültség csak 3 V. A mai digitális feszültségmérők áramkörbe kapcsolása alig befolyásolja az áramkör áramát, a voltmérőt érdemes közvetlenül az ellenállás két kivezetésére kötni.

M.8. 25.

M: $R_e = R_1 + R_2 + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = 50\Omega + 40\Omega + \frac{20\Omega \cdot 30\Omega}{20\Omega + 30\Omega} = 102\Omega$

Legnagyobb feszültségesés a legnagyobb ellenálláson (50Ω), a legkisebb a párhuzamosan kapcsolt ellenállásokon (20Ω és 30Ω)

A legnagyobb áram a főágban lévő sorosan kapcsolt $50\,\Omega$-os és $40\,\Omega$-os ellenálláson, a legkisebb a párhuzamosan kapcsolt nagyobbik ($30\,\Omega$-os) ellenálláson.

M.8. 26.

M: A 10Ω és 40Ω eredője $R_{12} = \frac{10\Omega \cdot 40\Omega}{10\Omega + 40\Omega} = 8\Omega$.

Az R_{12} és a vele sorba kapcsolt $22\,\Omega$-os ellenállás erdője $30\,\Omega$.

A $30\,\Omega$-os részellenállás és a vele párhuzamos $20\,\Omega$-os ellenállás eredője

$$R_{AB} = \frac{20\Omega \cdot 30\Omega}{20\Omega + 30\Omega} = 12\Omega$$

M.8. 27.

M: 4 különböző áramkör létezik: 26.ÁBRA

Az eredő ellenállások:

R/3, 2R/3, 3R/2, 3R

M.8. 28.

M: 8 különböző eredőjű kapcsolás állítható össze (ha nem zárunk rövidre olyan pontokat, melyek közt ellenállások is vannak) A legnagyobb eredő a három ellenállás soros, a legkisebb pedig a három ellenállás párhuzamos kapcsolásával érhető el.

M.8. 29.

M: A $P = \frac{U^2}{R} = I^2 \cdot R$ összefüggésből $U = \sqrt{P \cdot R}$ ill. $I = \sqrt{\frac{P}{R}}$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Így $U_1 = \sqrt{P_1 \cdot R_1} = \sqrt{40\text{W} \cdot 1000\Omega} = 200\text{V}$ és $U_2 = \sqrt{P_2 \cdot R_2} = \sqrt{60\text{W} \cdot 6000\Omega} = 600\text{V}$,

valamint $I_1 = \sqrt{\frac{P_1}{R_1}} = \sqrt{\frac{40\text{W}}{1000\Omega}} = 0,2\text{A}$ és $I_2 = \sqrt{\frac{P_2}{R_2}} = \sqrt{\frac{60\text{W}}{6000\Omega}} = 0,1\text{A}$

A fogyasztók soros kapcsolása esetén közös az áramerősségük, ezért a két névleges áramerősségből kiválasztjuk a kisebbet: I_2 = 0,1A. A sorosan kapcsolt fogyasztók ellenállása

összeadódik: $R_e = R_1 + R_2$ =7kΩ. A fogyasztókra kapcsolható maximális feszültség:

$U_{max} = I \cdot R$ = 0,1A·7000Ω = 700V

A fogyasztók párhuzamos kapcsolása esetén közös a feszültségük, ezért a két névleges feszültségből kiválasztjuk a kisebbet: U_1 = 200V A párhuzamosan kapcsolt fogyasztók ellenállása: $R_e = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1 \cdot 6}{1+6}\text{k}\Omega = \frac{6}{7}\text{k}\Omega$ =0,86 kΩ. A fogyasztókra kapcsolható maximális áramerősség: $\text{I} = \frac{\text{U}}{\text{R}} = \frac{200\text{V}}{0,86\text{k}\Omega} = 0,233\text{A}$.

M.8. 30.

M: Az A ábrának megfelelő esetben két soros ellenállás eredőjét kell kiszámítani a csúszka szélső helyzeteiben: $R_{AB1} = 40\Omega + 10\Omega = 50\,\Omega$ ill. $R_{AB2} = 40\Omega + 60\Omega = 100\Omega$

Így $50\Omega \le R_{AB} \le 100\Omega$

A B ábrának megfelelő esetben két ellenállás párhuzamos eredőjét kell kiszámítani a csúszka szélső helyzeteiben: $R_{AB1} = \frac{40\Omega \cdot 10\Omega}{40\Omega + 10\Omega} = 8\Omega$ ill. $R_{AB2} = \frac{40\Omega \cdot 60\Omega}{40\Omega + 60\Omega} = 24\Omega$

Így $8\Omega \le R_{AB} \le 24\Omega$

M.8. 31. Két darab 20 Ω -tól 200 Ω -ig változtatható tolóellenállást az ábra szerint kapcsolunk.

Milyen határok között változtatható az *A* és *B* pontok közötti ellenállás az egyes esetekben? 30.A és B ÁBRA

M: A. Mindkét csúszka bal szélső helyzetében két darab 20 Ω -os ellenállást kapcsoltunk sorba, így $R_{AB} = 40\Omega$. A csúszkák jobboldali szélső helyzetében 200 Ω -os ellenállások vannak sorosan kapcsolva, $R_{AB} = 400\Omega$

Tehát $40\Omega \le R_{AB} \le 400\Omega$

B: Mindkét csúszka bal szélső helyzetében két darab 20 Ω -os ellenállást kapcsoltunk párhuzamosan, így $R_{AB} = 10\Omega$. A csúszkák jobboldali szélső helyzetében 200 Ω -os ellenállások vannak párhuzamosan kapcsolva, $R_{AB} = 100\Omega$

Tehát $10\Omega \le R_{AB} \le 100\Omega$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Áramforrások, feszültség- és árammérés

M.8. 32.

M: a. $I = \frac{U}{R} = \frac{18\text{V}}{18\Omega} = 1\text{A}$

b. $I = \frac{U_0}{R+r} = \frac{18\text{V}}{18\Omega + 2\Omega} = 0{,}9\text{A}$

M.8. 33.

M: $R_b = \frac{U_0}{I_{rz}} = \frac{4{,}5\text{V}}{2{,}29\text{A}} \approx 2\Omega$

M.8. 34.

M: $I = \frac{U_0}{R_k + R_b}$ összefüggésből $R_b = \frac{U_0}{I} - R_k = \frac{24\text{V}}{0{,}5\text{A}} - 45\Omega = 3\Omega$

M.8. 35..

M:

	A	*B*	*C*
Feszültségmérő	24V	0V	20V
Áramerősség mérő	0 A	4,8A	0,8A

Az *A* állapot üresjárat, a *B* állapot rövidzárlat.

M.8. 36.

M: $R_e = (n-1) \cdot R_V = 9 \cdot 1\text{k}\Omega = 9\text{k}\Omega$

M.8. 37

M: $R_s = \frac{R_A}{n-1}$ - ből a méréshatár növelése $n = \frac{R_A}{R_s} + 1 = \frac{0{,}5\Omega}{0{,}1\Omega} + 1 = 6$ -szoros.

Az új méréshatár 6A.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

GYAKORLÓ FELADATOK

Áram, áramerősség

M.8. 38.

M: a. Az összes teljesítmény $4\cdot 5\text{W}+2\cdot 55\text{W}=130\text{W}$. Az általuk felvett áram erőssége: $I=\frac{P}{U}=\frac{130\text{W}}{12\text{V}}=10,8\text{A}$. Ekkora áram $\frac{55\text{Ah}}{10,8\text{A}}=5\text{h}$ óra alatt meríti le az akkumulátort.

b. A térfogategységre jutó atomok, ill. vezetési elektronok száma:

$$n=\frac{N_A\cdot\rho}{M}=\frac{6\cdot 10^{23}\frac{1}{\text{mol}}\cdot 8920\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}{0,063\frac{\text{kg}}{\text{mol}}}=8,5\cdot 10^{28}\frac{1}{\text{m}^3}$$ Az elektronok haladási sebessége:

$$v=\frac{I}{Ane}=\frac{200\text{A}}{50\cdot 10^{-6}\text{m}^2\cdot 8,5\cdot 10^{28}\frac{1}{\text{m}^3}\cdot 1,6\cdot 10^{-19}\text{C}}=0,3\frac{\text{mm}}{\text{s}}$$

M.8. 39

M: A napi töltésváltozások $0,1\cdot 500\text{mAh}=50\text{mAh}$, ill.: $0,02\cdot 500\text{mAh}=10\text{mAh}$

Ha a beszélgetés áramfelvétele *b* mA, a készenléti állapoté *k* mA, akkor:

$$-\text{b}-20\text{k}+1\cdot 150=50$$
$$-2\text{b}-10\text{k}+0,6\cdot 150=10$$

Az egyenletrendszer megoldása: *b*=20, és *k*=4

M.8. 40

m: $Q=It=I\frac{s}{v}=I\frac{A}{d\cdot v}=10^{-6}\text{A}\frac{1\text{m}^2}{0,25\text{m}\cdot 0,2\frac{\text{m}}{\text{s}}}=2\cdot 10^{-5}\text{C}$.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Ellenállás, Ohm-törvény

M.8. 41

M: Az eljárás során a huzal keresztmetszete 100-ad részére, a hossza pedig 100-szorosára nőtt, így az ellenállása $100 \cdot 100 = 10000$ -szeresére nő.

M.8. 42.

M: A fűtőszál ellenállása szobahőmérsékleten: $R_0 = \frac{U}{I} = \frac{230\text{V}}{1{,}5\text{A}} = 153\Omega$

Ellenállása 640 °C-on: $R = R_0(1+\alpha\Delta t) = 153\Omega(1 + 2{,}5 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{K}} \cdot 620\text{K}) = 177\Omega$.

Áramfelvétele ezen a hőmérsékleten: $I = \frac{U}{R} = \frac{230\text{V}}{177\Omega} = 1{,}3\text{A}$

M.8. 43.

M. Az új ellenállás: $R = \frac{U}{I} = \frac{230\text{V}}{0{,}26\text{A}} = 880\Omega$

Az $R = R_0(1+\alpha\Delta t)$ összefüggésben: $880\Omega = 66\Omega(1+4{,}8 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{K}} \Delta t)$ Ebből $\Delta t = 2570\text{K}$

A volfrámszál üzemi hőfoka kb. 2600°C .

M.8. 44.

M: Az x távolságban történt zárlat helyéig a vezeték ellenállása egyrészt

$R = \frac{U}{I} = \frac{8\text{V}}{0{,}03\text{A}} = 267\Omega$, másrészt: $R = \rho\frac{2x}{A} = 1{,}7 \cdot 10^{-8}\Omega\text{m}\frac{2x}{0{,}5 \cdot 10^{-6}\text{m}^2} = 6{,}8 \cdot 10^{-2}\frac{\Omega}{\text{m}}x$.

A két érték egyenlőségéből $x = 3920\text{m}$

A zárlat megszűntetése után az áramkörbe kapcsolt vezeték hossza és így ellenállása is $\frac{15000\text{m}}{3920\text{m}} = 3{,}8$ -szorosára nő, az árammérő által mért áramerősség pedig ugyanennyied részére csökken: $I_2 = \frac{30\text{mA}}{3{,}8} = 7{,}8\text{mA}$

M.8. 45. M:

$Q = C \cdot U = C \cdot I \cdot R_1 = C \cdot \frac{U}{R_1 + R_2} \cdot R_1 = 500\mu\text{F} \cdot \frac{24\text{V}}{200\Omega + 400\Omega} \cdot 200\Omega = 8\text{V} \cdot 5 \cdot 10^{-4}\text{F} = 4 \cdot 10^{-3}\text{C}$.

M.8. 46*.

a. az *A* és *B*

b. *A* és *C*

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

c. *B* és *C* pontok között?

M: a. Az ellenállások egyenlősége miatt $U_{AB}=\frac{U}{2}$

b. A kapacitások egyenlősége miatt $U_{AC}=\frac{U}{2}$

c. A fentiek miatt $U_{BC}=U_{AB}-U_{AC}=0$

M.8. 47.*

M: A 100 Ω -os ellenálláson eső feszültség- a két ellenállás arányából-: $U_1=\frac{60\text{V}}{3}=20\text{V}$

A sorba kapcsolt kondenzátorok eredő kapacitása: $C_e=\frac{C_1\cdot C_2}{C_1+C_2}=\frac{200\cdot 300}{200+300}\mu\text{F}=120\mu\text{F}$

A kondenzátorok töltése: $Q=C_e\cdot U=120\mu\text{F}\cdot 60\text{V}=7{,}2\cdot 10^{-3}\text{C}$.

A 200 μF kapacitású kondenzátor feszültsége: $U_1'=\frac{Q}{C_1}=\frac{7{,}2\cdot 10^{-3}\text{C}}{200\cdot 10^{-6}\text{F}}=36\text{V}$

Az *A* és *B* pontok közötti feszültség. $U_{AB}=\left|U_1-U_1'\right|=\left|20\text{V}-36\text{V}\right|=16\text{V}$

b. A kapcsoló zárásakor megváltozik a kondenzátorok feszültsége és töltése.
A párhuzamos kapcsolás miatt a kondenzátorok feszültsége a megfelelő ellenállásával lesz egyenlő: $U_1''=U_1=20\text{V}$ és $U_2''=U_2=40\text{V}$.
A megfelelő töltések: $Q_1''=C_1\cdot U_1''=200\mu\text{F}\cdot 20\text{V}=4\cdot 10^{-3}\text{C}$ és
$Q_2''=C_2\cdot U_2''=300\mu\text{F}\cdot 40\text{V}=12\cdot 10^{-3}\text{C}$
A kapcsolón záráskor áthaladó töltés: $Q=Q_2''-Q_1''=8\cdot 10^{-3}\text{C}$.

M.8. 48

M: a. Az izzó ellenállása $R=\frac{U^2}{P}=\frac{(12\text{V})^2}{4\text{W}}=36\Omega$ .Az A és C pontok közötti ellenállás a potencióméter ellenállásának fele és az izzó ellenállásának párhuzamos eredője:

$\text{R}_{\text{AC}}=\frac{40\cdot 36}{40+36}\Omega=19\Omega$

Az izzóra jutó feszültség: $U_{AC}=U_0\frac{R_{AC}}{R_{AB}}=U_0\frac{R_{AC}}{R_{AC}+R_{CB}}=24\text{V}\cdot\frac{19\Omega}{19\Omega+40\Omega}=7{,}7\text{V}$

Az izzó teljesítménye: $P_1=\frac{U_{AC}^2}{R_1}=\frac{(7{,}7\text{V})^2}{36\Omega}=1{,}6\text{W}$, ez a névleges teljesítménynek mindössze $\frac{1{,}6\text{W}}{4\text{W}}=40\%$-a (feltéve, hogy az izzószál ellenállása csak elhanyagolható mértékben függ a hőmérséklettől).

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

b. A csúszkát a középállásától jobbra, tehát a potenciométer *B* vége felé mozgatva az izzóra
nagyobb feszültség esik.
Ha a csúszkát addig mozgatjuk, hogy $R_{AC} = R_{BC}$ teljesüljön, akkor az izzóra éppen 12V feszültség jut. Ha a 80 Ω -os potenciométernek a 36 Ω -os izzóval párhuzamosan kapcsolt
része R_X , akkor $\frac{36\Omega \cdot R_X}{36\Omega + R_X} = 80\Omega - R_X$. Az egyenlet pozitív gyöke: $R_X = 58\ \Omega$.
Tehát a csúszkát a *B* pont felé mozgatva a potenciométert 58 Ω és 22 Ω ellenállású részekre osztjuk.

Az áram munkája és hőhatása. Vegyi hatás

M.8. 49.

M. $W_1 = \frac{U^2}{R} \cdot t$, $W_2 = \frac{(1{,}045U)^2}{R} \cdot t = \frac{1{,}09U^2}{R} \cdot t = 1{,}09W_1$

Azonos ellenálláson ugyanannyi idő alatt a fogyasztás 9%-kal nő,
A hálózati feszültség 4,5%-os növelése nem okozott a fentiek alapján várt 9%-os fogyasztásnövekedést. Az előbb feltételeztük, hogy azonos ideig használjuk a megemelt
feszültségű hálózatot. A felhasznált elektromos energiának melegítésre (fűtés, vasalás, vízmelegítés) fordított hányada nem változik. Az elektromos vízmelegítő például hamarabb éri el a beállított hőfokot, és akkor kikapcsol. Tehát rövidebb ideig üzemel magasabb feszültség esetén. A háztartási fogyasztás jelentős részét éppen a melegítő készülékek adják.

M.8. 50.

M. A soros kapcsolás miatt, az ellenállások arányát kell kiszámítani:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{l_1}{l_2} \cdot \frac{A_2}{A_1} = \frac{5{,}4 \cdot 10^{-8}\,\Omega\text{m}}{1{,}7 \cdot 10^{-8}\,\Omega\text{m}} \cdot 10 \cdot 400 = 12700$$

M.8. 51.

M: A térfogategységre eső teljesítmény:

$$\frac{P}{V} = \frac{I^2 R}{Al} = \frac{I^2 \rho \frac{l}{A}}{Al} = I^2 \frac{\rho}{A^2} = (7{,}5\text{A})^2 \frac{1{,}69 \cdot 10^{-8}\,\Omega\text{m}}{(0{,}5 \cdot 10^{-6})^2\,\text{m}^2} = 3{,}8 \cdot 10^6 \frac{\text{W}}{\text{m}^3}$$.

Megjegyzés: Ha ilyen vékony vezetéken 7,5 A áramot engedünk át, akkor a vezeték jelentős mértékben melegszik. Egy köbméter rézből kétezer kilométer ilyen vezeték készülhet, és ez az irdatlan hossz magyarázza a 3,8 MW fűtőteljesítményt.

M.8. 52.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M: $m = kIt = 0{,}0932\ \text{mg/C} \cdot 30\text{kA} \cdot 24 \cdot 3600\text{s} = 240\text{kg}$

Az elektromos energia: $W = UIt = 6\text{V} \cdot 30\text{kA} \cdot 24\text{h} = 4320\text{kWh}$. Kilogrammonként:

$$\frac{4320\text{kWh}}{240\text{kg}} = 18\frac{\text{kWh}}{\text{kg}}.$$

M.8. 53

Mennyi ideig tart a bevonat készítése, ha az elektrolizáló áram erőssége 10 A?

M: Az *s* vastagságú krómréteg tömege:

$$m = \rho V = \rho 2r^2\pi s = \rho 2r^2\pi s = 7190\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 2 \cdot (5 \cdot 10^{-2}\text{m})^2\pi \cdot 25 \cdot 10^{-6}\text{m} = 2{,}82 \cdot 10^{-3}\text{kg}$$

Az $m=kIt$ összefüggésből $t = \frac{m}{kI} = \frac{2{,}82 \cdot 10^3\text{mg}}{0{,}1797\frac{\text{mg}}{\text{C}} \cdot 10\text{A}} = 26\,\text{min}$.

Fogyasztók kapcsolása

M.8. 54*.

M: a. Soros kapcsolás esetén a teljesítmények aránya a $P = I^2 \cdot R$ összefüggés alapján megegyezik az ellenállások arányával: $P_1 : P_2 = 1:2$

b. Párhuzamos kapcsolás esetén a $P = \frac{U^2}{R}$ összefüggés alapján a fogyasztók teljesítménye fordítottan arányos az ellenállásukkal. $P_1 : P_2 = 2:1$

c. Ha a fogyasztók ellenállása *R* és 2*R*, akkor eredőjük soros kapcsoláskor 3*R*, párhuzamos kapcsoláskor $\frac{2}{3}R$. A két áramkör teljesítményének aránya a $P = \frac{U^2}{R_e}$ összefüggés szerint az eredő ellenállások arányának reciproka:

$$\frac{P_{soros}}{P_{párhuzamos}} = \frac{R_{párhuzamos}}{R_{soros}} = \frac{2}{9},$$

vagyis párhuzamos kapcsoláskor négy és félszer nagyobb a teljesítmény.

M.8. 55.

M: Az $R_1 + R_2 = 50\Omega$ és $\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = 8\Omega$ egyenletrendszer megoldásai. $R_1 = 40\Omega$ és $R_2 = 10\Omega$

M.8. 56*.

M: Az alsó három ellenállás eredője legyen *X*. Így $\frac{1}{12\Omega} = \frac{1}{20\Omega} + \frac{1}{X}$ Ebből X=30 Ω

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Vagyis $30\Omega = 22\Omega + \frac{40\Omega R}{40\Omega + R}$ Ebből R=10 Ω.

M.8. 57*.

M: Kiszámítjuk az *R*1 és *R*2 ellenállások eredőjét mindkét esetben az $I = \frac{U_0}{R_k + R_b}$ összefüggésből $1,2\text{A} = \frac{24\text{V}}{R_{k1} + 2\Omega}$ ill. $4\text{A} = \frac{24\text{V}}{R_{k2} + 2\Omega}$ Ezekből $R_{k1} = 18\,\Omega$ és $R_{k2} = 4\,\Omega$

Ezek soros, illetve párhuzamos eredők, tehát: $R_1 + R_2 = 18\Omega$ ill. $\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 4\Omega$

Az egyenletrendszer megoldása: $R_1 = 12\Omega$ és $R_2 = 6\Omega$

M.8. 58.*

M: Nő az áramkör eredő ellenállása, csökken a feszültségforrás terhelése, nő az épen maradt izzóra jutó feszültség, nő a teljesítménye.

A két párhuzamosan kapcsolt izzó eredő ellenállása $\frac{R}{2}$. Az áramkör főágának áramerőssége: $I_0 = \frac{U_0}{\frac{R}{2} + R_b} = \frac{U_0}{\frac{R}{2} + \frac{R}{10}} = \frac{5U_0}{3R}$. Egy izzón átfolyó áram ennek a fele, így a teljesítménye: $P_1 = \left(\frac{5U_0}{6R}\right)^2 \cdot R = \frac{25U_0^2}{36R}$

Egy működő izzó esetén ennek áramerőssége $I = \frac{U_0}{R + R_b} = \frac{U_0}{\frac{11}{10}R}$, ill. teljesítménye:

$P_2 = \left(\frac{U_0}{\frac{11}{10}R}\right)^2 \cdot R = \frac{100U_0^2}{121R}$. A két teljesítmény aránya $\frac{P_2}{P_1} = \frac{\frac{100U_0^2}{121R}}{\frac{25U_0^2}{36R}} = \frac{144}{121} = 1,19$

19%-kal nagyobb fényerővel ég az épen maradt izzó.

Áramforrások, feszültség és árammérés

M.8. 59*.

M: A kapocsfeszültség függése a terhelőáramtól $U_k = U_0 - I \cdot R_b$

Esetünkben: $3,9\text{V} = U_0 - 0,4\text{A} \cdot R_b$ és

$3,6\text{V} = U_0 - 0,6\text{A} \cdot R_b$ Az egyenletrendszer megoldása. $U_0 = 4,5\text{V}$ és

$R_b = 1,5\Omega$

M.8. 60.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M: a. Sorba kapcsolt elemek elektromotoros ereje és belső ellenállása is összeadódik: 6 V-os 1,6 Ω belső ellenállású telepet kapunk. A telep rövidzárási árama ezek hányadosa: 3,75 A.

b. Párhuzamos kapcsolás esetén 1,5V-os $0{,}1\,\Omega$ belső ellenállású telepet kapunk. Rövidzárási áram: 15A

c. Vegyes kapcsolás esetén 3V-os, $0{,}4\,\Omega$ belső ellenállású telepet kapunk.

$I_{rz} = 7{,}5\text{A}$

M.8. 61

M:

Az A jelű áramkör eredő ellenállása

$R_e = \frac{30 \cdot 900}{30+900}\Omega + 10\Omega = 39\Omega$. Az áramerősség: $I = \frac{U}{R_e} = \frac{9\text{V}}{39\Omega} = 0{,}23\text{A}$ A feszültségmérő által jelzett érték: $U = \frac{30 \cdot 900}{30+900}\Omega \cdot 0{,}23\text{A} = 6{,}67\text{V}$

A *B* jelű áramkörben a feszültségmérő által jelzett érték: 9V. Az ampermérőn átfolyó áram erőssége: $I = \frac{9\text{V}}{40\Omega} = 0{,}225\text{A}$

$R_0 = 30\Omega$ esetén	Voltmérő által mért érték (U)	Ampermérő által mért érték (I)	$R = \frac{U}{I}$	$\frac{\lvert R - R_0 \rvert}{R_0}$
A áramkör	6,67V	0,23A	$29\,\Omega$	0,033=3,3%
B áramkör	9V	0,225A	$40\,\Omega$	0,333=33,3%

A fenti számítást megismételve a $600\,\Omega$-os ellenállással:

$R_0 = 600\Omega$ esetén	Voltmérő által mért érték (U)	Ampermérő által mért érték (I)	$R = \frac{U}{I}$	$\frac{\lvert R - R_0 \rvert}{R_0}$
A áramkör	8,64V	0,024A	$360\,\Omega$	0,4=40%
B áramkör	9V	0,015A	$610\,\Omega$	0,017=1,7%

Következtetés: Az ampermérő ellenállásával összemérhető ellenállást az *A* jelű, a voltmérőével összemérhetőt a *B* jelű áramkörben érdemes mérni. Megjegyezzük azonban, hogy a modern (és olcsó) voltmérők belső ellenállása manapság 10 MΩ és 20 MΩ közötti érték, így a gyakorlatban mindig az *A* jelű kapcsolás ajánlott.

M.8. 62*.

M: a. A kondenzátorral sorosan kapcsolt ellenálláson nem folyik áram, a másikon $I = \frac{U}{R} = \frac{3\text{V}}{100\Omega} = 30\text{mA}$.

b. A kapcsoló átkapcsolásának pillanatában a kondenzátor elkezd feltöltődni, mindkét ellenálláson 30mA áram folyik.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

a. Hosszú idővel a kapcsoló átkapcsolása után a helyzet megegyezik a kapcsoló átkapcsolása előttivel.

Tesztek

M.8. 63. Egy kapcsolásban két fogyasztó található. Jelölje meg a HAMIS állítást!

A kapcsolás eredő ellenállása lehet

A) kisebb mindkét fogyasztó ellenállásánál.
B) nagyobb a nagyobb fogyasztó ellenállásánál.
C) a két ellenállás számtani közepe.
D) az egyik ellenállás kétszerese.

M: C. Az eredő nem lehet a két fogyasztó ellenállása között.

M.8. 64. Két azonos ellenálláshuzalt egyszer sorosan, egyszer pedig párhuzamosan kapcsolunk ugyanarra a feszültségforrásra, ugyanannyi ideig.

Melyik esetben melegszenek fel jobban a huzalok?

Válasszuk ki a jól indokolt helyes választ!

A) Ha sorba kötjük őket, mert ilyenkor a két huzalban keletkezett hő összeadódik

B) Ha párhuzamosan kötjük őket, mert ilyenkor lesz az áramkör eredő ellenállása kisebb.

C) Ugyanannyira, mert a keletkezett hő az egyes huzalok ellenállásától függ.

D) Ha párhuzamosan kötjük őket, mert ilyenkor az egyes huzalok egymást is melegítik

M: B.

M.8. 65. Két különböző ellenállású fogyasztót sorosan kapcsoltunk.

Melyik fogyasztónak nagyobb a teljesítménye? Melyik a jó válasz és indoklás?

A) A kisebb ellenállásnak, mert a kisebb ellenálláson nagyobb áram folyik

B) Egyenlő a két ellenállás teljesítménye, mivel ugyanakkora áram folyik át rajtuk.

C) A nagyobb ellenállásnak, mert soros kapcsolás esetén nagyobb ellenálláson nagyobb a feszültség.

D) A nagyobb ellenállásnak, mert nagyobb ellenállásnak mindig nagyobb a teljesítménye.

M. C

M.8. 66. Két különböző ellenállású fogyasztót párhuzamosan kapcsoltunk.

Melyik fogyasztónak nagyobb a teljesítménye? Melyik a jó válasz és indoklás?

A) A kisebb ellenállásnak, mert a kisebb ellenálláson nagyobb áram folyik

B) Egyenlő a két ellenállás teljesítménye, mivel ugyanakkora a feszültségük.

C) A kisebb ellenállásnak, mert párhuzamos kapcsolás esetén a kisebb ellenálláson nagyobb a feszültség.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

D) A nagyobb ellenállásnak, mert nagyobb ellenállásnak mindig nagyobb a teljesítménye.
M. A

M.8. 67. Újabb fogyasztó bekapcsolásakor hogyan változik meg egy elektromos hálózat főágában folyó áram erőssége?

A) Az áramerősség nő, mert az újabb fogyasztó bekapcsolásakor az eredő ellenállás csökken.
B) Az áramerősség nem változik, mert az áramszolgáltató által leadott teljesítmény és áramerősség a hálózatban állandó
C) Az áramerősség növekszik, mert az újabb fogyasztó bekapcsolásakor az eredő ellenállás nő.
D) Az áramerősség csökken, mert az újabb fogyasztó bekapcsolásakor az eredő ellenállás nő.
M: A

M.8. 68. Egy áramkör két sorosan kapcsolt ellenálláshuzala azonos anyagú, de különböző hosszúságú és keresztmetszetű. Melyikben fejlődik több hő, ha feszültséget kapcsolunk a vezeték két végére? Jelöljük meg a helyes választ!

A) A kisebb keresztmetszetű részben, mert egy vékonyabb vezeték mindig jobban melegszik mint egy vastag.
B) A hosszabb részben, mert annak nagyobb az ellenállása
C. A hosszúság és keresztmetszet arányok ismerete nélkül a kérdés nem válaszolható meg.
D.A két részben ugyanannyi hő fejlődik, mert azonos az anyaguk
M: C

M.8. 69. Egy nem elhanyagolható belső ellenállású feszültségforrásra változtatható

ellenállást kapcsolunk. Hogyan változik a feszültségforrás kapocsfeszültsége, ha a külső ellenállást növeljük?
A) A kapocsfeszültség csökken.
B) A kapocsfeszültség állandó marad.
C) A kapocsfeszültség növekszik.
D) A kapocsfeszültség egy bizonyos értékig növekszik, majd csökken
M: C Nagyobb külső ellenállás esetén kisebb az áramforrás terhelése (árama), kisebb a belső ellenálláson eső feszültség

M.8. 70. Párhuzamosan kapcsolt izzók egyike kiég. Hogyan változik a másik izzó fényereje (teljesítménye), ha az áramforrás belső ellenállása nulla?

A. Nem változik

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

B. Csökken
C. Nő
D. A másik izzó is rögtön kiég

M: A. Ugyanakkora feszültséget kap a másik izzó

M.8. 71. Párhuzamosan kapcsolt izzók egyike kiég. Hogyan változik a másik izzó fényereje (teljesítménye), ha az áramforrás belső ellenállása nem nulla?

A. Nem változik.
B. Csökken.
C. Nő.
D. A másik izzó is rögtön kiég.

M: C. Nő az áramkör eredő ellenállása, csökken a feszültségforrás terhelése, nő a kapocsfeszültség

M.8. 72. Az amper- és voltmérő műszerekre vonatkozó állítások közül keressük meg az igazat!

A. Mindkét műszer akkor mér pontosan, ha kicsi az ellenállása.
B. Mindkét műszer akkor mér pontosan, ha nagy az ellenállása.
C. Akkor mérnek pontosabban, ha az ampermérő ellenállása kicsi, a voltmérőé nagy.
D. Akkor mérnek pontosabban, ha a voltmérő ellenállása kicsi, az amperérőé nagy.

M: C

M.8. 73. Két azonos névleges feszültségű, de különböző teljesítményű izzó ellenállását hasonlítjuk össze. Válasszuk ki a helyes állítást!

A. Az azonos néveleges feszültség miatt, Ohm törvénye miatt az ellenállásuk is egyenlő.
B. Csak a konkrét numerikus adatok ismeretében lehet választ adni.
C. A nagyobb teljesítményűnek kisebb az ellenállása.
D. A nagyobb teljesítményűnek nagyobb az ellenállása.

M: C ($P = \frac{U^2}{R}$)

M.8. 74. Az ábra szerinti áramkörbe épített kapcsolók zárásakor változik a műszer által jelzett áramerősség. Válasszuk ki a HIBÁS mondatot!

A, Bármely kapcsoló zárása esetén nő az áramerősség.
B. Az áramkörben mindenképpen folyik áram, melynek erőssége nem függ a kapcsolók helyzetétől.
C. Legerősebb áram mindkét kapcsoló zárt állapota esetén folyik.
D: Az 1. kapcsoló bekapcsol egy ellenállást, a 2. kiiktat egyet.

M:B

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.8. 75.. Áramforrásra vonatkozó állítások közül válasszuk ki a HIBÁSAT!

A, Az áramforrás kapcsainak rövidre zárása esetén a kapocsfeszültség nulla.
B. Ha növeljük egy áramforrás terhelését (áramát), akkor a kapocsfeszültség is nő.
C. Terheletlen áramforrás sarkain az üresjárási feszültséget mérhetjük.
D Sorosan kapcsolt áramforrások belső ellenállása összeadódik.
M: B (Nem nő, csökken)

M.8. 76. Melyik igaz az alábbi állítások közül?

A) Az ugyanolyan hosszúságú rézhuzalok közül a kisebb keresztmetszetű ellenállása a nagyobb.
B) Az ugyanolyan hosszúságú rézhuzalok közül a feleakkora keresztmetszetű ellenállása négyszer kisebb.
C) A rézhuzal ellenállása a keresztmetszetével egyenesen arányos.
D) A rézhuzal ellenállása az átmérőjével fordítottan arányos.
M: A

M.8. 77. Félvezetőkre vonatkozó állítások közül válasszuk ki a HAMISAT

A) Vezetőképességük a szigetelőké és a vezetőké között van.
B) Ellenállásuk hőfokfüggése a fémekével ellentétes.
C) Belőlük épül fel az egyenirányító dióda, a tranzisztor, tirisztor, LED, fotodióda.
D) A félvezető kristályba beépített idegen atomok csökkentik vezetőképességét
M: D. A szennyező atomok növelik a félvezető vezetőképességét

EGYENÁRAM ESSZÉK

M.8. 78. *Elektromos áram, áramerősség, Ohm törvénye*

Az elektromos áram, áramerősség, áramirány. Az áram hatásai. Adott ellenálláshuzal esetén a feszültség-áramerősség kapcsolat és diagram. Ohm törvénye. Az ellenállás fogalma. Fémes vezetők ellenállása. Az ellenállás hőmérséklet függése.(E)

M.8. 79. *Fogyasztók kapcsolása.*

Soros és párhuzamos kapcsolás fogalma. Feszültség ás áramerősség viszonyok soros és párhuzamos kapcsolás esetén. Eredő ellenállás. Vegyes kapcsolások eredő ellenállása. Sorosan és párhuzamosan kapcsolt fogyasztók teljesítményének kiszámítása.

M.8. 80. Áramforrások

A teljes áramkör modellezése; elektromotoros erő, belső ellenállás, kapocsfeszültség fogalma.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Terhelt és terheletlen áramforrás. Ohm törvénye a teljes áramkörre. Rövidzárlat. Kapocsfeszültség-áramerősség kapcsolat és diagram. Sorosan kapcsolt feszültségforrások.
Használt galvánelemek és akkumulátorok kezelésének környezetvédelmi szempontjai.

KIHÍVÁST JELENTŐ FELADATOK

M.8. 81

M: U feszültség esetén R ellenálláson R_A ellenállású műszerrel mért I áramerősség közötti összefüggés: $I = \frac{U}{R + R_A}$. Fontos gondolat, hogy a műszerre I_0 végkitérés esetén mindig ugyanannyi U_0 feszültség esik. $U_o = R_A \cdot I_0$

Numerikusan: $1,4\text{mA} = \frac{U}{R + R_{A1}}$, $1,47\text{mA} = \frac{U}{R + R_{A2}}$, és $R_{A1} \cdot 2\text{mA} = R_{A2} \cdot 20\text{mA}$. Amit keresünk: $I = \frac{U}{R}$. Az egyenletrendszer megoldása I=1,48mA

M.8. 82*.

M: Az olvadószálban fejlődő hő egyenlő a palástja mentén leadott hővel. A leadott hő a palást területével arányos; az arányossági tényező egy hőmérséklettől függő $C(t)$ mennyiség: $I^2 \cdot R = P \cdot C(t)$ Kifejtve: $I^2 \cdot \rho \frac{l}{r^2\pi} = 2r\pi \cdot l \cdot C(t)$ Rendezve: $I^2 = \frac{2r^3\pi^2 \cdot C(t)}{\rho}$

A két esetben azonos az olvadási hőmérséklet miatt a fajlagos ellenállás és a $C(t)$ mennyiség. Vagyis az olvadási áram a sugár (és átmérő) 3/2-ik hatványával arányos.
$I_2 = I_1 \cdot 2^{1,5} = 6,4\text{A} \cdot 2^{1,5} = 18.1\text{A}$

M. 8.83*.

M: a. A kiegyenlített Wheatstone-féle mérőhídban az ampermérőn nem folyik áram, akkor $\frac{R}{20\Omega} = \frac{60\Omega}{40\Omega}$ Ebből $R = 30\Omega$

b. A kapcsolás eredő ellenállása: $R_e = \frac{90\Omega \cdot 60\Omega}{90\Omega + 60\Omega} = 36\Omega$ Így a főágban folyó áram erőssége:

$I = \frac{U}{R_e} = \frac{24\text{V}}{36\Omega} = 0,67\text{A}$

a. ÁBRA

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Az áramkör eredő ellenállása: $\frac{40\Omega \cdot 60\Omega}{40\Omega + 60\Omega} + \frac{20\Omega \cdot 80\Omega}{20\Omega + 80\Omega} = 24\Omega + 16\Omega = 40\Omega$

A főág áramerőssége: $I_e = \frac{U}{R} = \frac{24\text{V}}{40\Omega} = 0,6\text{A}$ 82 M ÁBRA

Az ábra szerinti áramerősségek esetén az *A* ill. *B* pontra felírt csomóponti törvény:

$I_1 + I_2 = 0,6\text{A}$ ill. $I_3 + I_4 = 0,6\text{A}$

A bal- és jobboldali hurokra felírt huroktörvény: $40\Omega I_1 - 60\Omega I_2 = 0$, illetve

$20\Omega I_3 - 80\Omega I_4 = 0$. Négy egyenlet négy ismeretlennel.

Megoldás: $I_1 = 0,36\text{A}$ $I_2 = 0,24\text{A}$ $I_3 = 0,48\text{A}$ $I_4 = 0,12\text{A}$

A *C* pontra felírt csomóponti törvény alapján az ampermérőn átfolyó áram 0,12A.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

9. FEJEZET: REZGÉSEK ÉS HULLÁMOK

ALAPOZÓ FELADATOK

PERIODIKUS JELENSÉGEK, REZGÉSEK LEÍRÁSA

M.9.1.

Adatok: $T_1 = 60$ s, $T_2 = 3\,600$ s, $T_3 = 43\,200$ s.

$f = 1/T$

$$f_1 = \frac{1}{60}\,\frac{1}{\text{s}},\quad f_2 = \frac{1}{3600}\,\frac{1}{\text{s}},\quad f_3 = \frac{1}{43200}\,\frac{1}{\text{s}}.$$

M.9.2.

Adatok: $T_1 = T_2 = 365{,}26$ nap, kb. $T_3 = T_4 = 29{,}5$ nap.

$$f_1 = f_2 = \frac{1}{365{,}26\ \text{nap}} \approx 3{,}1\cdot 10^{-8}\ \frac{1}{\text{s}}$$

$$f_3 = f_4 = \frac{1}{29{,}5\ \text{nap}} \approx 3{,}9\cdot 10^{-7}\ \frac{1}{\text{s}}$$

M.9.3.

Adatok: $f = 600\,\frac{1}{\text{min}} = 10\,\frac{1}{\text{s}}$

$T = 1/f = 0{,}1$ s

M.9.4.

Adatok: $f = 12\,000\,\frac{1}{\text{min}} = 200\,\frac{1}{\text{s}}$, $2\cdot A = 120$ mm $= 0{,}12$ m.

Másodpercenként 200 teljes rezgést végez a dugattyú, egy teljes rezgés $4A$ út megtételével jár. A dugattyú által megtett út 1 másodperc alatt:

$s = 200\cdot 4A = 400\cdot 2A = 400\cdot 0{,}12\ \text{m} = 48\ \text{m}$.

M.9.5.

Adatok: $D = 20$ N/m, $m = 0{,}1$ kg, $y = 0{,}05$ m

a) Az egyensúlyi helyzetben a testre ható erők (nehézségi, rugalmas) eredője nulla.

$$D\cdot y_0 = m\cdot g \Rightarrow y_0 = \frac{mg}{D} = 5\ \text{cm}$$

b) A testre ható erők eredője, midőn a testet az egyensúlyi helyzetből y távolságra mozgatjuk felfelé:

$$\sum F = mg - D\cdot(\Delta l_0 + y) = mg - D\cdot\Delta l_0 - D\cdot y = -D\cdot y$$

(A lefelé mozgatás hasonló eredményre vezetne.)

c) $A = y_{\text{max}} = 5$ cm.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Harmonikus rezgőmozgás kinematikai leírása (6 feladat)

M.9.6.

Adatok: R = 0,5 m, t = 20 s, k = 10.

a) A gömb árnyéka a falon harmonikus rezgőmozgást végez.

b) $T = \frac{t}{k} = 2\ \text{s}$, $f = \frac{1}{T} = 0{,}5\ \text{Hz}$

c) $A = R = 0{,}5\ \text{m}$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = 3{,}14\ \frac{1}{\text{s}}$

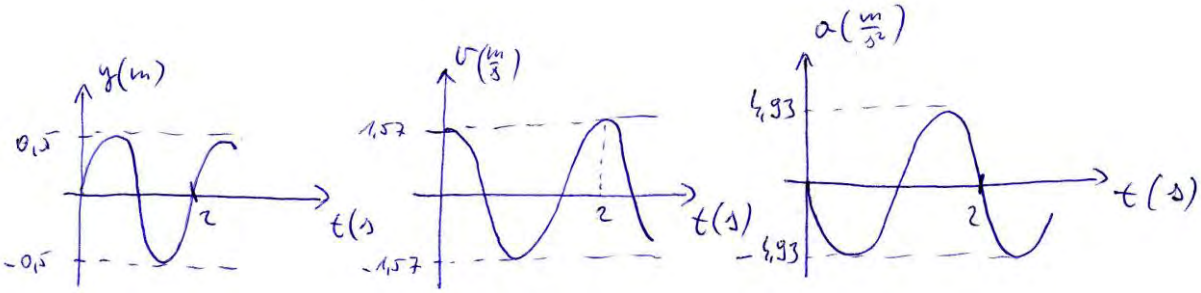
d)

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t) = 0{,}5\ \text{m} \cdot \sin\left(3{,}14\ \frac{1}{\text{s}} \cdot \text{t}\right)$$

$$v(t) = A\omega \cdot \cos(\omega \cdot t) = 1{,}57\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \cos\left(3{,}14\ \frac{1}{\text{s}} \cdot \text{t}\right)$$

$$a(t) = -A\omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t) = -4{,}93\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \sin\left(3{,}14\ \frac{1}{\text{s}} \cdot \text{t}\right)$$

e)



M.9.7.

Adatok: A = 0,1 m, T = 0,6 s.

a)

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 10{,}47\ \frac{1}{\text{s}}$$

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t) = 0{,}1\ \text{m} \cdot \sin\left(10{,}47\ \frac{1}{\text{s}} \cdot \text{t}\right)$$

$$v(t) = A\omega \cdot \cos(\omega \cdot t) = 1{,}047\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \cos\left(10{,}47\ \frac{1}{\text{s}} \cdot \text{t}\right)$$

$$a(t) = -A\omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t) = -10{,}97\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \sin\left(10{,}47\ \frac{1}{\text{s}} \cdot \text{t}\right)$$

b)

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t) = 0{,}1\ \text{m} \cdot \sin\left(10{,}47\ \frac{1}{\text{s}} \cdot \text{t}\right)$$

$$0{,}08\ \text{m} = 0{,}1\ \text{m} \cdot \sin\left(10{,}47\ \frac{1}{\text{s}} \cdot \text{t}\right)$$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$$\sin\left(10{,}47\,\frac{1}{\text{s}}\cdot \text{t}\right)=0{,}8 \Rightarrow 10{,}47\,\frac{1}{\text{s}}\cdot t=0{,}927 \Rightarrow t=0{,}088\,\text{s}$$

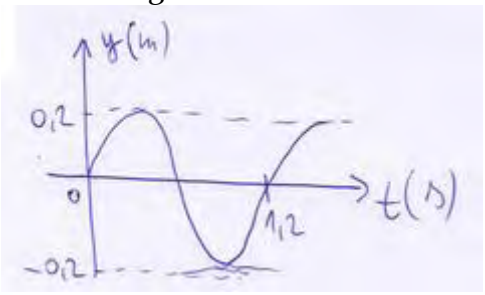
c)

$$v(t=0{,}4\,\text{s})=A\omega\cdot\cos(\omega\cdot t)=1{,}047\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot\cos\left(10{,}47\,\frac{1}{\text{s}}\cdot 0{,}4\,\text{s}\right)=-0{,}52\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$a(t=0{,}4\,\text{s})=-A\omega^2\cdot\sin(\omega\cdot t)=-10{,}97\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot\sin\left(10{,}47\,\frac{1}{\text{s}}\cdot 0{,}4\,\text{s}\right)=0{,}95\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

M.9.8.

Adatok: A grafikonról leolvasható: A = 0,2 m, T = 1,2 s.

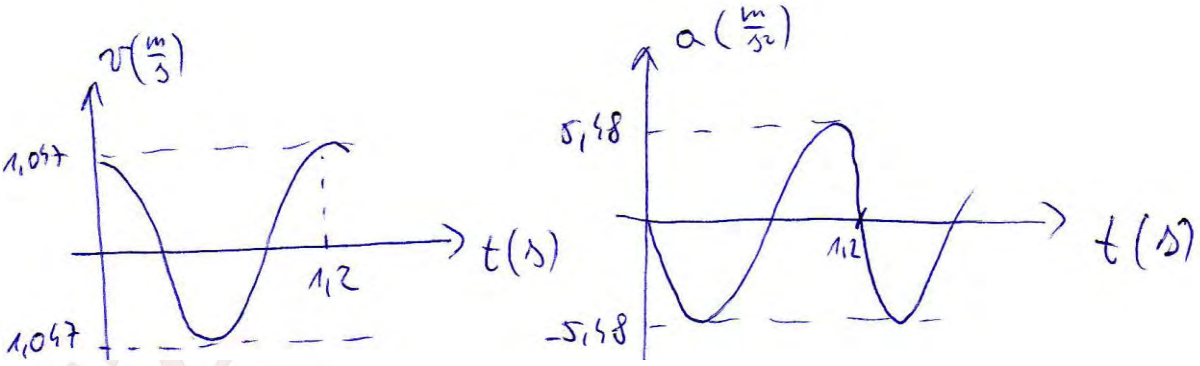


a) T = 1,2 s, $v_{\text{max}}=A\cdot\omega=A\cdot\dfrac{2\pi}{T}=1{,}047\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$

b) $\omega=\dfrac{2\pi}{T}=5{,}23\,\dfrac{1}{\text{s}}$

$$v(t)=A\omega\cdot\cos(\omega\cdot t)=1{,}047\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot\cos\left(5{,}23\,\frac{1}{\text{s}}\cdot \text{t}\right)$$

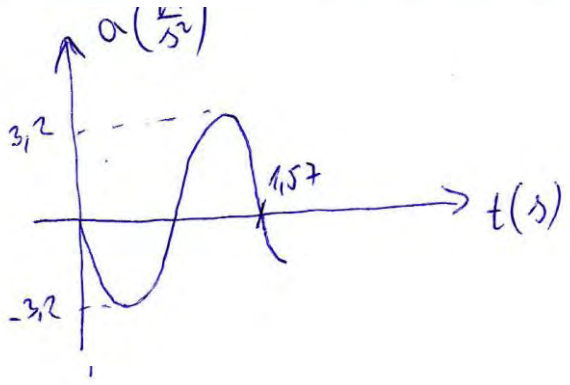
$$a(t)=-A\omega^2\cdot\sin(\omega\cdot t)=-5{,}48\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot\sin\left(5{,}23\,\frac{1}{\text{s}}\cdot \text{t}\right)$$

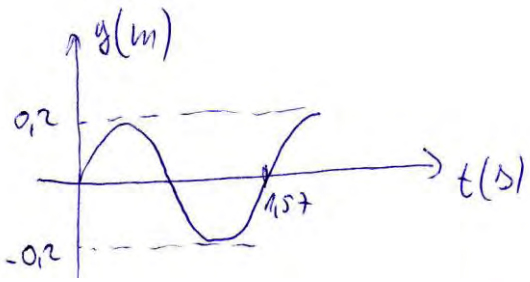


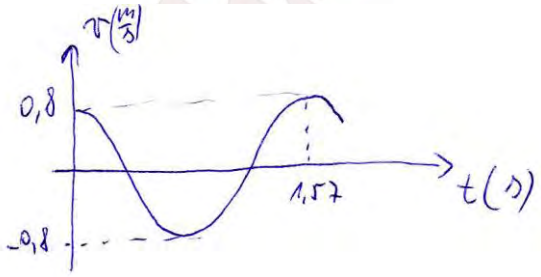
M.9.9.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT







M.9.10.

Adatok: $f = 12\,000\,\frac{1}{\text{min}} = 200\,\frac{1}{\text{s}}$, $2 \cdot A = 120\ \text{mm} = 0{,}12\ \text{m}$.

$\omega = 2\pi \cdot f = 1256{,}6\ 1/\text{s}$

Legnagyobb sebessége a dugattyúnak a henger közepén van, értéke

$v_{\text{max}} = A \cdot \omega = 75{,}4\ \text{m/s}$.

Legnagyobb gyorsulása a dugattyúnak a henger végeiben van, értéke

$a_{\text{max}} = A \cdot \omega^2 = 94748\ \text{m/s}^2$.

M.9.11.

Adatok: $2 \cdot A = 8\ \text{cm} = 0{,}08\ \text{m}$, $f = 4\,000\,\frac{1}{\text{min}} = 66{,}67\,\frac{1}{\text{s}}$

$\omega = 2\pi \cdot f = 418{,}88\ 1/\text{s}$

Legnagyobb sebesség $v_{\text{max}} = A \cdot \omega = 16{,}75\ \text{m/s}$.

Legnagyobb gyorsulás $a_{\text{max}} = A \cdot \omega^2 = 7018{,}4\ \text{m/s}^2$.

A rezgésidő, fonálinga (9 feladat)

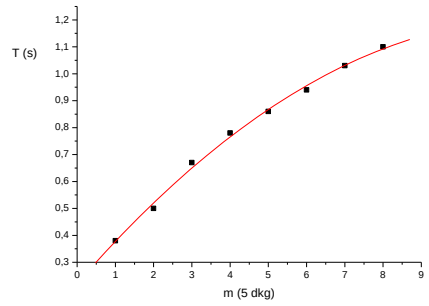
	1. mérés	2. mérés	3. mérés	4. mérés	5. mérés	6. mérés
m (5 dkg)	3m	4m	5m	6m	7m	8m
10 T (s)	6,7	7,8	8,6	9,4	10,3	11
T (s)	0,67	0,78	0,86	0,94	1,03	1,1

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.9.12.

a)



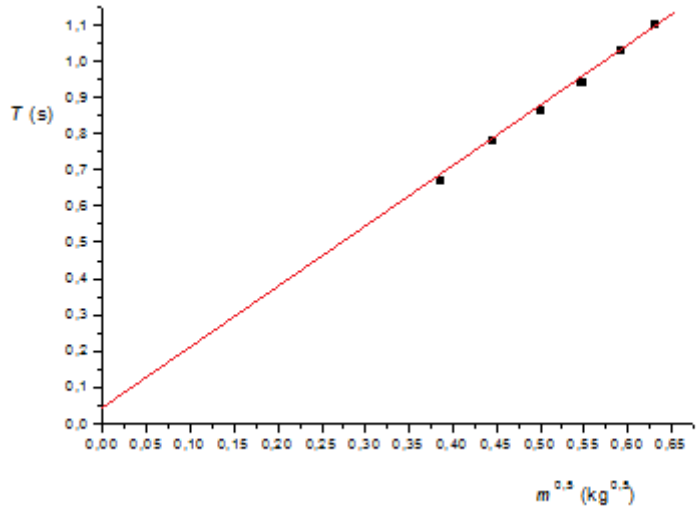
b)

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}} \Rightarrow D = m \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

	1. mérés	2. mérés	3. mérés	4. mérés	5. mérés	6. mérés
m (kg)	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4
T (s)	0,67	0,78	0,86	0,94	1,03	1,1
D (N/m)	13,2	13	13,3	13,4	13	13

$$D = \frac{D_1 + D_2 + D_3 + D_4 + D_5 + D_6}{6} = 13{,}15\ \frac{N}{m}$$

c)



A $\left(\sqrt{m}, T\right)$ koordinátájú pontokra egyenes illeszthető, mely egyenes az origó közelében, de felette metszi a T-tengelyt. Elméleti úton megmutatható, hogy a M tömegű, D rugóállandójú rugón rezgő m tömegű test rergésideje $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m + \frac{M}{3}}{D}}$. Ez alapján elmondható, hogy a mérési pontokra illesztett egyenes a $2\pi \cdot \sqrt{\frac{M}{3D}}$ pontban metszi a T-tengelyt

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

d)

A c) feladatrészben ábrázolt grafikon meredeksége $m = 1{,}75\ \frac{\text{s}}{\sqrt{\text{kg}}}$, tengelymetszete b = 0,05 s

A mérési pontokra illesztett egyenes egyenlete:

$$T = 1{,}75\ \frac{\text{s}}{\sqrt{\text{kg}}} \cdot \sqrt{m} + 0{,}05\ \text{s}$$

Ebből a keresett m tömeg kifejezve, majd kiszámolva:

$$m = \left(\frac{T - 0{,}05\ \text{s}}{1{,}75\ \frac{\text{s}}{\sqrt{\text{kg}}}} \right)^2 \approx 0{,}24\ \text{kg}$$

M.9.13.

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}}$$

$$T_1 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{2m}{D}} = \sqrt{2} \cdot 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}} = \sqrt{2} \cdot T$$

$$T_2 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{4m}{D}} = \sqrt{4} \cdot 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}} = 2 \cdot T$$

M.9.14.

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}}$$

$$T_1 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{2D}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot T$$

$$T_2 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{4D}} = \sqrt{\frac{1}{4}} \cdot 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}} = \frac{1}{2} \cdot T$$

M.9.15.



Adatok: t_1 = 10 s, k_1 = 25, m_1 = 40 kg, t_2 = 10 s, k_2 = 20.

a) $T_1 = \frac{t_1}{k_1} = 0{,}4\ \text{s}$, $f_1 = \frac{1}{T_1} = 2{,}5\ \text{Hz}$

b)

$$T_1 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m_1}{D}} \Rightarrow D = m_1 \cdot \left(\frac{2\pi}{T_1} \right)^2 = 9870\ \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

c)

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$$T_2 = \frac{t_2}{k_2} = 0{,}5 \text{ s}$$

$$T_2 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m_2}{D}} \Rightarrow m_2 = D \cdot \left(\frac{T_2}{2\pi}\right)^2 = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 \cdot m_1 = 62{,}5 \text{ kg}$$

M.9.16.

Adatok: $m_1 = 0{,}1\ kg$, $T_1 = \frac{1}{4}\ \frac{1}{s}$, $T_2 = \frac{2}{7}\ \frac{1}{s}$

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}} \Rightarrow D = m \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

$$m_1 \cdot \left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^2 = m_2 \cdot \left(\frac{2\pi}{T_2}\right)^2$$

$$m_2 = m_1 \cdot \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 = \left(\frac{8}{7}\right)^2 \cdot 0{,}1\ kg = 0{,}13\ kg$$

M.9.17.

Adatok: m = 5 dkg, $\Delta l = 5$ cm.

a)

Az egyensúlyi helyzetben a testre ható erők eredője nulla: $mg = D \cdot \Delta l$

A rezgésidőre vonatkozó összefüggést használva:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\frac{D \cdot \Delta l}{g}}{D}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\Delta l}{g}} = 0{,}44 \text{ s}$$

b)

$$D = \frac{mg}{\Delta l} = 0{,}1 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

M.9.18.

Használjuk a fonálinga lengésidejére vonatkozó összefüggést: $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$.

a) $T_1 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\frac{1}{2}l}{g}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot T$

b) $T_2 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\frac{1}{4}l}{g}} = \sqrt{\frac{1}{4}} \cdot 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{1}{2} \cdot T$

c) $T_3 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot l}{g}} = \sqrt{2} \cdot 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} = \sqrt{2} \cdot T$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

d) $T_4 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{4 \cdot l}{g}} = 2 \cdot 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} = 2 \cdot T$

M.9.19.

Adatok: T = 2 s.

Használjuk a fonálinga lengésidejére vonatkozó összefüggést: $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$.

$l = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \cdot g = 0{,}994\,\text{m} \approx 1\,\text{m}$.

M.9.20.

Adatok: l = 1,5 m, $18 \cdot T = 44{,}1$ s.

a) $T = \frac{44{,}1\ \text{s}}{18} = 2{,}45\ \text{s}$

b) Használjuk a fonálinga lengésidejére vonatkozó összefüggést:

$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow g = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot l = 9{,}86\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

A rezgési energia, rezgések a valóságban (5 feladat)

M.9.21.

Adatok: m = 0,1 kg, A = 0,04 m, T = 1,5 s.

a) Az általunk végzett munka a rendszer rezgési energiájával egyenlő

$W = E_{rezg} = \frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot m \cdot A^2 = 2 \cdot m \cdot \left(\frac{\pi}{T}\right)^2 \cdot A^2 = 1{,}4\ \text{mJ}$.

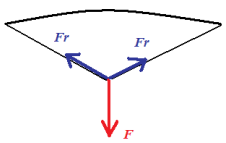
Megjegyzés: Ugyanerre az eredményre jutunk akkor is, ha kiszámítjuk, hogy mekkora munkával tudjuk a testet 4 cm-rel felemelni, vagy ugyanennyivel lefelé húzni, mert ezekből a helyzetekből elengedve fog 4 cm-es amplitúdójú rezgést végezni a test. Természetesen akkor is ezt az értéket kapjuk meg, ha a test maximális mozgási energiáját számítjuk ki.

b) $D = m \cdot \omega^2 = m \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = 1{,}75\ \frac{\text{N}}{\text{m}}$

M.9.22.

Adatok: F = 200 N, $\alpha = 120^\circ$, Δl = 0,4 m, m = 0,1 kg.

a) Bármely két erő által bezárt szög $\alpha = 120^\circ$, ezért mindhárom erő egyenlő egymással:



KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

F_r = F = 200 N.

b) $D = \frac{F}{\Delta l} = 500 \frac{\text{N}}{\text{m}}$.

c) $E_r = 2 \cdot \frac{1}{2} D \Delta l^2 = 80 \text{ J}$

d) $W = E_r = 2 \cdot \frac{1}{2} D \Delta l^2 = 80 \text{ J}$

e) $E_r = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 \Rightarrow v_{\max} = \sqrt{\frac{2 \cdot E_r}{m}} = 40 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

f) $E_{rug} = mgh \Rightarrow h = \frac{E_{rug}}{mg} = 80 \text{ m}$.

M.9.23.

Adatok: m = 0,1 kg, W = 0,72 J, A = 0,1 m.

a) $W = E_r = \frac{1}{2} D A^2 \Rightarrow D = \frac{2 \cdot W}{A^2} = 144 \frac{\text{N}}{\text{m}}$

b) $E_r = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 \Rightarrow v_{\max} = \sqrt{\frac{2 \cdot E_r}{m}} = 3{,}8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

c) $v_{\max} = A \cdot \omega = A \cdot \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi \cdot A}{v_{\max}} = 0{,}17 \text{ s}$

M.9.24.

a) A szélső helyzetben lévő test sebessége nulla, a rugó feszítettségén nem változtatunk, így a rezgés amplitúdója nem változik (csak a rezgésidő változik, √2-ed részére csökken).

b) A zárt rendszertől nem vettünk el energiát, ezért a rezgés energiája nem változik (az egyensúlyi helyzeten a fele akkora tömeg √2-szörös sebességgel halad át).

c) Az egyensúlyi helyzeten áthaladó kocsi maximális mozgási energiája az eredeti rezgési energia fele. Ennyi lesz az új rezgési energia.

$\frac{1}{2} D A_1^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} D A^2 \Rightarrow A_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} A$

d) A rendszer rezgési energiája a felére csökken.

M.9.25.

Adatok: D = 300 N/m, $\Delta l = 0{,}03$ m, m = 0,005 kg.

a) A pisztoly felhúzása során fellépő rugalmas erő ellenében végzett munka:

$W = \frac{1}{2} D \Delta l^2 = 0{,}135$ J.

b) Alkalmazzuk az energia-megmaradás törvényét. A kezdeti rugalmas energia mozgási energiává alakul:

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$$\frac{1}{2}D\Delta l^2 = \frac{1}{2}m \cdot v_{max}^2 \Rightarrow v_{max} = \sqrt{\frac{D}{m}} \cdot \Delta l = 7{,}35 \text{ m/s}.$$

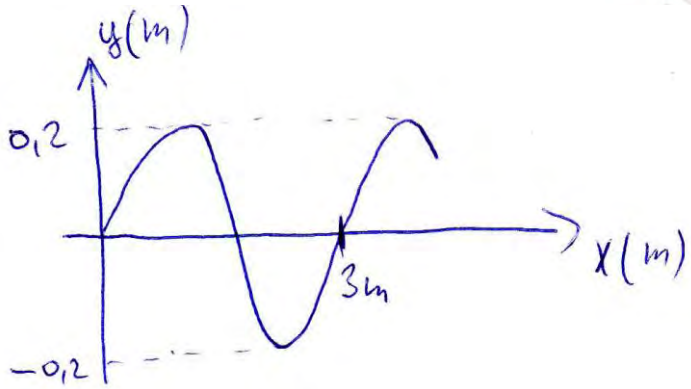
Hullámok terjedése, osztályozása, hullámok leírása (5 feladat)

M.9.26.

Adatok: $T = 5$ s, $\lambda = 6$ m, $2A = 4$ m.

A hullám periódusideje $T = 5$ s, $f = 1/T = 0{,}2$ Hz, amplitúdója $A = 2$ m, terjedési sebessége

$$c = \lambda \cdot f = 1{,}2 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

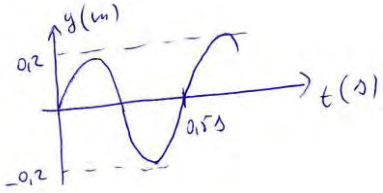


M.9.27.

Adatok: $f = 2$ Hz. A grafikonról leolvasva: $A = 0{,}2$ m, $\lambda = 3$ m.

a) $\lambda = 3$ m, $A = 0{,}2$ m.

b) $v_{max} = A \cdot 2\pi f = 2{,}51 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

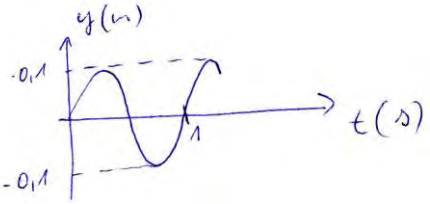


c)

M.9.28.

Adatok: $A = 0{,}1$ m, $T = 1$ s, $c = 5$ m/s.

a) $f = 1/T = 1$ Hz, $\lambda = \frac{c}{f} = 5$ m.

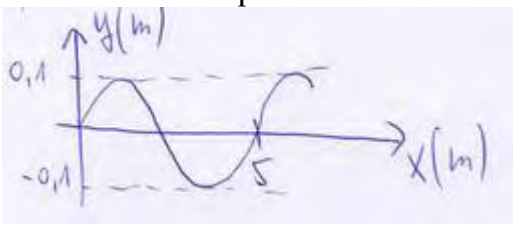


b)

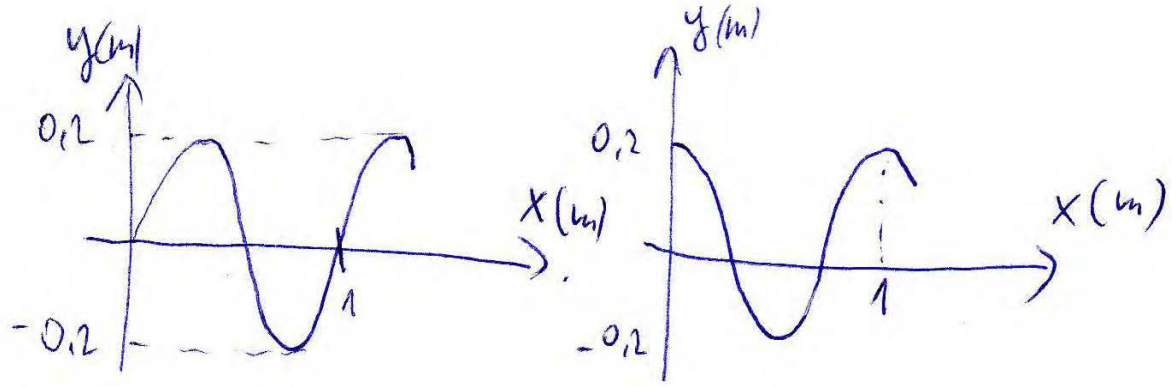
KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

c) A hullám időbeli periodicitásának mértéke a T periódusidő.

d) 

e) A hullám térbeli periodicitásának mértéke a λ hullámhossz.



M.9.29.

A két felvétel között ¼ periódusidő telt el. Ez alatt az origóban lévő pont az egyensúlyi helyzetből a felső szélsőhelyzetbe került. Az a) felvétel készült hamarabb.

M.9.30.

Adatok: $T = 0{,}6$ s, $c = 5$ m/s, $k = 3$, $x = 1$ m.

a) $c = \dfrac{\lambda}{T} \Rightarrow \lambda = c \cdot T = 3$ m

b) $s = k \cdot \lambda = 9$ m

c) $\dfrac{x}{\lambda} = \dfrac{\Delta\varphi}{2\pi} \Rightarrow \Delta\varphi = \dfrac{x}{\lambda} \cdot 2\pi = \dfrac{2}{3}\pi$

Hullámok visszaverődése, törése (7 feladat)

M.9.31.

A gyerekek hullámhegyeket küldenek egymásnak. Az elküldött hullámhegy a rögzített végről ellentétes fázisban, hullámvölgyként verődik vissza. Ha hullámhegyet tapasztalunk, akkor azt a társunk küldte. Ha hullámvölgyet észlelünk, akkor az általunk küldött jel visszaverődését látjuk.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.9.32.
Fázisugrás nélkül verődik vissza.

M.9.33.
Adatok: $\alpha = 30^\circ$.
a) A visszavert hullám frekvenciája, hullámhossza, terjedési sebessége nem változik. A (rögzített végről) visszavert hullám fázisa az ellentétesre változik.
b) A beeső hullám terjedési irány a partra merőleges egyenessel $\alpha = 30^\circ$ szöget zár be. A visszavert hullám terjedési iránya a partra merőleges egyenessel $\alpha' = 30^\circ$ szöget zár be. A beeső és a visszavert hullám egymással $2\alpha = 60^\circ$ szöget zár be egymással.
Megjegyzés: A visszaverődés során a terjedési sebesség vektor 180 – 2α = 120°-kal fordul el.

M.9.34.
Adatok: c = 5 km/s, t = 15 s.

$$t = \frac{2h}{c} \Rightarrow h = \frac{c \cdot t}{2} = 37{,}5 \text{ km}$$

M.9.35.
a) A sekélyebb vízben a hullám frekvenciája nem változik, a hullámhossz kisebb, mint a mély vízben.
b) Az a közeg a hullámtanilag ritkább, ahol a hullám terjedési sebessége nagyobb. A mélyebb víz hullámtanilag ritkább, mint a sekélyebb.

M.9.36.
Adatok: f = 0,6 Hz, h_1 = 10 m, h_2 = 1 m.

a) A tó közepén a hullám terjedési sebessége $c_1 = \sqrt{g \cdot h_1} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, a part közelében

$c_2 = \sqrt{g \cdot h_2} = \sqrt{10} \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 3{,}2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

b) A tó közepén a hullám hullámhossza $\lambda_1 = \frac{c_1}{f} = \frac{10}{0{,}6} \text{ m} = 16{,}7 \text{ m}$, a part közelében

$\lambda_2 = \frac{c_2}{f} = \frac{\sqrt{10}}{0{,}6} \text{ m} = 5{,}27 \text{ m}$.

c) $n_{2,1} = \frac{c_1}{c_2} = \sqrt{10} \approx 3{,}2$

M.9.37.
a) A visszavert hullám terjedési sebessége, frekvenciája, hullámhossza nem változik. A (rögzített végről) visszavert hullám fázisa az ellentétesre változik.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

b) A sekélyebb vízbe hatoló hullám frekvenciája nem változik, hullámhossza kisebb lesz, a fázisa nem változik. A terjedési irány a beesési merőlegeshez törik, azaz a törési szög kisebb, mint a beesési szög.

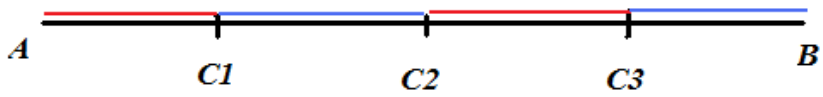
Hullámok találkozása, elhajlása (6 feladat)

M.9.38.
Adatok: $A_1 = 5$ cm, $A_2 = 3$ cm.

a) $A = A_1 + A_2 = 8$ cm
b) $A = |A_1 - A_2| = 2$ cm
c) A teljes kioltás feltétele, hogy az azonos frekvenciájú és amplitúdójú hullámok ellentétes fázisban találkozzanak.

M.9.39.
a) A pálcának az egyensúlyi helyzettől való elmozdulása kicsi $(\leq 5^\circ)$, ezért $\sin\alpha \approx \alpha$. Az elfordulási szög kicsisége miatt $A \approx i = R \cdot \sin\alpha \approx R \cdot \alpha$. A pálcát az egyik harmadoló pontja körül egyenletesen ide-oda mozgatjuk. Az indított hullám amplitúdója arányos a körív sugarával: $A_1 : A_2 = R_1 : R_2 = 2:1$.
Az Y alakú gumizsinór két szárában indított hullámok sebessége, frekvenciája, hullámhossza egyenlő. Amplitúdóinak aránya: $A_1 : A_2 = 2:1$.
b) $A_1 = A_2 \Rightarrow R_1 = R_2$. A pálca középpontja körül forgatjuk a pálcát ide-oda egyenletesen, ha a harmadik szárban teljes kioltást tapasztalunk.

M.9.40.
a) Kétfajta fázisú pontok vannak a rugalmas pontsoron. Két szomszédos csomópont közötti szakasz minden pontja azonos fázisban van. Két szomszédos szakasz ellentétes fázisú pontokat tartalmaz.
b)
Az azonos fázisú tartományokat azonos (piros, illetve kék) színnel jelöltem.



M.9.41.
Adatok: $l = 4$ m, $c = 5$ m/s.

a) A végek rögzítettek, ezért a hullámhossz fele egész számszor fér rá a zsinórra.
$l = k \cdot \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{2 \cdot l}{k}$, ahol $k = 1, 2, \ldots$
b) Alkalmazzuk a hullámmozgás alapegyenletét:

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$c = \lambda \cdot f \Rightarrow f = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{2 \cdot l} \cdot k$, ahol k = 1, 2, ...

M.9.42.

Adatok: l = 0,5 m, c = 12 m/s.

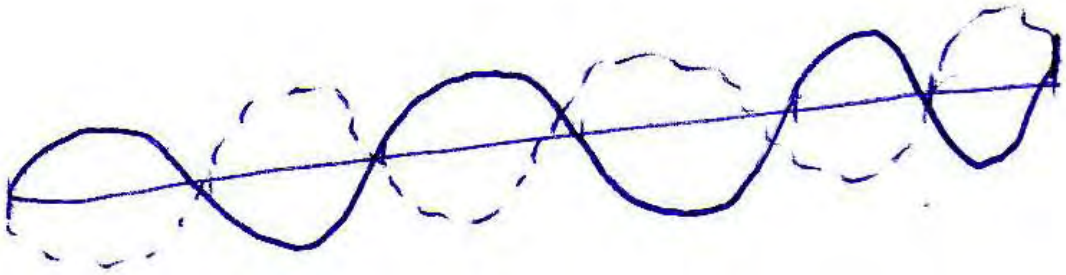
a) $l = \frac{1}{4} \cdot \lambda, \frac{3}{4} \cdot \lambda, \frac{5}{4} \cdot \lambda, ..., \frac{2k-1}{4} \cdot \lambda \Rightarrow \lambda = \frac{4l}{2k-1}$, ahol k = 1, 2, ...

b) $c = \lambda \cdot f \Rightarrow f = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{4 \cdot l} \cdot (2k-1)$, ahol k = 1, 2, ...

M.9.43.

Adatok: f = 100 Hz, l = 2 m, k = 6.

a) Az l hosszon k db duzzadóhely, k db félhullám van. A hullámhossz: $\lambda = \frac{2l}{k} = \frac{2}{3}$ m.



b) $c = \lambda \cdot f = 66{,}7$ m/s

A hang (6 feladat)

M.9.44.

Adatok: f = 20-20 000 Hz, c_1 = 340 m/s, c_2 = 1500 m/s.

a) $\lambda_1 = \frac{c_1}{f} = 17$ m, $\lambda_2 = \frac{c_1}{f} = 0{,}017$ m, $\lambda = 17 - 0{,}017$ m

b) $\lambda_2 = \frac{c_2}{f} = 75$ m, $\lambda_2 = \frac{c_2}{f} = 0{,}075$ m, $\lambda = 75 - 0{,}075$ m

M.9.45.

Adatok: c = 340 m/s, $k = 18 \cdot 12 = 216$, t = 1 s.

a) $f = \frac{k}{t} = 216$ Hz

b) $\lambda = \frac{c}{f} = 1{,}574$ m

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.9.46.

Adatok: c = 340 m/s, $k = 30$, t = 0,5 s.

a) $f = \frac{k}{t} = 60$ Hz

b) $\lambda = \frac{c}{f} = 5{,}67$ m

M.9.47.

Adatok: f = 300 Hz, $\lambda = 5$ m s = 2 000 m.

A vízben a hang terjedési sebessége: $c = \lambda \cdot f = 1\,500$ m/s.

$t = \frac{s}{c} = 1{,}33$ s

M.9.48.

A hang és visszhang által megtett út $s = c \cdot t = 34$ m. Legalább $\frac{34\text{ m}}{2} = 17$ m távol kell lennie a sima visszaverő felületnek a hangforrástól, hogy létrejöjjön a visszhang.

M.9.49.

Adatok: l = 0,9 m, f = 440 Hz.

a) $l = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = 2l = 1{,}8$ m, $c = \lambda \cdot f = 792$ m/s

b) 3/2-szer nagyobb frekvenciájú hang 2/3-szoros hullámhosszat jelent

$\Rightarrow l' = \frac{2}{3} \cdot l = 0{,}6$ m

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Gyakorló feladatok (50 feladat):

Rezgések leírása, harmonikus rezgőmozgás (4 feladat)

M.9.50.

Adatok: $2 \cdot R = 24\ \text{m}$, $f = 5\ \frac{1}{\text{min}} = \frac{1}{12}\ \frac{1}{\text{s}}$, $m = 30\ \text{kg}$, $t = 3\ \text{s}$.

a) $T = \frac{1}{f} = 12\ \text{s}$, $f = 5\ \frac{1}{\text{min}} = \frac{1}{12}\ \frac{1}{\text{s}}$

b) $\omega = 2\pi f = 0{,}52\ \frac{1}{\text{s}}$, $v_k = \omega \cdot R = 6{,}28\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

c) $s = v_k \cdot t = 18{,}85\ \text{m}$

d) $\alpha = \omega \cdot t = 1{,}57\ \text{rad} = 90°$

e) $\sum F = m \cdot a_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{R} = 98{,}7\ \text{N}$, a körpálya középpontja felé mutat.

M.9.51.

Adatok: $f = 3200\ \frac{1}{\text{min}} = 53{,}33\ \frac{1}{\text{s}}$, $2 \cdot A = 0{,}003\ \text{m}$

$A = 0{,}0015\ \text{m} = 1{,}5\ \text{mm}$, $f = 3200\ \frac{1}{\text{min}} = 53{,}33\ \frac{1}{\text{s}}$, $T = \frac{1}{f} = 18{,}75\ \text{ms}$.

M.9.52.

Adatok: $D = 400\ \text{N/m}$, $l = 10\ \text{m}$, $h = 20\ \text{m}$, $m = 50\ \text{kg}$.

a) Először a test szabadon esik. Amikor a zsinór megfeszül, harmonikus rezgőmozgás kezdődik.
Azután még előfordulhat, hogy a zsinór újra meglazul, akkor megint szabadesés lesz, majd megint rezgőmozgás, ...
A csillapítás következtében lesz majd csak rezgőmozgás, ..., majd a csillapítás miatt megáll a test.

b) A test addig esik szabadon, míg a zsinór meg nem feszül:

$l = \frac{g}{2} \cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2l}{g}} = \sqrt{2}\ \text{s} \approx 1{,}41\ \text{s}$.

c) A test egyensúlyi helyzetében a rá ható erők eredője nulla:

$mg = D \cdot \Delta l \Rightarrow \Delta l = \frac{mg}{D} = 1{,}25\ \text{m}$, vagyis egyensúlyi helyzetben a gumikötél megnyúlása 1,25 m.

d) A test sebessége az egyensúlyi helyzeten való áthaladáskor a legnagyobb.
Alkalmazzuk az energia-megmaradás törvényét:

$mg \cdot (l + \Delta l) = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \frac{1}{2} D (\Delta l)^2$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$$v=\sqrt{2g(l+\Delta l)-\frac{D}{m}(\Delta l)^2}=14{,}6\ \text{m/s}.$$

c) A testre ható erők eredője, midőn a testet az egyensúlyi helyzetből *y* távolságra mozgatjuk lefelé:

$$\sum F=mg-D\cdot(\Delta l+y)=mg-D\cdot\Delta l-D\cdot y=-D\cdot y$$

(A felfelé mozgatás hasonló eredményre vezetne.)

f) Először keressük meg azt a legnagyobb megnyúlást, ami akkor áll elő, amikor a rezgő test az alsó szélső helyzetben van. Ilyenkor a test kezdeti helyzeti energiája rugalmas energiává alakul:

$$mg\cdot(l+y_1)=\frac{1}{2}Dy_1^2\Rightarrow y_1=6{,}4\ \text{m}$$

A rezgés amplitúdója: $A=y_1-\Delta l=5{,}15\ \text{m}$

g) Újra írjuk fel az energia-megmaradás törvényét:

$$m_{\max}gh=\frac{1}{2}D\cdot(h-l)^2\Rightarrow m_{\max}=\frac{D\cdot(h-l)^2}{2gh}=100\ \text{kg}$$

M.9.53.



a) Az alsó, m_2 tömegű testre csak a nehézségi erő hat, gyorsulása $a_2 = g$.

A kötél elvágása előtt a rugóban ébredő erő: $F_r=(m_1+m_2)\cdot g$

A kötél elvágása után a felső, m_1 tömegű testre ható erők eredője, és gyorsulása:

$$\sum F=F_r-m_2\cdot g=(m_1+m_2)\cdot g-m_1\cdot g=m_2\cdot g\Rightarrow a_1=\frac{m_2}{m_1}\cdot g$$

b) $a_1=a_2=g$, ha $m_1=m_2$. Ilyenkor az alsó test lefelé, a felső test felfelé gyorsul *g*-vel.

c)

Az m_1 test egyensúlyi helyzetében a rá ható erők eredője nulla:

$$m_1\cdot g=D\cdot\Delta l\Rightarrow\Delta l=\frac{m_1\cdot g}{D}$$

A kötél elégetése előtt a rugó megnyúlása

$$\Delta l_0=\frac{(m_1+m_2)\cdot g}{D}$$

A rezgés amplitúdója: $A=\Delta l_0-\Delta l=\frac{m_2\cdot g}{D}$.

Harmonikus rezgőmozgás kinematikai leírása (8 feladat)

M.9.54.

Adatok: A = 10 cm = 0,1 m, T = 0,6 s, $y_1=8\ \text{cm}=0{,}08\ \text{m}$.

a)

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=10{,}47\ \frac{1}{\text{s}}$$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

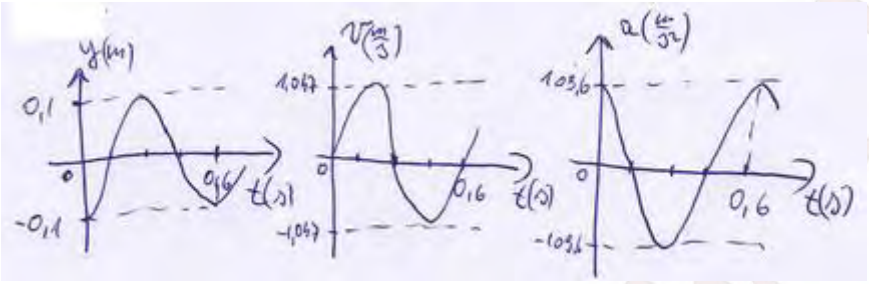
SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

A kezdeti feltétel miatt a kitérés $y(t) = -A \cdot \cos(\omega \cdot t)$, a sebesség $v(t) = A\omega \cdot \sin(\omega \cdot t)$, a gyorsulás $a(t) = A\omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t)$.

$$y(t) = -A \cdot \cos(\omega \cdot t) = -0{,}1\ m \cdot \cos\left(10{,}47\ \frac{1}{s} \cdot t\right)$$

$$v(t) = A\omega \cdot \sin(\omega \cdot t) = 1{,}047\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \sin\left(10{,}47\ \frac{1}{\text{s}} \cdot \text{t}\right)$$

$$a(t) = A\omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t) = 109{,}6\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \cos\left(10{,}47\ \frac{1}{\text{s}} \cdot \text{t}\right)$$



b) $y(t) = -A \cdot \cos(\omega \cdot t) \Rightarrow \cos(\omega t) = -\frac{y}{A} = -0{,}8 \Rightarrow \omega t = 2{,}49 \Rightarrow t = 238{,}6\ \text{ms}$

c) $t_1 = 238{,}6\ \text{ms} + k \cdot \frac{T}{2} = (238{,}6 + k \cdot 300)\ \text{ms}$, ahol k = 0, 1, 2, ...

$t_2 = \frac{T}{2} - 238{,}6\ \text{ms} + k \cdot \frac{T}{2} = (61{,}4 + k \cdot 300)\ \text{ms}$, ahol k = 0, 1, 2, ...

d) $v(t = 0{,}4\ \text{s}) = A\omega \cdot \sin(\omega \cdot t) = 1{,}047\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \sin\left(10{,}47\ \frac{1}{\text{s}} \cdot \text{t}\right) = -0{,}906\ \text{m/s}$

$a(t) = A\omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t) = 109{,}6\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \cos\left(10{,}47\ \frac{1}{\text{s}} \cdot \text{t}\right) = -54{,}87\ \text{m/s}^2$

M.9.55.

Adatok: f = 74 1/min = 1,233 1/s, $2A$ = 1,2 cm.

$$v_{\max} = A \cdot 2\pi \cdot f = 4{,}65\ \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

$$a_{\max} = A \cdot (2\pi \cdot f)^2 = 0{,}36\ \text{m/s}^2$$

M.9.56.

Adatok: f = 5 Hz.

A teher akkor eshet le a kampóról (a felső szélső helyzetben), ha a rezgőmozgás legnagyobb gyorsulása nagyobb a nehézségi gyorsulásnál, mert ilyenkor a kampó már nem húzza felfelé a testet.

$a_{\max} \geq g$

$A \cdot (2\pi \cdot f)^2 \geq g$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$$A \geq \frac{g}{(2\pi \cdot f)^2} \approx 1 \text{ cm}$$

M.9.57.

Először határozzuk meg, hogy mekkora fázisszög tartozik az $y = A/2$ kitéréshez:

$$\frac{A}{2} = A \cdot \sin \omega \cdot t \Rightarrow \varphi = \omega \cdot t = \frac{\pi}{6}$$

A keresett arány: $\frac{2\pi - 4 \cdot \frac{\pi}{6}}{2\pi} = \frac{2}{3}$.

M.9.58.

Adatok: $T = 2$ s, $2A = 1{,}8$ m.

a)

$$v_{max} = A \cdot \frac{2\pi}{T} \approx 2{,}8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$a_{max} = A \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = 8{,}9 \text{ m/s}^2$$

M.9.59.

Adatok: $f = 6$ Hz, $A = 5$ cm.

a) Lerepül, mert a lemez végének maximális gyorsulása ($A \cdot (2\pi f)^2 \approx 71$ m/s²) nagyobb, mint a nehézségi gyorsulás.

b) Először számoljuk ki a lemez végpontjának legnagyobb sebességét

$$v_{max} = A \cdot 2\pi \cdot f = 1{,}885 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Naiv módon feltételezhetjük, hogy az egyensúlyi helyzetkor szerzett maximális mozgási energia egyszerű megmaradási tétel szerint megadja az emelkedési magasságot, vagyis

$\frac{1}{2} m \cdot v_{max}^2 = mgh \Rightarrow h = \frac{v_{max}^2}{2g} = 17{,}8$ cm-re emelkedik a test az egyensúlyi helyzethez képest. Ez azonban csak közelítőleg van így. A lemez akkor engedi el a testet, amikor lefelé mutató gyorsulása eléri a g értékét:

$g = A\omega^2 \sin \omega t$, amiből $\sin \omega t = 0{,}14$.

Ekkor a test az egyensúlyi helyzet felett tartózkodik $y = A \sin \omega t = 0{,}7$ cm-rel, és a test sebessége $v = A\omega \cos \omega t = 1{,}87$ m/s. Most már jogosan alkalmazhatjuk az energia-megmaradás törvényét:

$$\frac{1}{2} m \cdot v_{max}^2 = mgh \Rightarrow h = \frac{v_{max}^2}{2g} = 17{,}4 \text{ cm},$$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

tehát a test az egyensúlyi helyzethez képest $y + h$ = (0,7 + 17,4) cm = 18,1 cm-re emelkedik.

Megjegyzés: Érdekes észrevennünk, hogy a valódi emelkedés némileg nagyobb, mint a naiv számolásból adódó, aminek oka az, hogy a test és a lemez elválásáig a lemez nagyobb sebességgel mozgatja a picike testet, mintha azt az egyensúlyi helyzetben egyszerűen feldobnánk.

M.9.60.

Adatok: f = 240 1/min = 4 Hz, A = 2 cm.

a)

Számoljuk ki melyik időponthoz tartozik a 0,5 cm, illetve 1,5 cm kitérés:

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$0{,}5 = 2 \cdot \sin(\omega \cdot t) \Rightarrow \sin(\omega \cdot t) = \frac{1}{4} \Rightarrow t_1 = 0{,}01\ \text{s}$$

$$1{,}5 = 2 \cdot \sin(\omega \cdot t) \Rightarrow \sin(\omega \cdot t) = \frac{3}{4} \Rightarrow t_1 = 0{,}0337\ \text{s}$$

A keresett időtartam 33,7 – 10 = 23,7 ms

b)

Pontosan kétszer teszi meg a 0,5 cm-es utat az egyensúlyi helyzet felett és alatt, tehát az ehhez szükséges idő $2t_1$ = 0,02 s = 20 ms.

M.9.61.

Adatok: A = 0,1 m, f = 5 Hz, y = 7 cm.

Alkalmazzuk a harmonikus rezgőmozgásra vonatkozó, ismert kinematikai függvényeket:

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t),\ v(t) = A\omega \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Mindkét egyenletből fejezzük ki a szögfüggvényt, azokat emeljük négyzetre, majd adjuk össze:

$$\sin^2(\omega \cdot t) = \left(\frac{y}{A}\right)^2,\ \cos^2(\omega \cdot t) = \left(\frac{v}{A\omega}\right)^2$$

$$\sin^2(\omega \cdot t) + \cos^2(\omega \cdot t) = \frac{\omega^2 \cdot y^2 + v^2}{A^2 \cdot \omega^2}$$

Az ismert trigonometriai összefüggést ($\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$), és az $\omega = 2\pi f$ -et behelyettesítve, rendezés után adódik:

$$v = 2\pi \cdot f \cdot \sqrt{A^2 - y^2} = 2{,}24\ \text{m/s}$$

$$a = -\omega^2 \cdot y = -(2\pi \cdot f)^2 \cdot y = -69\ \text{m/s}^2$$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

A rezgésidő. Fonálinga (10 feladat)

M.9.62.

Adatok: m = 0,2 kg, $\Delta l_0 = 0{,}05$ m , h = 1 m, M = 0,4 kg.

a) A test egyensúlyi helyzetében a rá ható erők eredője nulla:

$$mg = D \cdot \Delta l_0 \Rightarrow D = \frac{mg}{\Delta l_0} = 40 \text{ N/m}$$

b) $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{M+m}{D}} = 0{,}77$ s

c)

A M tömegű test sebessége az ütközés előtt:

$$mgh = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gh} = \sqrt{20} \text{ m/s}$$

A tökéletesen rugalmas ütközés után a sebesség:

$$v_1 = \frac{m}{M+m} \cdot v = 1{,}49 \text{ m/s}$$

Az új egyensúlyi helyzettől mért távolság ekkor

$$y_1 = \frac{(M+m)\cdot g}{D} - \frac{m \cdot g}{D} = \frac{M \cdot g}{D} = 0{,}1 \text{ m}$$

$$\frac{1}{2} DA^2 = \frac{1}{2} Dy_1^2 + \frac{1}{2}(m+M)\cdot v_1^2 \Rightarrow A = \sqrt{y_1^2 + \frac{(m+M)\cdot v_1^2}{D}} = 20{,}81 \text{ cm}$$

Megjegyzés: Az ínyenceknek feltűnhet, hogy az energia-egyenletben nem szerepel a gravitációs helyzeti energia, pedig két különböző magasságú állapotot hasonlítunk össze. Ennek oka az, hogy a rugóenergia nulla állapotának sem a rugó nyújtatlan helyzetét tekintjük, hanem az egyensúlyi helyzetet, pedig ott a rugóban van tárolt rugalmas energia. Megmutatható, hogy ez a két tag éppen kiejti egymást, valóban lehet így számolni. Akiket ez nem győz meg, azok számára másfajta levezetést is mutathatunk:

$$y_1 = A \sin \omega t$$

$$v_1 = A\omega \cos \omega t$$

$$\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1$$

$$\frac{y_1^2}{A^2} + \frac{v_1^2}{A^2\omega^2} = 1$$

$$A = \sqrt{y_1^2 + \frac{v_1^2}{\omega^2}} = \sqrt{y_1^2 + \frac{(m+M)\cdot v_1^2}{D}} = 20{,}81 \text{ cm}.$$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.9.63.

Adatok: $f_1 = 2{,}37$ Hz, $f_2 = 1{,}6$ Hz, $M = 3$ 000 kg.

$$f_1 = \frac{1}{2\pi}\cdot\sqrt{\frac{D}{m}},\quad f_2 = \frac{1}{2\pi}\cdot\sqrt{\frac{D}{m+M}}$$

A két egyenlet hányadosából adódik:

$$\frac{f_1}{f_2} = \sqrt{\frac{m+M}{m}} \Rightarrow m = \frac{M}{\left(\frac{f_1}{f_2}\right)^2 - 1} = 2\ 512 \text{ kg}$$

M.9.64.

Az ismert, majd az ismeretlen tömegű testet is rezgésbe hozom a rugó segítségével. A stopperóra segítségével mérem az adott idő alatt megtett rezgések számát.

Az m ismert tömegű test t_1 idő alatt z_1 rezgést tesz.
Az m_x ismeretlen tömegű test t_2 idő alatt z_2 rezgést tesz.

Mindkét testre alkalmazzuk a rezgésidőre vonatkozó összefüggést:

$$T = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{m}{D}}$$

$$\frac{t_1}{z_1} = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{m}{D}}$$

$$\frac{t_2}{z_2} = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{m_x}{D}}$$

Vegyük a két egyenlet hányadosát és fejezzük ki a m_x ismeretlen tömeget:

$$m_x = \left(\frac{z_1\cdot t_2}{z_2\cdot t_1}\right)^2\cdot m$$

M.9.65.

Adatok: a = 0,1 m, ?? = 800 kg/m³.

A fakocka egyensúlyi helyzetében a testre ható erők eredője nulla:

$$m\cdot g = F_{fel}$$

$$a^3\cdot\rho_{fa}\cdot g = x\cdot a^2\cdot\rho_{víz}\cdot g \Rightarrow x = \frac{\rho_{fa}}{\rho_{víz}}\cdot a$$

Az egyensúlyi helyzetből egy y távolságra (felfelé) való kitérítés esetén a testre ható erők eredője:

$$\sum F = F_{fel} - mg = (x-y)\cdot a^2\cdot\rho_{víz}\cdot g - mg =$$

$$x\cdot a^2\cdot\rho_{víz}\cdot g - y\cdot a^2\cdot\rho_{víz}\cdot g - mg = -\left(a^2\cdot\rho_{víz}\cdot g\right)\cdot y$$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Ez az erő harmonikus, hiszen nagysága arányos a kitéréssel, iránya ellentétes vele. (Az egyensúlyi helyzetből lefelé való kitérítés vizsgálata hasonló eredményre vezet.)

A helyettesítő rugóállandó értéke: $D = a^2 \cdot \rho_{víz} \cdot g = 100\ \text{N/m}$

A fakocka tömege:

$m = \rho \cdot a^3 = 0{,}8\ \text{kg}$

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}} = 0{,}562\ \text{s}.$$

Megjegyzés: Ennek a feladatnak az a pikantériája, hogy a megoldás teljesen rossz, azonban a rossz megoldás végeredménye jó közelítéssel megegyezik a mérési eredményekkel. Két hatást nem vesz figyelembe a megoldás, melyek a mérések szerint éppen kiejtik egymást. Az egyik az, hogy nemcsak a kocka mozog, hanem vele együtt jelentős vízmennyiség is mozgásba jön, amit úgy szoktak figyelembe venni, hogy a test tömege helyett a megnövelt úgynevezett „effektív” tömeggel számolnak. A másik hatás pedig az, hogy nagyon nagy a kocka csillapodása, és a csillapítás eltolja (megnöveli) a sajátrezgés idejét.

M.9.66.

a) A föld belsejében lévő, a Föld középpontjától x távolságra lévő m tömegű testre ható gravitációs erő:

$$F_{gr} = -\gamma \cdot \frac{M(x) \cdot m}{x^2} = -\gamma \cdot \frac{\frac{M}{\frac{4\pi R^3}{3}} \cdot \frac{4\pi x^3}{3} \cdot m}{x^2} = -\frac{\gamma M m}{R^3} \cdot x$$

Ez az erő harmonikus, hiszen nagysága arányos a kitéréssel, iránya ellentétes vele (ezt fejezi ki a negatív előjel).

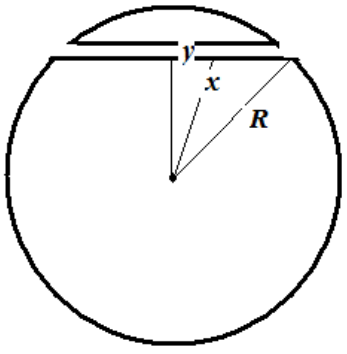
b) A helyettesítő rugóállandó értéke: $D = \frac{\gamma M m}{R^3}$

A Föld tömege $M = 6 \cdot 10^{24}$ kg, sugara $R = 6\,370$ km.

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{R^3}{\gamma \cdot M}} \approx 84\ \text{min}$$

c)

Az m tömegű testre ható gravitációs erő most is $F_{gr} = -\frac{\gamma M m}{R^3} \cdot x$, ennek az egyensúlyi helyzet felé mutató komponense:



$$F_{gr} = -\frac{\gamma \mathrm{M m}}{\mathrm{R}^3} \cdot x \cdot \frac{y}{x} = -\frac{\gamma M m}{R^3} \cdot y$$

A helyettesítő rugóállandó értéke most is: $D = \frac{\gamma M m}{R^3}$

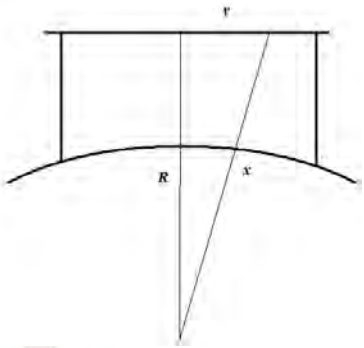
$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{R^3}{\gamma \cdot M}} \approx 84\ \text{min}.$$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.9.67.

Az asztal közepétől (egyensúlyi helyzet) *y* távolságra lévő *m* tömegű testre ható gravitációs (nehézségi) erő: $F = m \cdot g$, melynek az egyensúlyi helyzetbe mutató komponense:



$$F = m \cdot g = m \cdot g \cdot \frac{y}{x} = \frac{m \cdot g}{x} \cdot y$$

A helyettesítő rugóállandó értéke most is:

$$D = \frac{m \cdot g}{x} = \frac{\gamma M m}{R^3}$$

(Felhasználtuk, hogy $x \approx R$, valamint $g = \frac{\gamma M}{R^2}$

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{R^3}{\gamma \cdot M}} \approx 84 \text{ min}.$$

Megjegyzés: Ez a feladat az előző példa határesetének tekinthető. Az eredmény átírható $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{R^3}{\gamma \cdot M}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{R}{g}} \approx 84 \text{ min}$ alakba is, ami azt mutatja, hogy a Föld felszínén mozgó, *R* földsugárnyi hosszú (képzeletbeli) matematikai ingának is ugyanennyi a lengésideje. Sőt megmutatható az is, hogy a földfelszínhez közel mozgó műhold keringési ideje is ugyanennyi.

M.9.68.

Adatok: T = 2,5 s.

Használjuk a matematikai inga lengésidejére vonatkozó összefüggést:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow l = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \cdot g = 1{,}58 \text{ m}.$$

M.9.69.

Adatok: x = 20 cm, $T' = 1{,}15 \cdot T$.

a) Írjuk fel a két matematikai inga lengésidejére vonatkozó összefüggést:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}, \; 1{,}15 \cdot T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l+x}{g}}$$

Vegyük a két egyenlet hányadosát:

$$1{,}15 = \sqrt{\frac{l+x}{l}} \Rightarrow l = \frac{x}{1{,}15^2 - 1} = 62 \text{ cm}.$$

Megjegyzés: Érdekes észrevenni, hogy az eredmény nem függ *g*-től.

b)

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} = 1{,}56 \text{ s}$$

M.9.70.

Adatok: $g_1 = 9{,}78$ m/s², $g_2 = 9{,}83$ m/s².

A Sarkon a másodpercinga hossza:

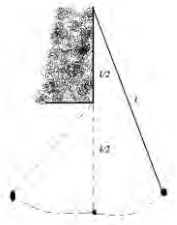
$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow l_1 = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \cdot g_1 = 99{,}1 \text{ cm}$$

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow l_2 = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \cdot g_2 = 99{,}6 \text{ cm}$$

A két inga hosszának különbsége: 5 mm.

M.9.71.

$$T = \frac{T_1}{2} + \frac{T_2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} + 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{2 \cdot g}}\right) = \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2{,}08 \text{ s}$$



A rezgési energia, rezgések a valóságban (5 feladat)

M.9.72.

a)

$E_{mozg} = E_{rug}$

Használjuk fel, hogy $E_{rezg} = E_{mozg} + E_{rug}$

$E_{rezg} - E_{rug} = E_{rug}$

$E_{rezg} = 2 \cdot E_{rug}$

$\frac{1}{2} \cdot D \cdot A^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot D \cdot y^2$

$y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot A$

b)

$y(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t)$

$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot A = A \cdot \sin(\omega \cdot t) \Rightarrow \sin\alpha = \sin(\omega \cdot t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

A kérdezett arány $\frac{4\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{2\pi}=\frac{1}{2}$.

A periódusidő 50%-ban nagyobb a rezgőképes rendszer mozgási energiája, mint a rugalmas (potenciális) energiája.

M.9.73.

Adatok: l = 67 m, m = 28 kg, d = 3 m.

a)

$T=2\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g}}=16{,}4\text{ s}$

b)

Az ingatest oldalra húzásakor meg is emelkedik. Az általunk végzett munka helyzeti energianövekedést okoz:

$$W=\Delta E_h=mg\cdot\left(l-\sqrt{l^2-\left(\frac{d}{2}\right)^2}\right)=4{,}6\text{ J}.$$

Másképp: Az általunk végzett munka rezgési energiaként tárolódik.

$$W=E_r=\frac{1}{2}m\cdot\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{d}{2}\right)^2=4{,}6\text{ J}$$

M.9.74.

Adatok: l = 1,2 m, $A_1=6$ cm, $\Delta t=1{,}1$ s, $A_2=4$ cm.

A talaj első megmozdulása után a függőón

$T=2\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g}}=2{,}177$ s lengésidővel A_1 amplitúdóval az egyik szélső helyzetből indul.

A függőón mozgását közelíthetjük egy szélső helyzetből induló harmonikus rezgőmozgással.

Δt idő múlva a kitérése:

$y(\Delta t)=A_1\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\Delta t\right)=-6$ cm A függőón gyakorlatilag a másik szélsőhelyzetbe került. A máik irányú kitérítés során az amplitúdó nő:

$A=A_1+A_2=10$ cm

a) az m_1 tömegű test először megáll?

b) Mennyi idő telik el eddig a testek elengedésétől mérve?

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.9.75.

a)
Az m_1 tömegű test rezgésének amplitúdója Δl.

b)

Az m_1 tömegű test az egyensúlyi helyzeten való áthaladást követően $t_1 = \frac{T}{4}$ idő múlva áll meg.
t idő múlva a két test távolsága:

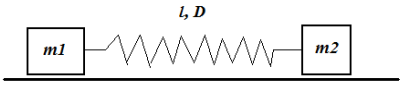
$$\Delta s = v_{max} \cdot t_1 - A = \frac{2\pi}{T} \cdot \Delta l \cdot \frac{T}{4} - \Delta l = \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \cdot \Delta l \ .$$

c)

$$t_2 = \frac{1}{4} \cdot \left(2\pi \cdot \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{D}} + 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m_1}{D}} \right) = \frac{\pi}{2} \cdot \left(\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{D}} + \sqrt{\frac{m_1}{D}} \right).$$

M.9.76.

a)



A két test tömegközéppont továbbra is nyugalomban marad. A tömegközéppont az m_1 tömegű testtől $l_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot l$ távolságra van, az m_2 tömegű testtől $l_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot l$ távolságra.

A megnyúlásokra hasonlóan adódik: $x_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot x$ és $x_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot x$

Az l_1 hosszú rugó rugóállandójának meghatározása:

$$D_1 \cdot x_1 = D \cdot x \Rightarrow D_1 = \frac{x}{x_1} \cdot D = \frac{m_1 + m_2}{m_2} \cdot D$$

Tehát a két részrugó rugóállandója:

$$D_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_2} \cdot D \text{ és } D_2 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \cdot D$$

A két test rezgésideje egyenlő egymással:

$$T_1 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m_1}{D_1}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{1}{D}} \ , \ T_2 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m_2}{D_2}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{1}{D}}$$

Megjegyzés: Az $\frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}$ mennyiséget redukált tömegnek szokás nevezni.

b) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{m_2}{m_1}$

c) $\frac{v_1}{v_2} = \frac{A_1 \cdot \omega}{A_2 \cdot \omega} = \frac{m_2}{m_1}$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

d) Az előző részfeladat eredményét felhasználva:
$\frac{I_1}{I_2} = \frac{m_1 v_1}{m_2 v_2} = \frac{m_1}{m_2} \cdot \frac{m_2}{m_1} = 1$, amikor a testeknek van lendülete, ugyanis fél periódusidőnként nulla a testek lendülete.
Megjegyzés: A lendület-megmaradás törvénye alapján zárt rendszer összes lendülete nem változik. Kezdetben az összes lendület nulla, hisz a testek állnak. A lendületek vektori összege csak úgy maradhat nulla, ha a testek lendületei azonos nagyságúak, ellentétes irányúak, vagy mindkettő nulla.

e) $\frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{1}{2} m_1 \cdot v_1^2}{\frac{1}{2} m_2 \cdot v_2^2} = \frac{m_2}{m_1}$

Hullámok terjedése, osztályozása. Hullámok leírása (4 feladat)

M.9.77.
Adatok: T = 0,5 s, A = 0,1 m, c = 4 m/s.

a)
Alkalmazzuk a hullámmozgás alapegyenletét:
$c = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow \lambda = c \cdot T = 2 \text{ m}$
b)
$$y(x,t) = A \cdot \sin 2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) = 0{,}1 \text{ m} \cdot \sin 2\pi \cdot \left(\frac{t}{0{,}5 \text{ s}} - \frac{x}{2 \text{ m}} \right)$$

M.9.78.

a)
A hullám kitérését leíró kétváltozós függvényről leolvasható
A = 10 cm, $\frac{2\pi}{T} = 12{,}57 \text{ 1/s} \Rightarrow T = 0{,}5 \text{ s}$,
$f = 1/T = 2 \text{ Hz}$
$\frac{2\pi}{\lambda} = 6{,}28 \text{ m} \Rightarrow \lambda = 1 \text{ m}$
$c = \lambda \cdot f = 2 \text{ m/s}$
b)
x = 0,2 m
$\frac{\Delta\varphi}{x} = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{x}{\lambda} \cdot 2\pi = 0{,}4 \cdot \pi$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.9.79.

a) A hullám egészét átengedi, amplitúdója *A*.

b) A hullám egy részét átengedi, amplitúdója $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot A$.

c) A hullám egészét nem engedi át, amplitúdója nulla.

M.9.80.

a)
Az 1. rés a hullám egészét nem engedi át, így a 2. rés mögött sem lesz hullám, amplitúdója nulla.
b)

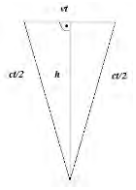
Az 1. rés a hullám egy részét engedi át, amplitúdója $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot A$, a 2. rés ennek a $\frac{\sqrt{2}}{2}$-

szeresét engedi át. A 2. rés mögötti hullám amplitúdója $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot A = \frac{1}{2} \cdot A$.

Megjegyzés: Arra a meglepő eredményre jutottunk, hogy ha két egymást merőlegesen keresztező polarizátor közé elhelyezünk egy harmadikat 45°-os szögben, akkor a rendszeren fél amplitúdójú hullám jut át.

Hullámok visszaverődése, törése (6 feladat)

M.9.81.
Adatok: *v* = 30 km/h = 8,33 m/s, c = 1450 m/s, t = 3 s.



Az ábra alapján: $h = \sqrt{\left(c \cdot \frac{t}{2}\right)^2 - \left(v \cdot \frac{t}{2}\right)^2} = \frac{t}{2} \cdot \sqrt{c^2 - v^2} \approx 2\,175$ m

Megjegyzés: Ugyanerre az eredményre jutnánk akkor is, ha a hajót állónak tekintenénk.

M.9.82.
Adatok: *v* = 100 m/s, *t* = 2 s, *c* = 340 m/s, $\alpha = 30^\circ$.

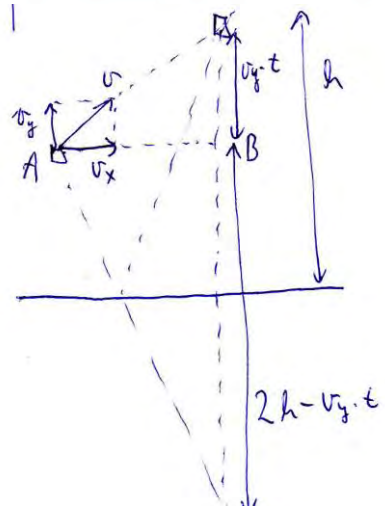
a)

Az M.9.81. ábrája alapján: $h = \sqrt{\left(c \cdot \frac{t}{2}\right)^2 - \left(v \cdot \frac{t}{2}\right)^2} = \frac{t}{2} \cdot \sqrt{c^2 - v^2} \approx 325$ m

b)

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT



Az ábra alapján az ABC háromszögre használjuk a Pitagorász törvényt:

$$(c \cdot t)^2 = (2h - v_y \cdot t)^2 + v_x^2 \cdot t^2$$

Az egyenletet rendezve másodfokú egyenlethez jutunk:

$$0 = h^2 - (v_y \cdot t) \cdot h + \frac{(v_x^2 + v_y^2) - c^2}{4} \cdot t^2$$

A másodfokú egyenlet megoldóképletét használva:

$$h_{1,2} = \frac{v_y \cdot t \pm \sqrt{(v_y \cdot t)^2 + (c^2 - (v_x^2 + v_y^2)) \cdot t^2}}{2}$$

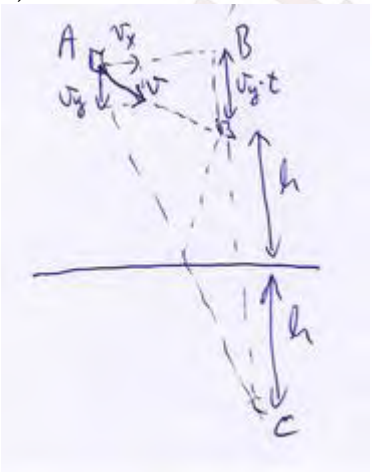
Csak a pozitív gyök megoldása a fizikai problémának. Helyettesítsünk be a képletbe:

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 100\,\text{m/s}$, $v_y = v \cdot \sin\alpha = 50\,\text{m/s}$, $t = 2\,\text{s}$, $c = 340\,\text{m/s}$

$$h = \frac{100\,\text{m} + 657{,}57\,\text{m}}{2} \approx 379\,\text{m}$$

A keresett magasság 379 m.

c)



Az ábra alapján az ABC háromszögre használjuk a Pitagorász törvényt:

$$(c \cdot t)^2 = (2h + v_y \cdot t)^2 + (v_x \cdot t)^2$$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Az egyenletet rendezve másodfokú egyenlethez jutunk:

$$0 = h^2 + \left(v_y \cdot t\right) \cdot h + \frac{\left(v_x^2 + v_y^2\right) - c^2}{4} \cdot t^2$$

A másodfokú egyenlet megoldóképletét használva:

$$h_{1,2} = \frac{-v_y \cdot t \pm \sqrt{\left(v_y \cdot t\right)^2 + \left(c^2 - v^2\right) \cdot t^2}}{2}$$

Csak a pozitív gyök megoldása a fizikai problémának. Helyettesítsünk be a képletbe:

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 100\,\text{m/s}$, $v_y = v \cdot \sin\alpha = 50\,\text{m/s}$, t = 2 s, c = 340 m/s

$$h = \frac{-100\,\text{m} + 657{,}57\,\text{m}}{2} \approx 279\,\text{m}$$

A keresett magasság 279 m.

M.9.83.

Adatok: $c_1 = 340\,\text{m/s}$, $c_2 = 1450\,\text{m/s}$, $\alpha = 5^\circ$.

a) $n_{2,1} = \frac{c_1}{c_2} = 0{,}23$

b) $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n_{2,1} = 0{,}23 \Rightarrow \sin\beta = \frac{\sin\alpha}{0{,}23} = 0{,}37 \Rightarrow \beta = 21{,}8^\circ$

c)

A beesési és a visszaverődési szög egyenlő egymással.

A visszavert és a megtört hang terjedési iránya közti szög:

$180^\circ - \alpha - \beta = 153{,}2^\circ$.

M.9.84.

Adatok: f = 5 Hz, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 42^\circ$, $\lambda_2 - \lambda_1 = 1\,\text{cm}$.

a) $n_{2,1} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = 0{,}747$

b)

Az *a)* részfeladat megoldásból tudjuk: $\frac{c_1}{c_2} = 0{,}747$.

A frekvencia mindkét közegben azonos, ezért

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{c_2}{f} - \frac{c_1}{f} \Rightarrow c_2 - c_1 = f \cdot \left(\lambda_2 - \lambda_1\right) = 5\,\text{cm/s}$$

$\frac{c_1}{c_2} = 0{,}747$, $c_2 - c_1 = 5\,\text{cm/s}$

A két egyenletet megoldva

$c_1 = 14{,}76\,\text{cm/s}$, $c_2 = 19{,}76\,\text{cm/s}$.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.9.85.

A vízből 90°-os beesési szöggel érkező (képzeletbeli) hanghullám törési szögét (a teljes visszaverődés határszögét) kell kiszámolnunk:

$$\frac{\sin 90^\circ}{\sin\beta} = \frac{1450}{340} \Rightarrow \beta = 13{,}6^\circ.$$

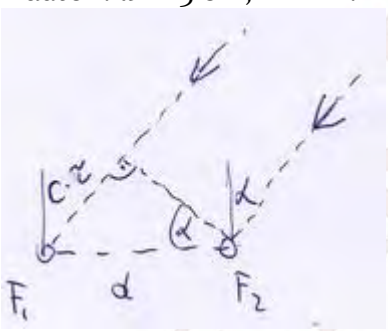
M.9.86.

Ahogy a hullám a mélyebb víz felől a sekélyebb víz felé halad, a terjedési sebessége csökken. Hullámtanilag sűrűbb közegbe érve a hullám terjedési iránya és az elképzelt közeghatárra merőleges egyenes által bezárt szög folyamatosan csökken a törési törvény alapján $\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c_1}{c_2}\right)$, míg nulla nem lesz. Úgy is gondolkodhatunk, hogy a ferdén érkező hullámfrontnak a parttól távolabbi része gyorsabban halad, ezért a hullámfront fokozatosan a parttal párhuzamos irányt veszi fel, a hullám terjedési sebessége egyre inkább merőleges a partra.

Hullámok találkozása, elhajlása (5 feladat)

M.9.87.

Adatok: d = 15 cm, $\alpha = 3^\circ$.



Az ábra alapján:

$$\sin\alpha = \frac{c\cdot\tau}{d} \Rightarrow \tau = \frac{d}{c}\cdot\sin\alpha = 2{,}3\cdot10^{-5}\ \text{s}$$

M.9.88.

Adatok: l = 0,3 m, $2A$ = 3 cm, $\tau = \frac{T}{2} \le \frac{1}{25}$ s.

a)

A „3 orsós” állóhullám azt jelenti, hogy 2 belső csomópont van, azaz a gumiszál hossza a benne haladó hullám 3/2-szerese

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$$l = \frac{3}{2} \cdot \lambda \Rightarrow \lambda = \frac{2}{3} \cdot l = 0{,}2 \text{ m}$$

$$T \le \frac{2}{25} \text{ s}$$

$$c = \frac{\lambda}{T} \ge 2{,}5 \text{ m/s}$$

b)

$$v_{max} = A \cdot \frac{2\pi}{T} \ge 1{,}178 \text{ m/s}$$

M.9.89.

Adatok: f = 12 Hz, c = 4 m/s.

A gumikötélben terjedő hullám hullámhossza: $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{1}{3}$ m.

A gumikötél mindkét vége rögzített, ezért a hossza a hullámhossz felének egészszám-szorosa lehet:

$l = k \cdot \frac{\lambda}{2} = k \cdot \frac{1}{6}$ m, ahol, k = 1, 2, 3, ...

M. 9.90.

Adatok: $\lambda = 4$ cm.

a) A két hullám által megtett utak különbsége határozza meg az interferencia milyenségét:

Ha $\Delta s = s_2 - s_1 = 2k \cdot \frac{\lambda}{2}$, akkor a két hullám maximálisan erősíti egymást.

Ha $\Delta s = s_2 - s_1 = (2k+1) \cdot \frac{\lambda}{2}$, akkor a két hullám maximálisan gyengíti egymást.

Most a két hullám által megtett utak különbsége pontosan 1 hullámhossznyi (4 cm). A két hullám maximálisan erősíti egymást.

b)

Most a két hullám által megtett utak különbsége pontosan fél hullámhossznyi (2 cm). A két hullám maximálisan gyengíti egymást.

c)

Most a két hullám által megtett utak különbsége nulla A két hullám azonos fázisban találkozik, maximálisan erősítik egymást.

d)

Hiperbolák, hisz ezek olyan pontok halmaza a síkban, amelyeknek a két rögzített ponttól (a fókuszpontoktól) mért távolságainak a különbsége állandó.

e)

A hiperbolaágak száma csökken, görbültségük növekszik. Ha például a források távolsága 4 cm-re csökken, akkor már csak egyetlen kioltási hiperbolaág-párat láthatunk, és az erősítések egymásra merőleges egyenesekké fajulnak el.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.9.91.

Adatok: f = 20 – 17 000 Hz, c = 340 m/s.

A hallható hangok hullámhossz-tartománya: $\lambda = 17\ \text{m} - 2\ \text{cm}$.
Az ajtó szélessége kb. 1 m.

A magas (17 kHz) hangok hullámhossza az ajtó szélességénél sokkal kisebb (2 cm), ilyen hangoknál az ajtó mögött elhajlást nem tapasztalunk. Azt is mondhatjuk, hogy a magas hangokra az ajtót körül vevő falaknak éles árnyéka van.
A legmélyebb (20 Hz) hangok hullámhossza az ajtó szélességénél sokkal nagyobb (17 m), ilyen hangoknál az ajtó mögött maximális elhajlást tapasztalunk.

Megjegyzés: Ezért van, hogy a sarkon a fény nem fordul be (kicsi a hullámhossza), de a hangot jól halljuk az árnyéktérben (különösen a mélyebb hangokat).

A hang (8 feladat)

M.9.92.

Adatok: f = 10 Hz, c = 1450 m/s.

Alkalmazzuk a hullámmozgás alapegyenletét:

$$c = \lambda \cdot f \Rightarrow \lambda = \frac{c}{f} = 145\ \text{m}.$$

M.9.93.
Adatok: f_1 = 30 kHz, c = 1450 m/s, f_2 =1 – 30 MHz.

a) Alkalmazzuk a hullámmozgás alapegyenletét:

$$c = \lambda \cdot f \Rightarrow \lambda = \frac{c}{f} \approx 4{,}8\ \text{cm}.$$

b) $c = \lambda \cdot f \Rightarrow \lambda = \frac{c}{f_2} \approx 1{,}45\ \text{mm} - 48{,}3\ \mu\text{m}$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.9.94.

Vizsgáljuk a hullámmozgás alapegyenletét:

$$c = \lambda \cdot f \ .$$

A „szokott módon” történő hangkiadás ugyanolyan λ hullámhosszat jelent, mert állóhullámok esetén a hullámhosszat a testüregek geometriai méretei határozzák meg.

Héliumban a hang terjedési sebessége $\frac{970}{340} = 2{,}85$-szer akkora, mint a levegőben.

Ezért a kibocsátott hang frekvenciája is 2,85-ször nagyobb lesz.

A kórustagok $440 \cdot 2{,}85 = 1254\ \text{Hz}$ frekvenciájú hangot hallanak.

(A hang frekvenciája nem változik a közeghatár átlépésekor, vagyis a levegőben is ugyanekkora marad a frekvencia.)

M.9.95.

Adatok: f = 440 Hz, l = 0,19 m.

a) A rezonáló levegőoszlop alsó vége zárt, a felsőé nyitott. Az első búgó hangot akkor halljuk, ha a levegőoszlop hossza a hullámhossz negyede.

$$l = \frac{\lambda}{4} \Rightarrow \lambda = 4 \cdot l = 0{,}76\ \text{m}$$

A hang terjedési sebessége levegőben:

$$c = \lambda \cdot f = 334{,}4\ \text{m/s}$$

b) Az első felharmonikust akkor hallanánk, ha a rezonáló levegőoszlop, ha a levegőoszlop hossza a hullámhossz háromnegyede.

$$l = \frac{3}{4} \cdot \lambda = 0{,}57\ \text{m}$$

c)

$$c = \lambda \cdot f = 4 \cdot l \cdot f \Rightarrow l_1 = \frac{c}{4f} = 14{,}7\ \text{cm},$$

illetve

$$c = \lambda \cdot f = \frac{4}{3} \cdot l \cdot f \Rightarrow l_2 = \frac{3c}{4f} = 44{,}1\ \text{cm}.$$

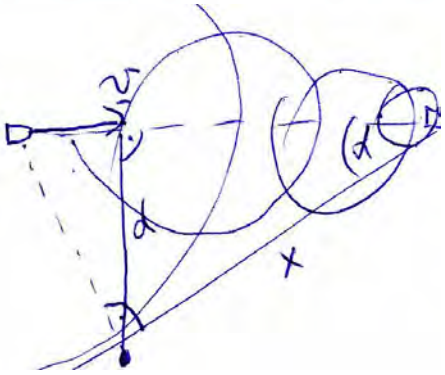
M.9.96.

Adatok: v = 680 m/s, c = 340 m/s.

A lövedék sebessége nagyobb a hang terjedési sebességénél.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT



Az ábra alapján:

$$\sin\alpha = \frac{d}{x},\ \sin\alpha = \frac{c\cdot t}{v\cdot t} = \frac{c}{v}$$

$$\frac{d}{x} = \frac{c}{v} \Rightarrow x = \frac{v}{c}\cdot d = 2\ \text{m}.$$

M.9.97.

Adatok: f = 400 Hz.

a) A nyitott síp mindkét vége szabad. A benne megszólaló alaphang hullámhosszának a fele a cső hossza:

$$c = \lambda\cdot f = 2l\cdot f \Rightarrow l = \frac{c}{2f} = 42{,}5\ \text{cm}.$$

b) A zárt síp egyik vége zárt, a másik szabad. A benne megszólaló alaphang hullámhosszának a negyede a cső hossza. Zárt végnél a hullámhossz kétszeres lesz (1,7 m), a frekvencia feleződik: 200 Hz.

M.9.98.

a)

A hangforrástól r_1 = 200 méterre a hangintenzitás:

$$\lg\frac{I_1}{I_0} = 11 \Rightarrow \frac{I_1}{I_0} = 10^{11} \Rightarrow I_1 = 10^{-1}\ \text{W/m}^2$$

Kétszer nagyobb sugarú (r_2 = 400 m) gömb egységnyi felületén negyed annyi teljesítmény megy át.

$$I_2 = 0{,}25\cdot 10^{-1}\ \text{W/m}^2$$

$$\lg\frac{I_2}{I_0} \approx 104\ \text{dB}$$

b)

A keresett távolságban $\lg\frac{I_3}{I_0} = 7 \Rightarrow \frac{I_3}{I_0} = 10^7 \Rightarrow I_3 = 10^{-5}\ \text{W/m}^2$

Tételezzük fel, hogy a hangforrást körül vevő gömbökön azonos teljesítmény halad át:

$$I_1\cdot 4r_1^2\pi = I_3\cdot 4r_3^2\pi \Rightarrow r_3 = \sqrt{\frac{I_1}{I_3}}\cdot r_1 = 20\ \text{km}.$$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

c)
Nem igaz az a feltételezés, hogy „a hangforrást körül vevő gömbökön azonos teljesítmény halad át”. A hangelnyelődés jelenségét nem vettük figyelembe.

M.9.99.

Adatok: $f_0 = 440$ Hz, $n = 2$ Hz.

A síp sebessége $v = 2R\pi \cdot n = 12{,}57$ m/s

A talajon álló észlelő a mozgó hangforrás hangját hallja.

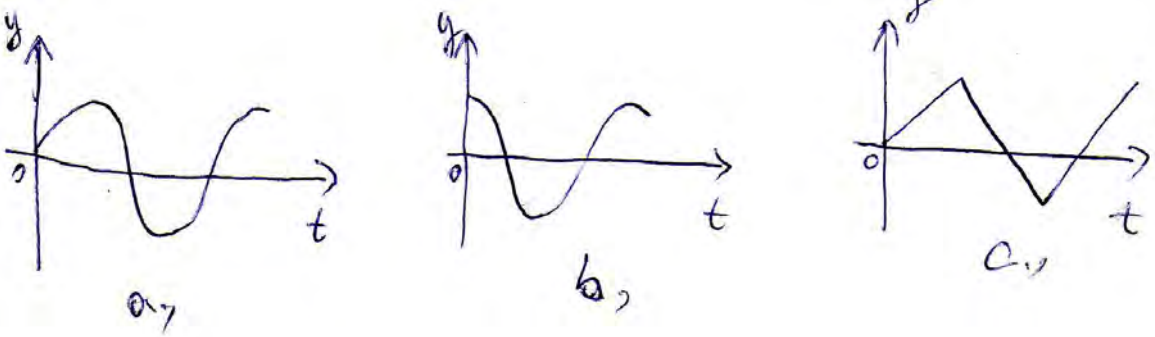
Ha a forrás közeledik az észlelőhöz: $f_1 = \frac{c}{c - v} \cdot f_0$.

Ha a forrás távolodik az észlelőhöz: $f_2 = \frac{c}{c + v} \cdot f_0$.

A két frekvencia különbsége: $\Delta f = f_1 - f_2 = \frac{2cv}{c^2 - v^2} \cdot f_0 \approx 32{,}6$ Hz

Tesztfeladatok: (15 db)

9.100. Az alábbi 3 grafikonon 3 periodikus mozgás kitérés – idő függvénye látható. A három közül melyik mozgás nem harmonikus rezgőmozgás?



M.9.100.
c)
A harmonikus rezgőmozgás kitérés – idő függvénye az idő szinuszos (koszinuszos) függvénye.

9.101. A harmonikus rezgőmozgást végző testnek mely kinematikai jellemzője legnagyobb az egyensúlyi helyzetében?
Kitérése
Sebessége
Gyorsulása.

M.9.101.

b)

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Az egyensúlyi helyzetben a sebesség legnagyobb, a kitérés és a gyorsulás nulla.

9.102. Melyik kinematikai jellemzője lesz nulla egy pillanatra a harmonikus rezgőmozgást végző testnek valamelyik szélső helyzetében?
A) Kitérése.
B) Sebessége.
C) Gyorsulása.

M. 9.102: A helyes válasz: B).

9.103. Milyen típusú a harmonikus rezgőmozgás egyensúlyi helyzete?
Stabil
Labilis
közömbös

M.9.103.

a)
A harmonikus rezgőmozgást végző testet az egyensúlyi helyzetéből kimozdítva, majd elenged, a test az egyensúlyi helyzet felé mozdul a ráható harmonikus erő hatására.

9.104. (E) A harmonikus rezgőmozgást végző tömegpont egy teljes rezgésre vonatkoztatott átlagsebessége hányszorosa a maximális sebességnek?
a) ½
b) 2/□□
c) □/2
d) 1

M.9.104.

b)

$$v_{\max} = \frac{2A\pi}{T},\ v_{átl.} = \frac{4A}{T}$$

$$\frac{v_{átl}}{v_{\max}} = \frac{2}{\pi}$$

9.105. (E) Mekkora annak a harmonikus rezgőmozgást végző tömegpontnak az amplitúdója, amelynek a legnagyobb sebessége 1 m/s, legnagyobb gyorsulása 2 m/s²?
a) 0,5 méter
b) 2 méter
c) 1,5 méter

M.9.105.
a)

$$A = \frac{v_{mx}^2}{a_{\max}} = 0{,}5 \text{ m}$$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

9.106. (E) A másodpercinga (amelynek lengésideje 2 s) hossza a Földön kb. 1 méter. Milyen hosszú a másodpercinga a Holdon, ahol a nehézségi gyorsulás értéke a földinek kb. a hatoda?

a) kb. 1/6 méter.
b) 1 méter.
c) 6 méter.
d) $\frac{\sqrt{6}}{6}$ méter

M.9.106.

a)

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g/6}} \Rightarrow l = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \cdot \frac{g}{6} = 0{,}1688\,\text{m} \approx \frac{1}{6}\,\text{m}$$

9.107. A harmonikus rezgőmozgást végző tömegpont mozgási energiája a legnagyobb érték felét veszi fel. Mit mondhatunk ekkor a kitérés nagyságáról?
A) A tömegpont kitérése az amplitúdó fele ($y = A/2$).
B) A tömegpont kitérése kisebb az amplitúdó felénél.
C) A tömegpont kitérése nagyobb az amplitúdó felénél.

9.107. Megoldás:
A helyes válasz: C).

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mv_{\max}^2$$

$$\frac{1}{2}DA^2 - \frac{1}{2}Dy^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}DA^2$$

$$y^2 = \frac{1}{2}A^2 \Rightarrow |y| = \frac{\sqrt{2}}{2}A \approx 0{,}707 \cdot A$$

9.108. A hagyományos „felhúzós” karórában egy megfeszített spirálrúgó tárolja a mechanikai energiát. Használat közben a rugó feszítettsége a felére csökken. A kezdetben tárolt energia hányadrészét „szórta szét” eközben a környezetnek?
Felét
Negyedét
háromnegyedét

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.9.108.

c)

Ha a rugó feszítettsége a felére csökkent, akkor a benne tárolt rugalmas energia a negyedére. Az eredeti rugalmas energia háromnegyedét „szórta szét” a környezetnek.

9.109.A parancsnok a menetelő katonáinak a hídra érés előtt kiadja a „ne tarts lépést!” parancsot azért, hogy a híd nehogy összedőljön. Miért szakadna le az egyszerre lépő katonák miatt a híd?

a) Ha a katonák egyszerre csapnák a hídhoz a lábukat, akkor egyidejűleg olyan nagy erő hatna a hídszerkezetre, amit az nem bírna el.
b) Előfordulhat, hogy a katonák lépéseinek üteme közel van a hídszerkezet sajátperiódusához és ekkor rezonanciakatasztrófa történhet.
c) A katonák lábai által a hídszerkezetnek egyszerre átadott energia tárolódik a hídban egészen addig, míg az össze nem dől.

M.9.109.

b)

A rezonancia feltétele, hogy a gerjesztő erő frekvenciája közel legyen a rezgőképes test sajátfrekvenciájához.

9.110. Levegőben 340 m/s sebességgel terjedő hullám olyan új közegbe hatol, ahol a terjedési sebessége 1450 m/s. Hogyan változik a hullám hullámhossza az új közegben?
Nem változik
$\frac{1450}{340} \approx 4{,}26$ **szeresére nő**
$\frac{340}{1450} \approx 0{,}23$ **szeresére csökken**

M.9.110.

b)

Az új közegbe hatoló hullám frekvenciája nem változik.

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\frac{c_1}{f}}{\frac{c_2}{f}} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{340}{1450}.$$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

9.111. Melyik hullámjelenséget nem hozhatnak létre longitudinális hullámok?
interferencia
polarizáció
hullámtörés

M.9.111.

b)

A polarizáció rezgési síkok kiszűrését jelenti, a longitudinális hullámban viszont nincs a terjedési irányon kívül más kitüntetett irány.

9.112. Hullámtanilag ritkább közegből sűrűbbe hatol a hullám. Hogyan változik az új közegben a hullám frekvenciája?
Nő
Nem változik
Csökken.

M. 912.

b)
Az új közegbe hatoló hullám frekvenciája nem változik.

9.113. (E) Egy pontban találkozik két, azonos frekvenciájú mechanikai hullám. Mi a feltétele annak, hogy interferencia alakuljon ki?
A találkozó hullámok terjedési sebessége egyenlő legyen.
A találkozó hullámok fáziskülönbsége állandó legyen.
A találkozó hullámok frekvenciakülönbsége egyenlő legyen.

M.9.113.

b)
Időben állandó fáziskülönbséggel találkozó hullámok szuperpozíciója okoz tartós mintázatú képet, interferenciát.

9.114. (E) Hosszú keskeny üveghengerbe lassan vizet folyatunk. Hogyan változik víz csorgatása során hallható hang magassága?
Nő
Nem változik
Függ az edény geometriai adataitól
Csökken.

M.9.114.

a)

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Ahogy telik az edény, úgy csökken a rezonáló levegőoszlop hossza. Így csökken a levegőoszlopban kialakuló állóhullám hullámhossza, és így nő a frekvencia, vagyis a megszólaló hang magassága.

9.115. A hang melyik fizikai jellemzője határozza meg a hang erősségét?
A) Amplitúdó.
B) Frekvencia.
C) Hullámhossz.

9.115. Megoldás: A helyes válasz: A).

9.116. A hang melyik fizikai jellemzője határozza meg a hangmagasságot?
Amplitúdó
Frekvencia
Hullámhossz

M.9.116.

b)
A hang magasságát a hanghullám frekvenciája határozza meg.

9.117. Zárt síp végét szabaddá tesszük. Hogyan változik a benne megszólaló alaphang hullámhossza?
Nem változik
Kétszeresére nő
Felére csökken

M.9.117.
b)
A negyed hullámhosszból fél hullámhossz lesz a cső hossza.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Esszékérdések: (2 darab)

9.118.
„Mechanikai rezgések”

A természetben és technikai környezetünkben a valamely fizikai mennyiség időben periodikus változása és ennek a rezgési állapotnak a térbeli tovaterjedése igen általános. A legegyszerűbb ilyen rezgés a mechanikai rezgés, a harmonikus rezgőmozgás.

Adja meg milyen fogalmak és fizikai mennyiségek segítik a harmonikus rezgőmozgás leírását!

Az egyenletes körmozgás és a harmonikus rezgőmozgás közötti kapcsolat alapján fogalmazza meg a harmonikus rezgőmozgás kinematikai függvényeit!

Jellemezzen egy rezgőképes rendszert energetikai szempontból akkor, ha az (ideális esetben) nem hat kölcsön a környezetével, ill. ha az (mint a valóságban) kölcsönhatásban áll a környezetével!

Mutasson be egy-egy rezgéssel kapcsolatos jelenséget, amelyben a csillapítás a felhasználó számára előnyös, illetve hátrányos!

M.9.118.

Megoldás-vázlat:

A rezgőmozgás fogalma. Harmonikus erő okoz harmonikus rezgőmozgást. Fogalmak: egyensúlyi helyzet, kitérés, amplitúdó, rezgésidő, frekvencia.

Kísérleti tapasztalat az egyenletes körmozgás és a harmonikus rezgőmozgás közötti kapcsolatra. A harmonikus rezgőmozgás kinematikai függvényei grafikonokkal:
$y(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t)$, $v(t) = A\omega \cdot \cos(\omega \cdot t)$, $a(t) = -A\omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t)$.

A testből és rugóból álló rendszerben két energiafajta van jelen. A mozgó testnek $E_{mozg.} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$ mozgási energiája van. A megfeszített rugó $E_{rug} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot y^2$ rugalmas energiával rendelkezik. A rezgőképes rendszer **rezgési energiája** a mozgási és a rugalmas energia összegével egyenlő:

$$E_{rezg.} = E_{mozg.} + E_{rug.}$$

Amikor a testet elengedjük a rezgés egyik szélső helyzetéből, a kitérése és a rugalmas energia is maximális:

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$$y=A,\ E_{rug}=\frac{1}{2}\cdot D\cdot y^2=\frac{1}{2}\cdot D\cdot A^2.$$

Motorok, gépek gyengén rögzített alkatrészei kellemetlenül, esetenként veszélyesen berezeghetnek, itt a csillapítás előnyös. A rezgés csillapítása előnyös még a földrengések hatásai elleni védekezésnél, a járműveknél.

A rezgési állapot fenntartása a cél óraszerkezet működtetésénél, egy gyermek hintáztatásánál.

9.119.
„Hang”

A hallás segítségével rengeteg információt gyűjthetünk környezetünkből. Csak a látás biztosít ennél többet. A hangképzés és a hallás képessége hozzájárul az élőlények kommunikációjához.

Ismertesse a hang keletkezésének körülményeit!

A hanghullámot jellemző fizikai mennyiségek hogyan határozzák meg a hang tulajdonságait?

Mit nevezünk tisztahangnak? Mi biztosítja minden ember hangjának egyediségét? A zenei hangok egymás utáni megszólalását mikor érezzük kellemesnek?

Sorolja fel a hanghullámok terjedési tulajdonságait és közülük egyet ismertessen részletesebben!

M.9.119.

Megoldás-vázlat:

A hang létrejöttéhez elengedhetetlen egy hangforrás és az azt körülvevő rugalmas közeg.

A hanghullámot jellemző fizikai mennyiségek
Terjedési sebesség, hangerősség, hangmagasság

A tisztahangot egyetlen „szinuszos” frekvencia határoz meg. Az alaphanggal egyidejűleg megszólaló felhangok intenzitásának aránya adja a hang egyediségét, a hang színezetét.
Egy hangközt akkor érzünk kellemesnek, ha a két hang frekvenciájának aránya minél kisebb egész számok aránya.

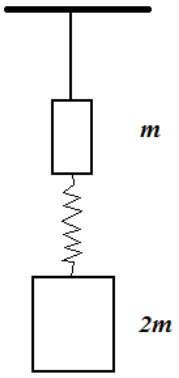
A hanghullámok terjedési tulajdonságai: terjedési sebesség, hangvisszaverődés, hangtörés, hangelhajlás, hangelnyelődés, Doppler-jelenség.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Kihívást jelentő feladatok: (2 darab)

M.9.120.



A fonál elégetése előtt a testek egyensúlyban (nyugalomban) vannak, ezért a rájuk ható erők eredője nulla:

m tömegű testre: $F_k = F_r + mg$

2m tömegű testre: $F_r = 2mg$

a)
A fonál elégetése után alkalmazzuk a dinamika alapegyenletét $(\sum F = ma)$:
m tömegű testre:
$F_r + mg = m \cdot a_1$
$2mg + mg = m \cdot a_1 \Rightarrow a_1 = 3g = 30\ \text{m/s}^2$

2m tömegű testre: $F_r = 2mg \Rightarrow a_2 = 0$

b)
A fonál elégetése után a pontrendszer tömegközéppontja szabadon esik, a két test meg harmonikus rezgőmozgást végez.

Az *m* tömegű test rezgésének amplitúdója $A_1 = \Delta l_1 = \frac{2}{3} \cdot \Delta l = 20\ \text{cm}$, a *2m* tömegű test rezgésének amplitúdója $A_2 = \Delta l_2 = \frac{1}{3} \cdot \Delta l = 10\ \text{cm}$.

Az m tömegű testet mozgató rugórész rugóállandója:

$$D_1 \cdot \Delta l_1 = D \cdot \Delta l \Rightarrow D_1 = \frac{\Delta l_1}{\Delta l} \cdot D$$

A test rezgésideje:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D_1}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{\frac{\Delta l_1}{\Delta l} \cdot D}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{\frac{\Delta l_1}{\Delta l} \cdot \frac{2mg}{\Delta l}}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\Delta l^2}{2g \cdot \Delta l_1}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{3 \cdot \Delta l}{g}} = 0{,}6\pi\ \text{s} = 1{,}88\ \text{s}$$

Az elégetéstől számítva $t = \frac{T}{4} \approx 0{,}47\ \text{s}$ lesz a rugó először nyújtatlan.

c)
A pontrendszer sebessége a plafonhoz képest:
$v = g \cdot t = 4{,}7\ \text{m/s}$

A testek ekkor az egyensúlyi helyzeten haladnak át, sebességük a tömegközépponthoz képest maximális:

m tömegű testnek: $v_{\max,1} = A_1 \cdot \frac{2\pi}{T} = 2/3\ \text{m/s}$,

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

2m tömegű testnek: $v_{\max,2} = A_2 \cdot \frac{2\pi}{T} = 1/3 \text{ m/s}$.

Az *m* tömegű test sebessége a plafonhoz képest: $v_1 = v + v_{\max,1} = 5{,}367 \text{ m/s}$.
Az *2m* tömegű test sebessége a plafonhoz képest: $v_2 = v + v_{\max,2} = 4{,}367 \text{ m/s}$.

M.9. 121.
Adatok: h = 1 m, m = 0,01 kg.

a)
Alkalmazzuk a gyöngyre a munkatételt először (1), amikor a gyöngyöt a pálca tetején elengedjük, másodszor (2), amikor a pálca aljáról *v* sebességgel felfelé indítjuk:

$$\sum W = \Delta E_{mozg}$$
$$W_{neh} + W_{fék} = 0$$
$$mgh + W_{fék} = 0 \qquad (1)$$
$$-mgh + W_{fék} = 0 - \frac{1}{2}mv^2 \qquad (2)$$

Vegyük a két egyenlet különbségét ((1) – (2)):

$$2mgh = \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow v = 2\sqrt{gh} = 6{,}3 \text{ m/s}.$$

b)
Az (1) egyenlet alapján:

$$W_{fék} = -mgh$$
$$-\frac{0 + F_{\max}}{2} \cdot h = -mgh \rightarrow F_{\max} = 2mg = 0{,}2 \text{ N}.$$

c)
A pálca mentén mozgó gyöngyre ható erők eredőjére vonatkozóan a következő megállapításokat tehetjük:

- A pálca tetején lefelé mutat, nagysága *mg*.
- A pálca közepén nulla.
- A pálca alján felfelé mutat, nagysága *mg*.
- A pálca mentén az eredő erő nagysága egyenletes változik.

Ezekből a tényekből megállapíthatjuk, hogy a gyöngyre ható eredő erő harmonikus, ezért a gyöngy harmonikus rezgőmozgást végez.
A környezetet „helyettesítő rugó” rugóállandója:

$$D = \frac{mg}{h/2} = 0{,}2 \text{ N/m}.$$

A keresett *t* idő megegyezik a rezgőmozgás fél periódusidejével:

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$$t = T/2 = \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}} = \pi \cdot \sqrt{\frac{h}{2g}} \approx 0{,}7 \text{ s}.$$

d)
Alkalmazzuk a gyöngyre a munkatételt, amikor a pálca aljáról *v'* sebességgel felfelé indítjuk:

$$\sum W = \Delta E_{mozg}$$

$$W_{neh} + W_{fék} = \Delta E_{mozg}$$

$$-mg\frac{h}{2} + \left(-\frac{F_{\max} + \frac{1}{2}F_{\max}}{2} \cdot \frac{h}{2} \right) = 0 - \frac{1}{2}mv'^2$$

Ezt az egyenletet rendezve:

$$v' = \sqrt{gh + \frac{3F_{\max}h}{4m}} = 5 \text{ m/s}.$$

M.9.122.
Adatok: f_1 = 440 1/s, f_{leb} = 5 1/s.

1. megoldás:
Az egyik hangvilla által adott hang periódusideje legyen T_1, a másiké $T_2 > T_1$. Legyen T az a legkisebb időtartam, ami alatt az 1-es hangforrás pontosan periódusnyival kevesebb hullámot bocsátott ki.
$T = k \cdot T_2 = (k-1) \cdot T_1$, ahol *k* egész szám, kifejezve

$$k = \frac{T_1}{T_1 - T_2}$$

A keresett *T* periódusidő, majd a lebegés *f* frekvenciája:

$$T = k \cdot T_2 = \frac{T_1 \cdot T_2}{T_1 - T_2}$$

$$f_{leb.} = \frac{1}{T} = f_2 - f_1$$

A keresett f_2 frekvencia lehetséges két értéke 435 1/s, 445 1/s.

1. megoldás:
Adjuk össze a két harmonikus függvény kitérés függvényét!

$$y = y_1 + y_2 = A \cdot \sin\omega_1\left(t - \frac{x}{c}\right) + A \cdot \sin\omega_2\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

Használjuk fel a $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ azonosságot.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

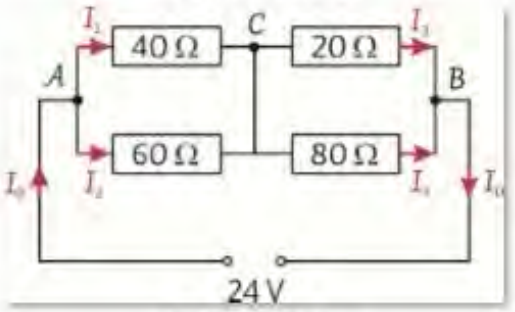
SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$$y = 2A \cdot \cos\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\left(t - \frac{x}{c}\right) \cdot \sin\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

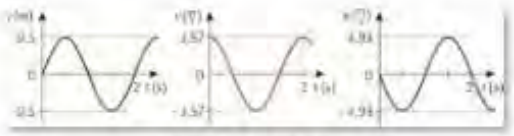
Ha $\omega_1 \approx \omega_2$ akkor a lebegés jelensége áll elő: az $\frac{f_1 + f_2}{2}$ frekvenciájú igen szapora rezgés amplitúdóját az $\frac{f_2 - f_1}{2}$ frekvenciájú koszinuszos függvény határolja. A lebegés frekvenciája $f_{leb.} = f_2 - f_1$.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

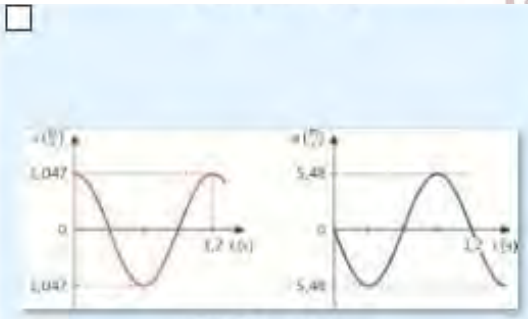
KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT



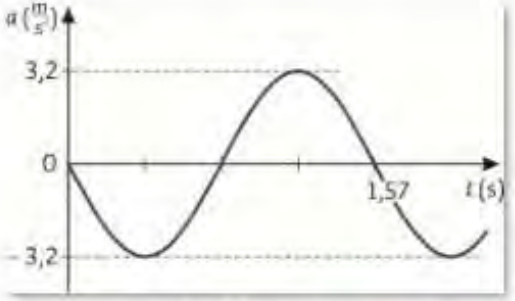
8_28M_81540.jpg



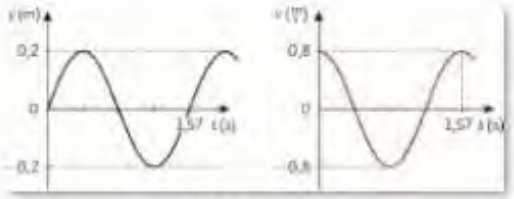
9_01M_81540.jpg



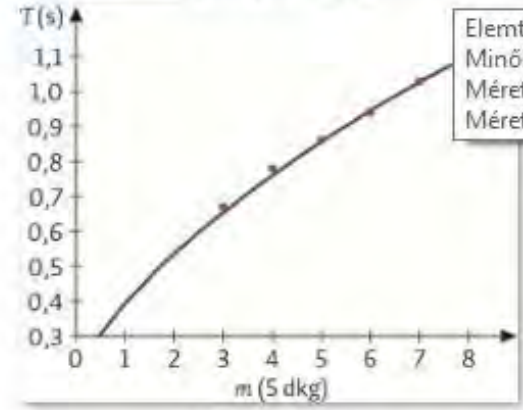
9_03M_81540.jpg



9_04M_81540.jpg

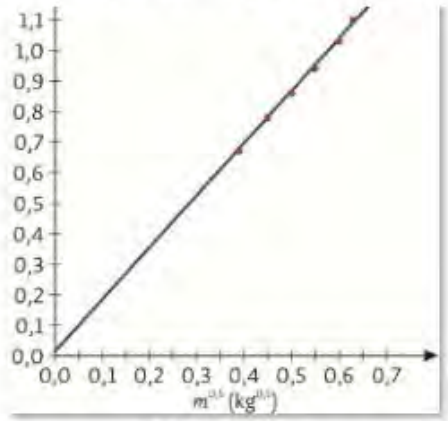


9_05M_81540.jpg

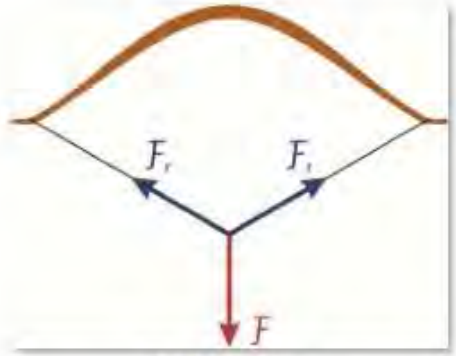


9_06M_81540.jpg

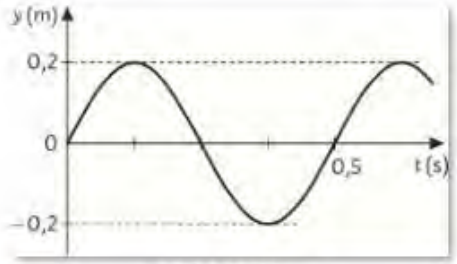
KÉZIRAT



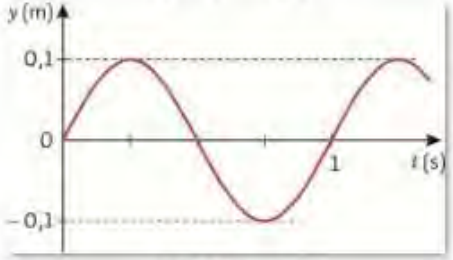
9_07M_81540.jpg



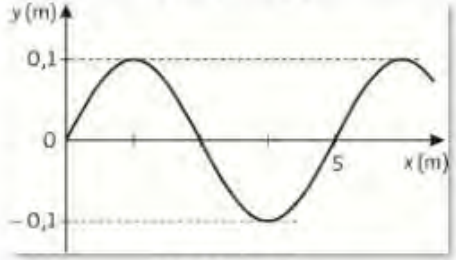
9_08M_81540.jpg



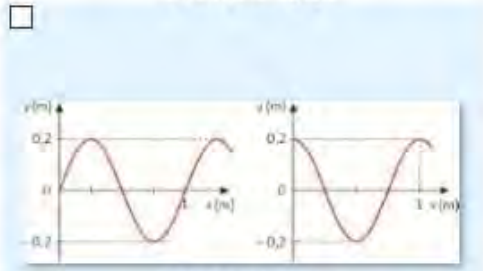
9_10M_81540.jpg



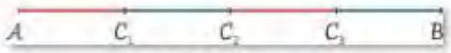
9_11M_81540.jpg



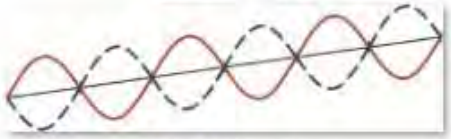
9_12M_81540.jpg



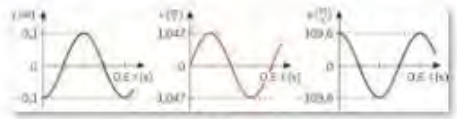
9_13M_81540.jpg



9_16M_81540.jpg



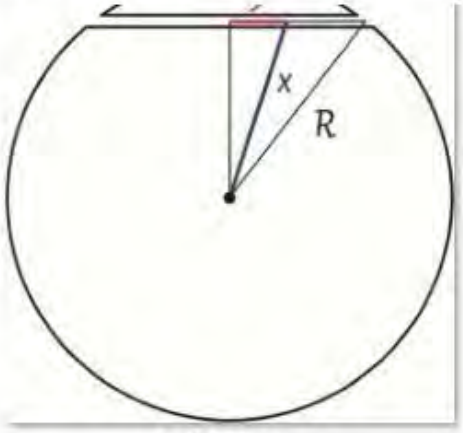
9_17M_81540.jpg



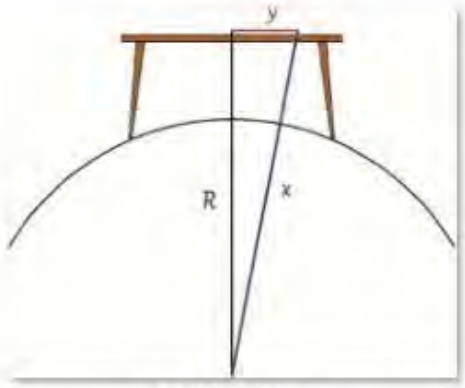
9_19M_81540.jpg

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

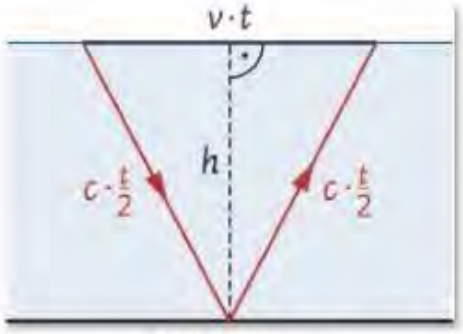
SZERKESZTETLEN KÉZIRAT



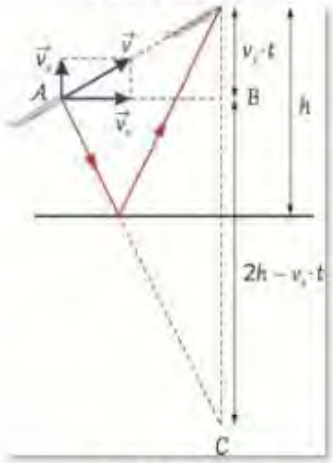
9_20M_81540.jpg



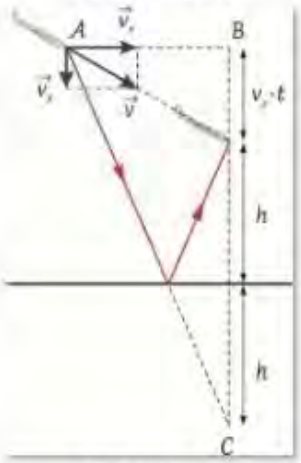
9_21M_81540.jpg



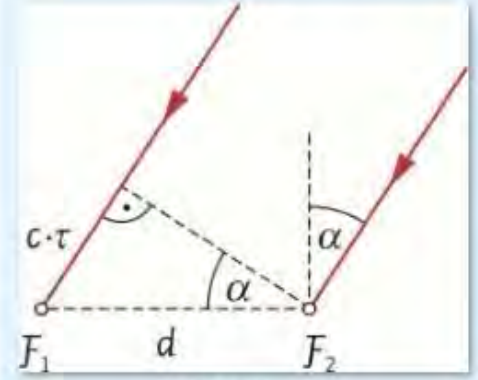
9_25M_81540.jpg



9_26M_81540.jpg



9_27M_81540.jpg



9_28M_81540.jpg



A FELADATGYŰJTEMÉNY MEGOLDÁSAI SZERKESZTETLEN KÉZIRAT 10-11. fejezetek

OKTATÁSKUTATÓ ÉS FEJLESZTŐ INTÉZET, BUDAPEST

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Tartalom

NT-RE81540/3.RÉSZ

Az alábbi fejezetek megoldásai további kötetben találhatók.

1. Kinematika – Mozgástan (dr. Fülöp Ferenc) 13
2. Dinamika – Erőtan (Csajági Sándor) 31
3. Munka, energia (Csajági Sándor, dr. Fülöp Ferenc).....69
4. Folyadékok és gázok mechanikája (Csajági Sándor, dr. Fülöp Ferenc) 87
5. Hőtani folyamatok (Póda László 99
6. Termodinamika (Póda László) 115
7. Elektrosztatika (Urbán János).....135
8. Az elektromos áram (Urbán János).....149
9. Rezgések és hullámok (Simon Péter).....161

Ebben a kéziratban található megoldások oldalszáma (a feladatgyűjteményben)---a kéziratban

10. Elektromágneses jelenségek (Dégen Csaba) .....79.....3
11. Optika (Simon Péter) ..... 197.....56

Az alábbi fejezetek megoldásai további kötetben találhatók.

12. Atomfizika (Elblinger Ferenc) 217
13. Magfizika (Elblinger Ferenc) 233
14. Csillagászat (Dégen Csaba) 249

Szerzők: CSAJÁGI SÁNDOR, DÉGEN CSABA, ELBLINGER FERENC, DR. FÜLÖP FERENC, PÓDA LÁSZLÓ, SIMON PÉTER, URBÁN JÁNOS

Alkotószerkesztő és lektor: DR. HONYEK GYULA

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

10. ELEKTROMÁGNESES JELENSÉGEK

ALAPOZÓ FELADATOK

A MÁGNESES MEZŐ

M.10.1

$$M_{max} = B \cdot N \cdot I \cdot A = 0{,}7T \cdot 50 \cdot 0{,}1A \cdot 8 \cdot 10^{-4} m^2 = 2{,}8 \cdot 10^{-3} Nm$$

M.10.2

$$M_{max} = B \cdot N \cdot I \cdot A = 0{,}25T \cdot 200 \cdot 0{,}06A \cdot 15 \cdot 10^{-4} m^2 = 4.5 \cdot 10^{-3} Nm$$

M.10.3

Az a jobb magnetométer, amelyen nagyobb forgatónyomatékot okoz ugyanaz a mágneses mező. A forgatónyomaték értéke a magnetométer NIA szorzatával (mágneses nyomatékával) arányos.

Az első tekercsnél: $N \cdot I \cdot A = 350 \cdot 0{,}8A \cdot 4 \cdot 10^{-4} m^2 = 0{,}112 Am^2$

A másodiknál: $N \cdot I \cdot A = 200 \cdot 0{,}9A \cdot 5 \cdot 10^{-4} m^2 = 0{,}09 Am^2$

Az első tekercset érdemes választani.

M.10.4

Az $M_{max} = B \cdot N \cdot I \cdot A$ képletből B-t kifejezve kapjuk:

$$B = \frac{M_{max}}{N \cdot I \cdot A} = \frac{0{,}18 \cdot 10^{-3} Nm}{150 \cdot 0{,}3A \cdot 4 \cdot 10^{-4} m^2} = 0{,}01T = 10mT$$

M.10.5

Az $M_{max} = B \cdot N \cdot I \cdot A$ képletből B-t kifejezve kapjuk:

$$B = \frac{M_{max}}{N \cdot I \cdot A} = \frac{9 \cdot 10^{-8} Nm}{2000 \cdot 1{,}2A \cdot 5 \cdot 10^{-4} m^2} = 7{,}5 \cdot 10^{-8} T = 75nT$$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.10.6

$\Phi = B \cdot A = 0{,}8T \cdot 25 \cdot 10^{-4} m^2 = 2 \cdot 10^{-3} Wb$

M.10.7

a) $\Phi = B \cdot A = 0{,}6T \cdot 7{,}5 \cdot 10^{-4} m^2 = 4{,}5 \cdot 10^{-4} Wb$

b) A 250 menetes tekercsen a fluxus 250-szer több, mint az a) feladatban, azaz 0,1125 Wb

M.10.8

A $\Phi = B \cdot A$ képletből a kör alakú drótkeret területét kifejezve:

$A = \frac{\Phi}{B} = \frac{9 \cdot 10^{-4} Wb}{0{,}7T} = 1{,}286 \cdot 10^{-3} m^2$. A kör sugara az $A = r^2 \cdot \pi$ képletből:

$r = \sqrt{\frac{A}{\pi}} = 2{,}023 \cdot 10^{-2} m \approx 2cm$

AZ ÁRAM MÁGNESES MEZŐJE

M.10.9

$B = \mu_0 \cdot \frac{N \cdot I}{\ell} = 1{,}256 \cdot 10^{-6} \frac{Vs}{Am} \cdot \frac{500 \cdot 4{,}5A}{0{,}08m} = 0{,}0353T = 35{,}3mT$

M.10.10

$B = \mu_0 \cdot \frac{N \cdot I}{\ell} = 1{,}256 \cdot 10^{-6} \frac{Vs}{Am} \cdot \frac{300 \cdot 1{,}2A}{0{,}06m} = 7{,}54 \cdot 10^{-3}T = 7{,}54mT$

M.10.11

$B = \mu_0 \cdot \frac{N \cdot I}{\ell} = 1{,}256 \cdot 10^{-6} \frac{Vs}{Am} \cdot \frac{200 \cdot 0{,}01A}{0{,}01m} = 2{,}51 \cdot 10^{-4}T = 0{,}251mT$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.10.12

A $B = \mu_0 \cdot \frac{N \cdot I}{\ell}$ képletből az áramerősséget kifejezve kapjuk:

$$I = \frac{B \cdot \ell}{\mu_0 \cdot N} = \frac{5 \cdot 10^{-3} T \cdot 0{,}046 m}{1{,}256 \cdot 10^{-6} \frac{Vs}{Am} \cdot 350} = 0{,}523 A = 523 mA$$

M.10.13

Az acél relatív permeabilitását 2000-nek véve kapjuk:

$$B = \mu_r \cdot \mu_0 \cdot \frac{N \cdot I}{\ell} = 2000 \cdot 1{,}256 \cdot 10^{-6} \frac{Vs}{Am} \cdot \frac{60 \cdot 2{,}5 A}{0{,}1 m} = 3{,}77 T$$

M.10.14

A $B = \mu_r \cdot \mu_0 \cdot \frac{N \cdot I}{\ell}$ képletből a relatív permeabilitást fejezzük ki:

$\mu_r = \frac{B \cdot \ell}{\mu_0 \cdot N \cdot I} = \frac{0{,}7 T \cdot 0{,}15 m}{1{,}256 \cdot 10^{-6} \frac{Vs}{Am} \cdot 500 \cdot 0{,}62 A} \approx 270$. Ez az érték a nikkelnek felel meg,

tehát a vasmag anyaga nikkel lehet.

M.10.15

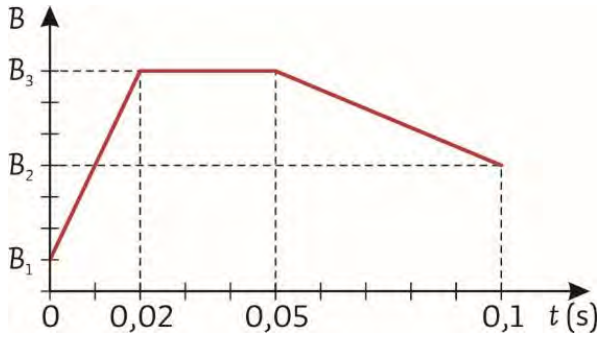
A $B = \mu_r \cdot \mu_0 \cdot \frac{N \cdot I}{\ell}$ képletből a menetszámot kifejezve kapjuk:

$$N = \frac{B \cdot \ell}{\mu_r \cdot \mu_0 \cdot I} = \frac{1 T \cdot 0{,}3 m}{2000 \cdot 1{,}256 \cdot 10^{-6} \frac{Vs}{Am} \cdot 0{,}4 A} = 298 \approx 300$$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.10.16



$$B_1 = \mu_r \cdot \mu_0 \cdot \frac{N \cdot I}{\ell} = 200 \cdot 1{,}256 \cdot 10^{-6} \frac{Vs}{Am} \cdot \frac{70 \cdot 0{,}01A}{7 \cdot 10^{-3} m} = 2{,}51 \cdot 10^{-2} T = 25{,}1mT$$

Hasonlóan B_2 = 176mT és B_3 = 100,5mT

M.10.17

$\mathrm{B} = \mu_0 \cdot \frac{\mathrm{I}}{2\pi \cdot \mathrm{r}} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}} \cdot \frac{150\mathrm{A}}{2\pi \cdot 3\mathrm{m}} = 10^{-5}\mathrm{T} = 0{,}05\mathrm{mT}$, iránya a felsővezetékre merőlegesen, attól 3 m sugárral húzott kör érintője irányába mutat.

Megjegyzés: Az érték közel azonos a Föld talajon mért mágneses indukcióvektorának nagyságával. Az iránytű állását befolyásolhatja!

M.10.18

A $\mathrm{B} = \mu_0 \cdot \frac{\mathrm{I}}{2\pi \cdot \mathrm{r}}$ képletből a távolságot fejezzük ki:

$$\mathrm{r} = \mu_0 \cdot \frac{\mathrm{I}}{2\mathrm{B} \cdot \pi} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}} \cdot \frac{3 \cdot 10^4 \mathrm{A}}{1\mathrm{T} \cdot \pi} = 0{,}012\mathrm{m} = 12\mathrm{mm}$$

M.10.19

A $\mathrm{B} = \mu_0 \cdot \frac{\mathrm{N} \cdot \mathrm{I}}{2\mathrm{R_k} \cdot \pi}$ képletet átalakítva kapjuk: $I = \frac{B \cdot 2R_k \cdot \pi}{\mu_0 \cdot N} = \frac{5 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}02m \cdot \pi}{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am} \cdot 60} = 4{,}17A$

Megj:Az arany diamágneses anyag, relatív permeabilitása alig kisebb, mint 1, ezért a számításnál nem vettük figyelembe. Ha a gyűrű anyaga ferromágneses lett volna, úgy a képlet nevezőjében a μ_0 elé az adott ferromágneses anyag relatív permeabilitását is bele kellett volna számítani.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

ERŐHATÁSOK MÁGNESES MEZŐBEN

M.10.20

$F_L = I \cdot B \cdot \ell = 2{,}65A \cdot 5 \cdot 10^{-5}T \cdot 0{,}45m = 5{,}96 \cdot 10^{-5}N \approx 60\,\mu\text{N}.$

Megj: AFöld mágneses mezőjéből származó Lorentz-erő még nagyobb áramerősségek esetén is elhanyagolható nagyságú, ezért csak erős mágneses mezőben és nagy áramerősség esetén számottevő.

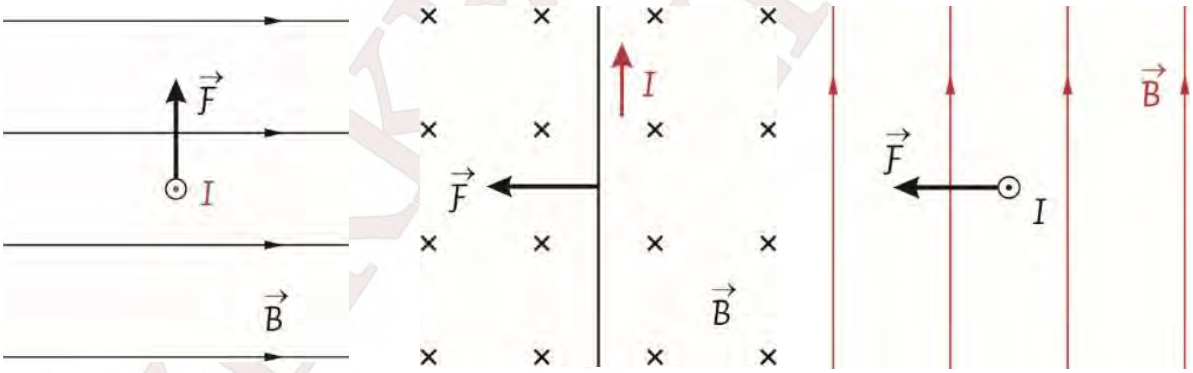
M.10.21

$\text{F}_\text{L} = \text{I} \cdot \text{B} \cdot \ell = 1{,}7\text{A} \cdot 2{,}5\text{T} \cdot 0{,}035\text{m} = 0{,}1488\text{N} \approx 0{,}15\text{N}$

M.10.22

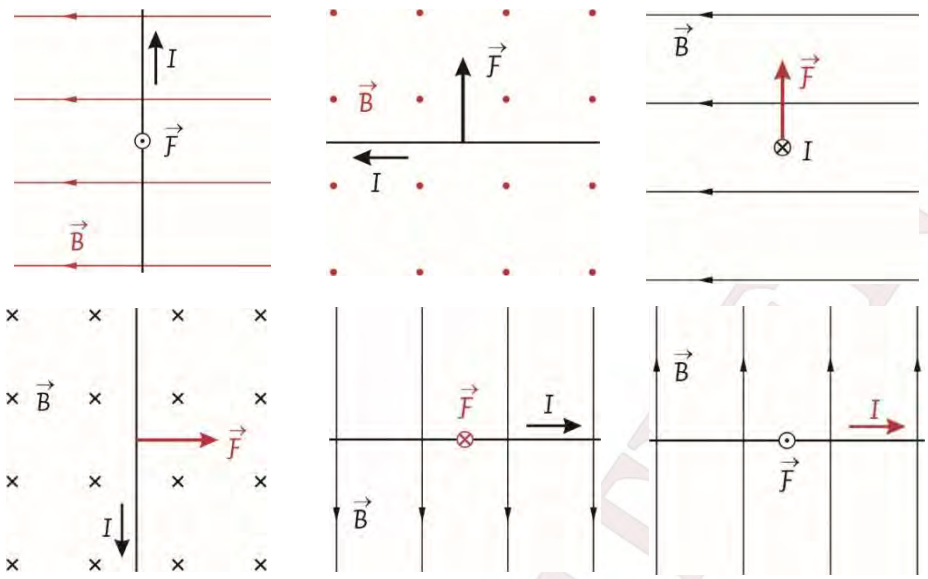
$F_L = I \cdot B \cdot \ell = 150A \cdot 3 \cdot 10^{-5}T \cdot 8m = 0{,}036N = 36mN$, iránya a jobbkéz-szabály alapján függőlegesen felfele mutat (csökkenti a vezeték súlyát).

M.10.25



KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT



M.10.24.

A Lorentz-erőnek egyensúlyt kell tartania a vezeték súlyával, így a Lorentz-erő is 0,6 N. A Lorentz-erő képletét átalakítva $B = \frac{F_L}{I \cdot \ell} = \frac{0{,}6N}{15A \cdot 1{,}8m} = 2{,}22 \cdot 10^{-2}T = 22{,}2mT$, iránya vízszintes, merőleges a vezetékre.

M.10.25

A Lorentz-erő képletéből I-t kifejezve kapjuk: $I = \frac{F_L}{B \cdot \ell} = \frac{0{,}22N}{0{,}7T \cdot 0{,}8m} = 0{,}393A \approx 0{,}4A$

M.10.26

$$F_L = Q \cdot v \cdot B = 1{,}6 \cdot 10^{-19}C \cdot 6{,}5 \cdot 10^{7}\frac{m}{s} \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-3}T = 1{,}56 \cdot 10^{-14}N$$

Megjegyzés: Nem meglepő, hogy a végeredmény ilyen kis szám lett, hiszen az F=ma képlet szerint az elektron rendkívül kis tömege igen nagy gyorsulás alakul ki.

M.10.27

$$r = \frac{m \cdot v}{Q \cdot B} = \frac{1{,}6726 \cdot 10^{-27}kg \cdot 9{,}5 \cdot 10^{5}\frac{m}{s}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}C \cdot 2 \cdot 10^{-5}T} = 496m \approx 500m$$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.10.28

$F_L = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_1 \cdot I_2}{d} \cdot \ell = 2 \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am} \cdot \frac{(120A)^2}{0{,}85m} \cdot 0{,}5m = 1{,}694 \cdot 10^{-3} N \approx 1{,}7mN$, a vezetékek ekkora erővel taszítják egymást.

AZ ELEKTROMÁGNESES INDUKCIÓ

M.10.29

Kezdetben a hurokban nincs mágneses mező, ezáltal a fluxusa is nulla. A jelenség végén a hurok fluxusa: $\Phi = B \cdot A = 0{,}7T \cdot 35 \cdot 10^{-4} m^2 = 2{,}45 \cdot 10^{-3} Wb$

Az indukált feszültség: $U_i = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{2{,}45 \cdot 10^{-3} Wb}{3{,}15s} = 7{,}8 \cdot 10^{-4} V$

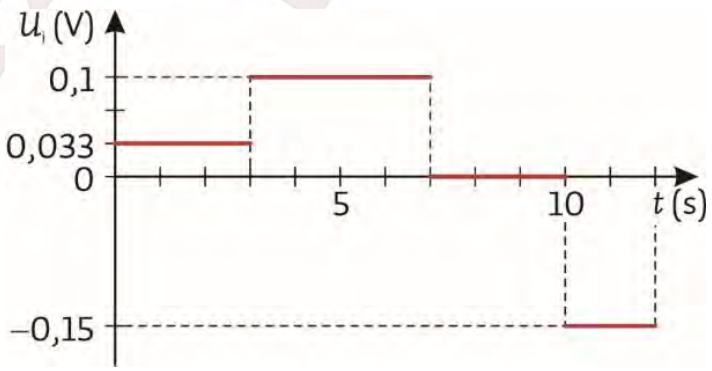
M.10.30

Az 1. szakaszban: $U_i = N \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = 100 \cdot \frac{1 \cdot 10^{-3} Wb}{3s} = 0{,}033V$

A 2. szakaszban: $U_i = N \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = 100 \cdot \frac{4 \cdot 10^{-3} Wb}{4s} = 0{,}1V$

A 3. szakaszban nem változik a fluxus, így $U_i = 0V$

A 4. szakaszban: $U_i = N \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = 100 \cdot \frac{-3 \cdot 10^{-3} Wb}{2s} = -0{,}15V$



(M.10.30. ábra)

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.10.31

Kezdetben a gyűrűben nincs mágneses mező, ezáltal a fluxusa is nulla. A jelenség végén a gyűrű fluxusa: $\Phi = \mathrm{B} \cdot \mathrm{A} = 0{,}01\mathrm{T} \cdot 3{,}15 \cdot 10^{-4}\mathrm{m}^2 = 3{,}15 \cdot 10^{-6}\mathrm{Wb}$

Az indukált feszültség: $U_i = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{3{,}15 \cdot 10^{-6} Wb}{1{,}2s} = 2{,}63 \cdot 10^{-6} V$

Ebből Ohm törvénye alapján: $I = \frac{U_i}{R} = \frac{2{,}63 \cdot 10^{-6} V}{3 \cdot 10^{-4}\Omega} = 8{,}8 \cdot 10^{-3} A = 8{,}8mA$

M.10.32

Kezdetben a fluxus: $\Phi_1 = \mathrm{B} \cdot \mathrm{A}_1 = 2\mathrm{T} \cdot 50 \cdot 10^{-4}\mathrm{m}^2 = 0{,}01\mathrm{Wb}$

A megrántás végén: $\Phi_2 = \mathrm{B} \cdot \mathrm{A}_2 = 2\mathrm{T} \cdot 5 \cdot 10^{-4}\mathrm{m}^2 = 0{,}001\mathrm{Wb}$

A fluxusváltozás: $\Delta\Phi = \Phi_1 - \Phi_2 = 0{,}009\mathrm{Wb}$

Az indukált fluxus: $\mathrm{U_i} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta \mathrm{t}} = \frac{0{,}009\mathrm{Wb}}{0{,}2\mathrm{s}} = 0{,}045\mathrm{V} = 45\mathrm{mV}$

M.10.33

$U_i = B \cdot \ell \cdot v = 4 \cdot 10^{-5} T \cdot 2{,}2m \cdot 0{,}8\frac{m}{s} = 7 \cdot 10^{-5}\mathrm{V}.$

M.10.34

Az $\mathrm{U_i} = \mathrm{B} \cdot \ell \cdot \mathrm{v}$ képletet átalakítva kapjuk:

$$\mathrm{v} = \frac{\mathrm{U_i}}{\mathrm{B} \cdot \ell} = \frac{5 \cdot 10^{-3}\mathrm{V}}{0{,}9\mathrm{T} \cdot 0{,}02\mathrm{m}} = 2{,}778 \cdot 10^{-1}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 0{,}3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

M.10.35

Az $\mathrm{U_i} = \mathrm{B} \cdot \ell \cdot \mathrm{v}$ képletet átalakítva kapjuk:

$$\mathrm{B} = \frac{\mathrm{U_i}}{\ell \cdot \mathrm{v}} = \frac{0{,}24\mathrm{V}}{0{,}3\mathrm{m} \cdot 1{,}6\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 0{,}5\mathrm{T} = 500\mathrm{mT}$$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

AZ ÖNINDUKCIÓ

M.10.36

$$U_{öi} = L \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t} = 0{,}01\text{H} \cdot \frac{0{,}006\text{A}}{0{,}002\text{s}} = 0{,}03\text{V} = 30\text{mV}$$

M.10.37

Az önindukciós feszültség képletét átalakítva kapjuk:

$\Delta t = L \cdot \frac{\Delta I}{U_{öi}} = 0{,}42H \cdot \frac{2{,}15A}{0{,}025V} = 36{,}1s$, azaz több, mint fél percig tartott az átállítás.

M.10.38

$$E_{mágn} = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2 = \frac{1}{2} \cdot 6{,}3 \cdot 10^{-4}\text{H} \cdot (3\text{A})^2 = 2{,}835 \cdot 10^{-3}\text{J} = 2{,}835\text{mJ}$$

M.10.39

$$U_{öi} = L \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t} = 0{,}75\text{H} \cdot \frac{1{,}2\text{A}}{0{,}8\text{s}} = 1{,}125\text{V}$$

A maximális mágneses energia:

$$E_{mágn} = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}75H \cdot (1{,}2A)^2 = 0{,}54\,\text{J}.$$

M.10.40

A tekercs keresztmetszete: $A = r^2 \cdot \pi = (2{,}5\text{cm})^2 \cdot 3{,}14 = 19{,}63\text{cm}^2$

Az $L = \mu_r \cdot \mu_0 \cdot \frac{N^2 \cdot A}{\ell}$ képletből a menetszámot kifejezve:

$$N = \sqrt{\frac{L \cdot \ell}{\mu_r \cdot \mu_0 \cdot A}} = \sqrt{\frac{0{,}66H \cdot 0{,}06m}{2000 \cdot 1{,}256 \cdot 10^{-6}\frac{Vs}{Am} \cdot 19{,}63 \cdot 10^{-4}m^2}} = 89{,}6 \approx 90.$$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

A VÁLTAKOZÓ ÁRAM

M.10.41

A hálózati feszültség effektív értéke 230V. A csúcsérték: $U_{max} = U_{eff} \cdot \sqrt{2} = 325\text{V}$

A hálózati feszültség frekvenciája 50 Hz, ennek reciproka a periódusidő: T = 0,02 s = 20 ms

A körfrekvencia: $\omega = 2\pi \cdot \text{f} = 6{,}28 \cdot 50\frac{1}{\text{s}} = 314\frac{1}{\text{s}}$

M.10.42

A maximális feszültség: $U_{max} = U_{eff} \cdot \sqrt{2} = 212\text{V}$, a körfrekvencia:

$\omega = 2\pi \cdot \text{f} = 6{,}28 \cdot 50\frac{1}{\text{s}} = 314\frac{1}{\text{s}}$

A pillanatnyi feszültségek az egyes esetekben:

$U_1 = U_{max} \cdot \sin(\omega \cdot t) = 212V \cdot \sin\left(314\frac{1}{s} \cdot 0{,}004s\right) = 202V$ vagy -202 V.

$U_2 = U_{max} \cdot \sin(\omega \cdot t) = 212V \cdot \sin\left(314\frac{1}{s} \cdot 0{,}008s\right) = 125V$ vagy -125 V.

$U_3 = U_{max} \cdot \sin(\omega \cdot t) = 212V \cdot \sin\left(314\frac{1}{s} \cdot 0{,}012s\right) = -125V$ vagy 125 V.

Megjegyzés:Ne felejtsük el, hogy radiánban kell számolnunk!

M.10.43

Az összefüggésből $\text{I}_{max} = 2{,}12\text{A}$ és $\omega = 125{,}6\frac{1}{\text{s}}$. Az effektív áramerősség:

$\text{I}_{eff} = \frac{\text{I}_{max}}{\sqrt{2}} = 1{,}499\text{A} \approx 1{,}5\text{A}$. A körfrekvencia képletét átalakítva kapjuk: $\text{f} = \frac{\omega}{2\pi} = 20\text{Hz}$.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.10.44

A grafikonról leolvasható csúcsfeszültség: U_{max} = 420 V, ebből az effektív feszültség: $U_{eff} = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}} = 297V$. A grafikon szerint egy negyed periódus 3 ms, ebből a periódusidő T = 12 ms = 0,012 s, amiből a fordulatszám: $f = \frac{1}{T} = 83{,}3\ \text{Hz}.$

M.10.45

A transzformátor-egyenletet átrendezve kapjuk: $U_{sz} = \frac{N_{sz}}{N_p} \cdot U_p = \frac{1500}{450} \cdot 12V = 40V$

M.10.46

A transzformátor-egyenletet átrendezve kapjuk:

$$N_{sz} = \frac{U_{sz}}{U_p} \cdot N_p = \frac{9{,}2V}{230V} \cdot 2000 = 80$$

M.10.47

A transzformátor-egyenletet átrendezve kapjuk:

$$N_{sz} = \frac{U_{sz}}{U_p} \cdot N_p = \frac{5{,}75V}{230V} \cdot 1200 = 30$$

Az áramerősségek a feszültségekkel fordítottan arányosak, ezért: $U_p \cdot I_p = U_{sz} \cdot I_{sz}$,

ebből: $I_p = \frac{U_{sz}}{U_p} \cdot I_{sz} = \frac{5{,}75V}{230V} \cdot 0{,}5A = 1{,}25 \cdot 10^{-2} A = 12{,}5mA$

M.10.48

Az ideális transzformátor az átalakítás során nem veszít a teljesítményből, így a szekunder teljesítmény is 2,52 W, az elektromos teljesítmény képletéből kapjuk:

$$U_{sz} = \frac{P_{sz}}{I_{sz}} = \frac{2{,}52W}{0{,}21A} = 12V$$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

A VÁLTAKOZÓ ÁRAMÚ ÁRAMKÖR

M.10.49

Az áramerősség effektív értéke: $I_{eff} = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}} = 2{,}4A$

Az ellenállás Ohm törvénye alapján: $R = \frac{U_{eff}}{I_{eff}} = \frac{230V}{2{,}4A} = 96\Omega$

A fejlődő Joule-hő pedig: $Q = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot t = 230V \cdot 2{,}4A \cdot 300s = 166000J = 166kJ.$

M.10.50

A hálózati áram körfrekvenciája: $\omega = 2\pi \cdot f = 314\frac{1}{s}$

Az induktív ellenállás: $X_L = L \cdot \omega = 0{,}35H \cdot 314\frac{1}{s} = 110\Omega$

A kapacitív ellenállás: $X_C = \frac{1}{C \cdot \omega} = \frac{1}{12 \cdot 10^{-6} F \cdot 314\frac{1}{s}} = 265\Omega$

Az impedancia: $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{(40\Omega)^2 + (110\Omega - 265\Omega)^2} = 160\Omega.$

M.10.51

A hálózati áram körfrekvenciája: $\omega = 2\pi \cdot f = 314\frac{1}{s}$

Az induktív ellenállás: $X_L = L \cdot \omega = 0{,}45H \cdot 314\frac{1}{s} = 141\Omega$

Az impedancia: $Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{(250\Omega)^2 + (141\Omega)^2} = 287\Omega$

A teljesítménytényező: $\cos\varphi = \frac{R}{Z} = \frac{250\Omega}{287\Omega} = 0{,}87$

A hatásos teljesítmény: $P_h = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos\varphi = 230V \cdot 0{,}8A \cdot 0{,}8705 = 160\text{W}.$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.10.52

Egyenáram esetén az ellenállás: $R = \frac{U}{I} = \frac{24V}{0{,}06A} = 400\Omega$

Hálózati áram esetén az impedancia: $Z = \frac{U_{eff}}{I_{eff}} = \frac{230V}{0{,}315A} = 730\Omega$

A $Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}$ képletből fejezzük ki az induktív ellenállást:

$$X_L = \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{(730\Omega)^2 - (400\Omega)^2} = 610\Omega$$

A hálózati áram körfrekvenciája: $\omega = 2\pi \cdot f = 314\frac{1}{s}$, ebből a tekercs induktivitása:

$$L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{610\Omega}{314\frac{1}{s}} = 1{,}94H$$

A teljesítménytényező: $\cos\varphi = \frac{R}{Z} = \frac{400\Omega}{730\Omega} = 0{,}55.$

ELEKTROMÁGNESES REZGÉSEK ÉS HULLÁMOK

M.10.53

$$f = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{L \cdot C}} = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{45 \cdot 10^{-6}H \cdot 7 \cdot 10^{-10}F}} = 8{,}967 \cdot 10^5 Hz = 896{,}7kHz$$

M.10.54

A periódusidő a frekvencia reciproka: $T = \frac{1}{f}$. Ezt felhasználva a Thomson képletet átrendezve kapjuk:

$$C = \frac{T^2}{4\pi^2 \cdot L} = \frac{1}{4\pi^2 \cdot f^2 \cdot L} = \frac{1}{4\pi^2 \cdot \left(1{,}81 \cdot 10^6 \frac{1}{s}\right)^2 \cdot 9 \cdot 10^{-6} H} = 8{,}591 \cdot 10^{-10} F = 859pF$$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.10.55

A rádióhullám terjedési sebessége $c = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$, a $c = \frac{\lambda}{T}$ képletet átrendezve kapjuk:

$T = \frac{\lambda}{c} = \frac{2{,}8m}{3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}} = 9{,}333 \cdot 10^{-9} s$. A Thomson-képletből az induktivitást kifejezve kapjuk:

$$L = \frac{T^2}{4\pi^2 \cdot C} = \frac{(9{,}333 \cdot 10^{-9} s)^2}{4\pi^2 \cdot 65 \cdot 10^{-12} F} = 3{,}39 \cdot 10^{-8} H = 33{,}9 nH.$$

M.10.56

A rezonancia feltétele: $L_1C_1 = L_2C_2$. Ebből C_2-t kifejezve kapjuk:

$$C_2 = \frac{L_1}{L_2} \cdot C_1 = \frac{5 \cdot 10^{-6} H}{3 \cdot 10^{-3} H} \cdot 372 \cdot 10^{-9} F = 6{,}2 \cdot 10^{-10} F = 620 \text{pF}.$$

GYAKORLÓ FELADATOK

M.10.57

Adatok: N=10, A= $70mm \cdot 100mm = 7 \cdot 10^{-3} m^2$, I=0,3 A, k=5 cm, F=0,29N

Az ellenerő forgató hatása: $M = F \cdot k$, ez megegyezik a vezetőkeretre a rúdmágnes által ható maximális forgatónyomatékkal, így az indukcióvektor:

$$B = \frac{M_{max}}{N \cdot I \cdot A} = \frac{F \cdot k}{N \cdot I \cdot A} = \frac{0{,}29N \cdot 0{,}05m}{10 \cdot 0{,}3A \cdot 7 \cdot 10^{-3} m^2} = 0{,}690T = 690mT$$

M.10.58

Adatok: l=150 m, $A_{réz}$=2 mm^2, N=350, U=1,5 V, M_{max}=0,015 Nm

A tekercs ellenállása: $R = \rho \cdot \frac{\ell}{A_{réz}}$, ahol a réz fajlagos ellenállása $\rho = 0{,}0178\Omega \cdot \frac{mm^2}{m}$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

A tekercsen átfolyó áram: $I = \frac{U}{R} = \frac{U \cdot A_{réz}}{\rho \cdot \ell} = \frac{1{,}5V \cdot 2mm^2}{0{,}0178\Omega \cdot \frac{mm^2}{m} \cdot 150m} = 1{,}12A$

A vezeték hosszából és a menetszámból egy menet (kör alakú) hossza kiszámítható:

Egy menet hossza: $K = \frac{\ell}{N} = \frac{150m}{350} = 0{,}429m$, ebből a sugár: r = 0,0682 m

A tekercs területe: $A = r^2\pi = 0{,}0146m^2$

Így a mágneses indukcióvektor értéke:

$$B = \frac{M_{max}}{N \cdot I \cdot A} = \frac{0{,}015Nm}{350 \cdot 1{,}124A \cdot 0{,}01462m^2} = 2{,}61 \cdot 10^{-3}T = 2{,}61mT$$

M.10.59

Adatok: N = 340, A = 8 cm^2, B = 0,14 T, D* = $2{,}15 \cdot 10^{-4}$ Nm, l = 1,5 m, x = 6,5 cm

Határozzuk meg a tekercs szögelfordulását!

A tekercs szögelfordulása a visszaverődés geometriai szabályai szerint a fénysugár kétszer akkora elfordulását eredményezi. A tekercs szögelfordulását α-val jelölve:

$2\alpha = \frac{x}{\ell} = \frac{0{,}065m}{1{,}5m} = 0{,}0433$, ebből a szögelfordulás: $\alpha = 0{,}0217(rad)$

Kihasználtuk, hogy kis szögek esetén a húr és az ív jó közelítéssel ugyanakkora.

A tekercs új egyensúlyi helyzetében a torziós szál visszatartó forgató hatása: M = D* α = $4{,}67 \cdot 10^{-6}\,Nm$. Ez azt jelenti, hogy a mágneses mező forgatónyomatéka is ugyanakkora.

Az $M = B \cdot N \cdot I \cdot A$ képletet átalakítva az áramerősségre kapjuk:

$$I = \frac{M}{B \cdot N \cdot A} = \frac{4{,}6548 \cdot 10^{-6}Nm}{0{,}14T \cdot 340 \cdot 8 \cdot 10^{-4}m^2} = 1{,}22 \cdot 10^{-4}A = 122\mu A$$

M.10.60*

Adatok: B = 0,68 T, l = 32 mm, σ = $2\frac{1}{\text{mm}}$, α = 60°, I = 0,8 A, M = 1,4 Nm

A menetsűrűséget (σ-val jelöltük) a mértékegysége segítségével értelmezhetjük: azt mutatja meg, hogy a tekercs hosszának minden milliméterén 2 menet található.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Ebből a menetszám meghatározható: $\mathrm{N} = \ell \cdot \sigma = 32\mathrm{mm} \cdot 2\frac{1}{\mathrm{mm}} = 64$

A forgató hatást a mágneses indukcióvektornak a tekercs síkjával párhuzamos komponense okozza: $\mathrm{B_1} = \mathrm{B} \cdot \cos 60° = 0{,}68\mathrm{T} \cdot \frac{1}{2} = 0{,}34\mathrm{T}$

Az $\mathrm{M} = \mathrm{B_1} \cdot \mathrm{N} \cdot \mathrm{I} \cdot \mathrm{A}$ képletet átalakítva a tekercs keresztmetszetére kapjuk:

$$A = \frac{M}{B_1 \cdot N \cdot I} = \frac{1{,}4Nm}{0{,}34T \cdot 64 \cdot 0{,}8A} = 0{,}0804m^2 = 804cm^2$$

Ebből a tekercs átmérője: $d = 2 \cdot r = 2 \cdot \sqrt{\frac{A}{\pi}} = 32cm$

M.10.61

Adatok: N_1=75, A_1=32 cm^2, A_2=25 cm^2

A forgási egyensúly feltétele, hogy a forgatónyomatékok nagysága egyenlő legyen: $\mathrm{M_1} = \mathrm{M_2}$, azaz $\mathrm{B} \cdot \mathrm{N_1} \cdot \mathrm{I_1} \cdot \mathrm{A_1} = \mathrm{B} \cdot \mathrm{N_2} \cdot \mathrm{I_2} \cdot \mathrm{A_2}$. B-vel egyszerűsítve és átalakítva az egyenletet, a következő összefüggést kapjuk: $\frac{\mathrm{I_1}}{\mathrm{I_2}} = \frac{\mathrm{N_2} \cdot \mathrm{A_2}}{\mathrm{N_1} \cdot \mathrm{A_1}}$.

Ahhoz, hogy megtudjuk a másik tekercs menetszámát, tudnunk kell, milyen hosszú drótból készült.

Az első tekercs vezetékének hossza: $\ell = 75 \cdot 24\mathrm{cm} = 1800\mathrm{cm}$, ahol a 24 cm egy menet hossza.

A második tekercs is 1800 cm hosszú drótból készült, menetszáma: $\mathrm{N_2} = \frac{\ell}{20\mathrm{cm}} = 90$.

Ebből az áramerősségek aránya: $\frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2 \cdot A_2}{N_1 \cdot A_1} = \frac{90 \cdot 25cm^2}{75 \cdot 32cm^2} = 0{,}94$

M.10.62

Adatok: l = 12 cm, d = 4 cm, N = 3000, A = 0,8 mm^2, V = 4,5 V

A tekercs menethossza: $\mathrm{K} = \mathrm{d}\pi = 0{,}1256\mathrm{m}$, ebből a rézdrót hossza: $\ell_{réz} = N \cdot K = 377m$

A rézdrót ellenállása a réz fajlagos ellenállásának felhasználásával:

$$R = \rho \cdot \frac{\ell_{réz}}{A} = 0{,}0178\Omega \cdot \frac{mm^2}{m} \cdot \frac{377m}{0{,}8mm^2} = 8{,}39\Omega$$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Az áramerősség Ohm törvénye alapján: $I = \frac{U}{R} = \frac{4,5V}{8,39\Omega} = 0,536A$

Az indukcióvektor nagysága:

$$B = \mu_0 \cdot \frac{N \cdot I}{\ell} = 1,256 \cdot 10^{-6} \frac{Vs}{Am} \cdot \frac{3000 \cdot 0,5367A}{0,12m} = 0,0169T = 16,9mT$$

M.10.63

Adatok: N_t = 2000, l = 0,25 m, N_m = 300, A =25 cm^2, M_{max} = 0,05 Nm

A forgatónyomatékot a tekercs mágneses mezője okozza, ezért az $M_{max} = B \cdot N_m \cdot A \cdot I$

képletbe a tekercs $B = \mu_0 \cdot \frac{N_t \cdot I}{\ell}$ indukcióvektorát behelyettesítve kapjuk:

$M_{max} = \mu_0 \cdot \frac{N_t}{\ell} \cdot N_m \cdot A \cdot I^2$. Ebből I-t kifejezve kapjuk:

$$I = \sqrt{\frac{M_{max} \cdot \ell}{\mu_0 \cdot N_t \cdot N_m \cdot A}} = \sqrt{\frac{0,05Nm \cdot 0,25m}{1,256 \cdot 10^{-6} \frac{Vs}{Am} \cdot 2000 \cdot 300 \cdot 25 \cdot 10^{-4} m^2}} = 2,58A$$

M.10.64

Adatok: N = 80, l = 0,05 m, R = 1 Ω, K = 18 cm, μ_r = 200, U = 12 V, B_k = 300 mT

Az áramkör ellenállása: $2R = 2\Omega$

Az áramkör áramerőssége: $I = \frac{U}{2R} = \frac{12V}{2\Omega} = 6A$

A két tekercset körtekercsnek tekintve a menetszám 160, a középkör kerülete 18 cm.

A mágneses erősség: $B = \mu_r \cdot \mu_0 \cdot \frac{2N \cdot I}{K} = 200 \cdot 1,256 \cdot 10^{-6} \frac{Vs}{Am} \cdot \frac{160 \cdot 6A}{0,18m} = 1,34T$

Ez elegendő a kalapács kimozdításához.

M.10.65

Adatok: B = 500 mT, d_{mag} = 1 cm, l_{vez} = 30 cm, d_{vez} = 3 mm

Az elektromágnes egy menetének hossza: $K = d_{mag}\pi$, ebből a menetszám:

$$N = \frac{\ell_{vez}}{K} = \frac{\ell_{vez}}{d_{mag}\pi} = 9,54 \approx 10$$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Az elektromágnes hossza: $\ell = N \cdot d_{vez} = 10 \cdot 3mm = 30mm = 3cm$

Mivel a vasmag a tekercs mágneses erősségét 200 szorosára növeli, a tekercs mágneses indukcióvektora az 500 mT 200-ad értékét értheti el.

A tekercs mágneses mezőjének erőssége: $B = \mu_0 \cdot \frac{N \cdot I}{\ell}$. Ebből I-t kifejezve kapjuk:

$$I = \frac{B \cdot \ell}{\mu_0 \cdot N} = \frac{2{,}5 \cdot 10^{-3} T \cdot 0{,}03m}{1{,}256 \cdot 10^{-6} \frac{Vs}{Am} \cdot 10} = 6A.$$

M.10.66*

A vezetékek ellenállásképlete alapján a két alumíniumdrót ellenállása csak a keresztmetszetektől függ, a keresztmetszetek aránya 4:1. Így az ellenállások aránya 1:4.

Mivel mindkét vezetékre azonos feszültséget kapcsoltunk, ezért Ohm törvénye miatt a kialakuló áramerősségek aránya 4:1.

Mindkét vezetéket ugyanakkora méretű hengerre csévéljük, ezért az azonos hosszuk miatt azonos menetszámú tekercsek is lesznek.

Mivel a drótok átmérőinek aránya 2:1, így azonos menetszám esetén a tekercsek hosszaránya 2:1 arányú lesz.

Az indukcióvektorok aránya: $\frac{B_1}{B_2} = \frac{\mu_0 \cdot \frac{N_1 \cdot I_1}{\ell_1}}{\mu_0 \cdot \frac{N_2 \cdot I_2}{\ell_2}} = \frac{N_1}{N_2} \cdot \frac{I_1}{I_2} \cdot \frac{\ell_2}{\ell_1} = 1 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$

A kétszeres átmérőjű vezetékből készült tekercs kétszer erősebb.

M.10.67

Adatok: d = 85 cm, I = 120 A, h = 3 m

A vezetékek távolságát a mérőponttól Pitagorasz tételének segítségével határozhatjuk meg: $r = \sqrt{h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{(3m)^2 + (0{,}425m)^2} = 3{,}03m$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Az egyes vezetékek mágneses erőssége az adott pontban:

$$B_1 = B_2 = \mu_0 \cdot \frac{I}{2\pi \cdot r} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am} \cdot \frac{120A}{2\pi \cdot 3{,}03m} = 7{,}92 \cdot 10^{-6} T$$

Az indukcióvektorok a mérőpontot a vezetékekkel összekötő egyenesekre, illetve magukra a vezetékekre is merőlegesek, valamint a két vektor által bezárt szög megegyezik az összekötő egyenesek által bezárt szöggel. (M.10.67 ábra)

Az ábra alapján az α-val jelölt szögek egyenlők, és $tg\alpha = \frac{\frac{d}{2}}{h} = 0{,}142$, ebből α = 8,06°.

Az eredő mágneses indukcióvektor az ábra alapján:

$$B = 2 \cdot B_1 \cdot \sin\alpha = 2 \cdot 7{,}92 \cdot 10^{-6} T \cdot 0{,}14 = 2{,}22 \cdot 10^{-6} T \approx 2\mu T$$

M.10.68*

Adatok: r = 2 cm, I = 2 A

Az összeállítást visszavezethetjük egy körvezető, és annak két oldalán párhuzamosan futó két egyenes vezető eredő mágneses terére.

A körvezető mágneses tere a kör középpontjában:

$$B_{kv} = \mu_0 \cdot \frac{I}{2 \cdot r} = 1{,}256 \cdot 10^{-6} \frac{Vs}{Am} \cdot \frac{2A}{2 \cdot 0{,}02m} = 6{,}28 \cdot 10^{-5} T$$

Az egyenes vezetők mágneses tere a kör középpontjában:

$$B_{ev} = \mu_0 \cdot \frac{I}{2\pi \cdot r} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am} \cdot \frac{2A}{2\pi \cdot 0{,}02m} = 2 \cdot 10^{-5} T$$

Az egyenes vezetőkben az áram iránya ellentétes, ezért a jobbkéz-szabály szerint a kör középpontjában a két vektor egyirányú egymással és a körvezető által létrehozott indukcióvektorral is. Ezért az eredő mágneses tér:

$$B = 2 \cdot B_{ev} + B_{kv} = 10{,}28 \cdot 10^{-5} T \approx 0{,}1mT$$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.10.69

Adatok: I_1 = 10 mA, I_2 = 2 A

A toroid mágneses tere a középköre mentén: $B_1 = \mu_0 \cdot \frac{N \cdot I_1}{2\pi \cdot r}$, a hosszú, egyenes vezető mágneses tere r távolságban: $B_2 = \mu_0 \cdot \frac{I_2}{2\pi \cdot r}$.

Az áramirányok helyes megválasztásával a két vektor iránya ellentétes. A feltétel szerint B = 0, ez akkor következik be, ha $B_1 = B_2$. A képleteket behelyettesítve és az egyszerűsítéseket elvégezve kapjuk: $N \cdot I_1 = I_2$, amiből $N = \frac{I_2}{I_1} = \frac{2A}{0{,}01A} = 200$

M.10.70

Adatok: N_t = 180, d = 5 cm, A_t = 100 cm^2, N_m = 120, A_m = 35 cm^2, M_{max} = 0,18 Nm

A körtekercs mágneses tere a középköre mentén: $B = \mu_0 \cdot \frac{N_t \cdot I}{2\pi \cdot r}$

A középkör sugarát a tekercs méreteiből határozhatjuk meg.

A körtekercs egy menetének sugara: $r_t = \sqrt{\frac{A_t}{\pi}} = 5{,}64cm$

A középkör sugara: $r = \frac{d}{2} + r_t = 2{,}5cm + 5{,}64cm = 8{,}14cm$

A magnetométerre ható nyomaték: $M_{max} = B \cdot N_m \cdot I \cdot A_m$

A körtekercs indukcióvektorát a fenti képletbe helyettesítve:

$M_{max} = \mu_0 \cdot \frac{N_t \cdot I}{2\pi \cdot r} \cdot N_m \cdot I \cdot A_m$. Ebből I-t kifejezve kapjuk:

$$I = \sqrt{\frac{M_{max} \cdot 2\pi \cdot r}{\mu_0 \cdot N_t \cdot N_m \cdot A_m}} = \sqrt{\frac{0{,}18Nm \cdot 2\pi \cdot 0{,}0814m}{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am} \cdot 180 \cdot 120 \cdot 35 \cdot 10^{-4} m^2}} = 31A$$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.10.71

Adatok: l = 10 cm, N = 1200, I_t = 3 A, $\Phi = 2{,}7\cdot10^{-5}\,\mathrm{Wb}$, I_k = 120 mA, $F_L = 1{,}6\cdot10^{-4}\,\mathrm{N}$

A tekercs mágneses tere: $B = \mu_0 \cdot \frac{N \cdot I_t}{\ell} = 1{,}256\cdot10^{-6}\,\frac{Vs}{Am}\cdot\frac{1200\cdot 3A}{0{,}1m} = 0{,}045T$

A mágneses fluxus képletéből a keret területét kifejezve: $A = \frac{\Phi}{B} = \frac{2{,}7\cdot10^{-5}Wb}{0{,}045T} = 6cm^2$

A Lorentz-erő képletéből a keret egyik oldalának hossza:

$a = \frac{F_L}{I_k \cdot B} = \frac{1{,}6\cdot10^{-4}N}{0{,}12A\cdot 0{,}045T} \approx 3cm$, így a rövidebbik oldal 2 cm-es.

M.10.72

Adatok: U = 4,5 V, m = 5 g, B = 700 mT, l = 5cm

A jelenség úgy értelmezhető, hogy a szögre ható Lorentz-erő megemeli a szöget, melynek következtében megszűnik az áram, ezért a gravitáció hatására visszaesik a szög, majd a folyamat újra kezdődik. Tehát a Lorentz-erőnek nagyobbnak kell lennie a szög súlyánál.

$F_L > m\cdot g = 0{,}05N$

A Lorentz-erő képletéből az áramerősséget kifejezve kapjuk:

$I = \frac{F_L}{B\cdot\ell} > \frac{0{,}05N}{0{,}7T\cdot 0{,}05m} = 1{,}43A$

Ohm törvényét felhasználva: $R = \frac{U}{I} < \frac{4{,}5V}{1{,}43A} = 3{,}15\Omega$

M.10.73*

Adatok: h = 1 m, l = 80 cm, R = 8 Ω, m = 60 g, μ = 0,2, B = 0,13 T, U = 12 V

A jelenséget a Lorentz-erővel magyarázhatjuk.

A pálcában folyó áram: $I = \frac{U}{R} = \frac{12V}{8\Omega} = 1{,}5A$

A pálcára ható Lorentz-erő: $F_L = I\cdot B\cdot\ell = 1{,}5A\cdot 0{,}13T\cdot 0{,}8m = 0{,}156N$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

A Lorentz-erő iránya a függőleges mágneses mező miatt vízszintes irányú.

A súrlódási erő maximális értéke: F = μmg = 0,12N

A pálca megmozdul, hiszen a Lorentz-erő gyorsító hatását a súrlódási erő nem tudja kiegyenlíteni, csak mérsékelni.

M.10.74

Adatok: B = 1,5 mT, α = 30°, v = $6 \cdot 10^7 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

A Lorentz-erő: $\mathrm{F_L} = \mathrm{Q} \cdot \mathrm{v} \cdot \mathrm{B} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\mathrm{C} \cdot 6 \cdot 10^7 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 0{,}0015\mathrm{T} = 1{,}44 \cdot 10^{-14}\mathrm{N}$

Ez az erő körpályára kényszeríti az elektronokat. A centripetális gyorsulás:

$$a_{cp} = \frac{F}{m} = \frac{1{,}44 \cdot 10^{-14} N}{9{,}1 \cdot 10^{-31} kg} = 1{,}58 \cdot 10^{16} \frac{m}{s^2}$$

A kerületi sebességből és a centripetális gyorsulásból a pálya sugara meghatározható:

$\mathrm{a_{cp}} = \frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{r}}$, amiből a sugarat kifejezve: $r = \frac{v^2}{a_{cp}} = \frac{36 \cdot 10^{14} \frac{m^2}{s^2}}{1{,}58 \cdot 10^{16} \frac{m}{s^2}} = 0{,}23m$

Mivel a sebesség iránya 15°-ot változott, ezért az elektronok is csak 15°-os középponti szögű ívet futnak be, ami a teljes körpálya 24-ed része.

A befutott ív hossza: $i = \frac{2\pi \cdot r}{24} = \frac{2\pi \cdot 0{,}23m}{24} \approx 6cm$

M.10.75

Adatok: N = 50, *l* = 20 cm, r = 5 cm, I = 7,425 A

A kérdéses pillanatban a tekercs mágneses tere:

$$B = \mu_0 \cdot \frac{N \cdot I}{\ell} = 1{,}256 \cdot 10^{-6} \frac{Vs}{Am} \cdot \frac{50 \cdot 7{,}425A}{0{,}2m} = 2{,}33 \cdot 10^{-3} T = 2{,}33mT$$

A tekercs által keltett Lorentz-erő: $\mathrm{F_L} = \mathrm{Q} \cdot \mathrm{v} \cdot \mathrm{B}$

Ez az erő okozza az eltérülést: $\mathrm{Q} \cdot \mathrm{v} \cdot \mathrm{B} = \mathrm{m} \cdot \frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{r}}$. Ebből $\mathrm{v} = \frac{\mathrm{Q} \cdot \mathrm{B} \cdot \mathrm{r}}{\mathrm{m}}$

Az elektronok negyed kört írnak le. Az ábra szerint a jelenség akkor következik be, ha az elektronok pályasugara megegyezik a tekercs sugarával. (M.10.75 ábra)

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

A nyaláb sebessége: $v = \frac{Q \cdot B \cdot r}{m} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19} C \cdot 2{,}33 \cdot 10^{-3} T \cdot 0{,}05 m}{9{,}1 \cdot 10^{-31} kg} = 2{,}045 \cdot 10^{7} \frac{m}{s}$

M.10.76

Az ionokra a Lorentz-erő hat, mely körpályára kényszeríti azokat:

$Q \cdot v \cdot B = m \cdot \frac{v^2}{r}$, ebből a tömeget kifejezve kapjuk: $m = \frac{Q \cdot B \cdot r}{v}$. A két mérés során a két ion töltése megegyezett, sebességük is azonos volt, és a detektor fix helyzete miatt ugyanakkora sugarú félkört tettek meg.

Így az ionok tömegaránya: $\frac{m_H}{m} = \frac{\frac{Q \cdot B_H \cdot r}{v}}{\frac{Q \cdot B \cdot r}{v}} = \frac{B_H}{B}$

Az elektromágnes mágneses indukcióvektora egyenesen arányos a rá kapcsolt áramerősséggel, és ezáltal a feszültséggel is, így a fenti képletet folytatva:

$$\frac{m_H}{m} = \frac{B_H}{B} = \frac{I_H}{I} = \frac{U_H}{U} = \frac{235V}{469{,}5V} = 0{,}5005 \approx 0{,}5$$

Ebből az ismeretlen ion tömege a hidrogénion tömegének kétszerese, az ismeretlen anyag a deutériumion.

M.10.77*

Adatok: m = 20 g, D = 2 N/m, I = 6 A, Δl = 1,94 cm, l = 3 cm

Vizsgáljuk meg a pálcára ható erőket! A pálcára hat a nehézségi erő függőlegesen lefelé, a két rugóerő függőlegesen felfelé, valamint a Lorentz-erő függőleges irányban. Mivel árammentes estben a rugók megnyúlása 5 cm, ezért a Lorentz-erő felfelé fog hatni. A nehézségi erő egyenlő a két rugóerővel és a Lorentz-erővel:

$m \cdot g = 2 \cdot D \cdot \Delta \ell + I \cdot B \cdot \ell$

A fenti egyenletből B-t kifejezve kapjuk:

$$B = \frac{m \cdot g - 2 \cdot D \cdot \Delta \ell}{I \cdot \ell} = \frac{0{,}02 kg \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2} - 2 \cdot 2 \frac{N}{m} \cdot 0{,}0194 m}{6A \cdot 0{,}03 m} = 0{,}66 T = 660 mT$$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.10.78

Adatok: m = 8 g, I = 1,4 A, α = 20°, l = 2,5 cm

Az új egyensúlyi helyzetet a függőleges nehézségi erő és a vízszintes Lorentz-erő okozza, melyek eredőereje egyensúlyt tart a 20°-os helyzetű kötélerővel. (M.10.78 ábra)

Az ábra szerint: $\mathrm{tg}\alpha = \frac{F_L}{m \cdot g} = \frac{I \cdot B \cdot \ell}{m \cdot g}$. Ebből B-t kifejezve kapjuk:

$$B = \frac{tg\alpha \cdot m \cdot g}{I \cdot \ell} = \frac{0{,}364 \cdot 0{,}008kg \cdot 9{,}81\frac{m}{s^2}}{1{,}4A \cdot 0{,}025m} = 0{,}82T = 820mT$$

M.10.79*

Adatok: B = 0,9 T, D = 3,2 N/m, m = 25 g, l = 10 cm, I = 4,5 A

A rúdra négy, függőleges erő hat.

A nehézségi erő: $F_N = m \cdot g = 0{,}025kg \cdot 9{,}81\frac{m}{s^2} = 0{,}245N$

A Lorentz-erő: $F_L = I \cdot B \cdot \ell = 4{,}5A \cdot 0{,}9T \cdot 0{,}1m = 0{,}405N$

A két rugóerő: $2F_r = 2D \cdot \Delta\ell$

A négy erő eredője az egyensúlyi feltétel szerint 0.

A Lorentz-erő iránya szerint két esetet kell vizsgálnunk:

a) Ha F_L és F_N egyirányú, akkor $F_L + F_N - 2F_r = 0$. Ebbe a fentieket behelyettesítve, és a megnyúlást kifejezve, ezt kapjuk:

$$\Delta\ell = \frac{F_L + F_N}{2D} = \frac{0{,}405N + 0{,}245N}{2 \cdot 3{,}2\frac{N}{m}} = 0{,}101m$$

Az áram megszűnése után már csak a nehézségi erő tart egyensúlyt a rugóerőkkel, ezért az új egyensúlyi helyzetre: $F_N - 2F_r = 0$, amiből az előbbiek szerint:

$$\Delta\ell' = \frac{F_N}{2D} = \frac{0{,}245N}{2 \cdot 3{,}2\frac{N}{m}} = 0{,}038m$$

Ebből a rezgés amplitúdója: $A = \Delta\ell - \Delta\ell' = 0{,}101m - 0{,}038m = 0{,}063m = 63mm$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

b) Ha F_L és F_N ellentétes irányú, akkor a rugó kevésbé nyúlik meg, és $F_L - F_N - 2F_r = 0$. Ebbe a fentieket behelyettesítve és a megnyúlást kifejezve, ezt kapjuk:

$$\Delta\ell = \frac{F_L - F_N}{2D} = \frac{0{,}405N - 0{,}245N}{2 \cdot 3{,}2\frac{N}{m}} = 0{,}025m$$

Az áram megszűnése után már csak a nehézségi erő tart egyensúlyt a rugóerőkkel, ezért az új egyensúlyi helyzetben a rugó megnyúlik, és $F_N - 2F_r = 0$, amiből az előbbiek szerint:

$$\Delta\ell' = \frac{F_N}{2D} = \frac{0{,}245N}{2 \cdot 3{,}2\frac{N}{m}} = 0{,}038m$$

Ebből a rezgés amplitúdója: $A = \Delta\ell + \Delta\ell' = 0{,}025m + 0{,}038m = 0{,}063m = 63mm$

Megjegyzés: A Lorentz-erő iránya nem befolyásolja az amplitúdó értékét! Hiszen mind a két esetben, ha behelyettesítjük az amplitúdó képletébe a két megnyúlás képletét, és elvégezzük az egyszerűsítéseket, akkor az amplitúdó értékére:

$A = \frac{F_L}{2D} = 0{,}0633m \approx 63mm$ *adódik.*

A rezgés frekvenciája: $f = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{D'}{m}} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{6{,}4\frac{N}{m}}{0{,}025kg}} = 2{,}55Hz$, ahol D' a rezgő rendszer rugóállandója, ami a két rugó rugóállandójának összege.

M.10.80*

Adatok: *l* = 20 cm, d = 6 cm, B = 1,2 mT, v = $6{,}5 \cdot 10^6 \frac{m}{s}$

Az elektron sebessége nem merőleges az indukcióvonalakra, ezért felbontjuk v_1 merőleges és v_2 párhuzamos komponensekre. A merőleges komponens miatt hat a Lorentz-erő, ami körpályára állítaná az elektront:

$Q \cdot v_1 \cdot B = m \cdot \frac{v_1^2}{r}$, ahol r a henger sugara. Ebből v_1 kifejezhető:

$$v_1 = \frac{Q \cdot B \cdot r}{m} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}C \cdot 0{,}0012T \cdot 0{,}03m}{9{,}1 \cdot 10^{-31}kg} = 6{,}33 \cdot 10^6 \frac{m}{s}$$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

A paralelogramma-módszer alapján meghatározható a párhuzamos sebességkomponens is:

$$v_2 = \sqrt{v^2 - v_1^2} = \sqrt{\left(6{,}5 \cdot 10^6 \frac{m}{s}\right)^2 - \left(6{,}33 \cdot 10^6 \frac{m}{s}\right)^2} = 1{,}48 \cdot 10^6 \frac{m}{s}$$

A két komponens nagyságából a belövés szöge is kiszámítható:

$tg\alpha = \frac{v_1}{v_2} = 4{,}27$, amiből α = 76,8°. Az indukcióvonalakhoz képest ekkora szöggel lőttük be az elektront.

Az elektron sebességének párhuzamos komponenséből a tekercsben tartózkodási idő meghatározható:

$v_2 = \frac{\ell}{t}$, ebből $t = \frac{\ell}{v_2} = \frac{0{,}2m}{1{,}48 \cdot 10^6 \frac{m}{s}} = 1{,}35 \cdot 10^{-7} s \approx 0{,}14 \mu s$

Az elektron sebességének merőleges komponenséből a keringési idő meghatározható:

$v_1 = \frac{2\pi \cdot r}{T}$, ebből $T = \frac{2\pi \cdot r}{v_1} = \frac{2\pi \cdot 0{,}03m}{6{,}33 \cdot 10^6 \frac{m}{s}} = 2{,}98 \cdot 10^{-8} s \approx 30ns$

Az elektron fordulatainak száma a tekercsben tartózkodási időnek és a keringési időnek a hányadosa.

$n = \frac{t}{T} = \frac{1{,}35 \cdot 10^{-7} s}{2{,}98 \cdot 10^{-8} s} = 4{,}53$, azaz 4 és fél fordulatot tesz meg az elektron.

M.10.81*

Adatok: B = 0,3 T, U = 9 kV, r_{max} = 40 cm

A gyorsítófeszültség hatására a proton mozgási energiára tesz szert:

$$Q \cdot U = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

Az n-edik áthaladáskor pedig: $n \cdot Q \cdot U = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_n^2$, ebből $v_n = \sqrt{\frac{2n \cdot Q \cdot U}{m}}$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

A proton az elektromos térből kilépve, a mágneses tér hatására félkör alakú pályát ír le.

A Lorentz-erő miatt: $Q \cdot v \cdot B = m \cdot \frac{v^2}{r}$, ebből a sebesség: $v = \frac{Q \cdot B \cdot r}{m}$.

Látható, hogy a sebességgel egyenesen arányos a bejárt félkör sugara. Azaz az ábrán helyesen az egyre gyorsuló proton egyre nagyobb félkört fut be.

Ha n-nel jelöljük az összes áthaladás számát, akkor a fenti két sebességképletet összegezve:

$\sqrt{\frac{2n \cdot Q \cdot U}{m}} \le \frac{Q \cdot B \cdot r_{max}}{m}$, ebből n-et kifejezve:

$$n \le \frac{Q \cdot B^2 \cdot r_{max}^2}{2m \cdot U} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\,C \cdot (0{,}3T)^2 \cdot (0{,}4m)^2}{2 \cdot 1{,}674 \cdot 10^{-27}\,kg \cdot 9000V} = 76{,}46$$

Tehát a proton ennek a felét, 38 fordulatot tesz meg.

n-ből már a kilépő sebesség is meghatározható:

$$v_n = \sqrt{\frac{2n \cdot Q \cdot U}{m}} = \sqrt{\frac{152 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,C \cdot 9000V}{1{,}674 \cdot 10^{-27}\,kg}} = 1{,}143 \cdot 10^7 \frac{m}{s}$$

A kerületi sebességből a keringési idő meghatározható:

$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$ és $v = \frac{Q \cdot B \cdot r}{m}$, ezért $T = \frac{2\pi \cdot m}{Q \cdot B}$, amiből a félkör befutási ideje: $T_{félkör} = \frac{\pi \cdot m}{Q \cdot B}$

Látható, hogy a félkör befutásához szükséges idő független a félkör sugarától, ezért a polaritás váltogatásának üteme: $f = \frac{1}{T_{félkör}} = \frac{Q \cdot B}{\pi \cdot m} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\,C \cdot 0{,}3T}{\pi \cdot 1{,}674 \cdot 10^{-27}\,kg} = 9{,}127 \cdot 10^{10} \frac{1}{s}$

Megjegyzés: A kilépő sebesség értéke a fénysebesség kevesebb, mint 4%-a, ezért relativisztikus hatásokkal nem kell számolni.

A polaritásváltást praktikusan nagyfrekvenciás váltakozó feszültséggel oldják meg, ekkor a váltakozó feszültség frekvenciája a fenti polaritásváltási frekvencia fele, jelen esetben $4{,}56 \cdot 10^{10}\,Hz$.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.10.82

Adatok: s = 10 cm, N = 200, A = 2 cm^2, v = 20 cm/s

A grafikon megrajzolásához tudnunk kell, mennyi ideig tartott a lehúzás.

$$t = \frac{s}{v} = \frac{10cm}{20\frac{cm}{s}} = 0{,}5s = 500ms$$

Az indukcióvektor 0,5 cm-es szakaszokon nő vagy csökken, ez 25 ms-os időintervallumokat jelent. Egy ilyen intervallum alatt az indukált feszültség értéke $U_i = N \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = N \cdot \frac{A \cdot \Delta B}{\Delta t}$ állandó, hiszen a B változása egyenletes.

Szimmetriaokok és ismétlődések miatt elegendő öt számítást végezni:

Az első szakaszon: $U_1 = N \cdot \frac{A \cdot \Delta B}{\Delta t} = 200 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-4} m^2 \cdot 1{,}8 \cdot 10^{-3} T}{25 \cdot 10^{-3} s} = 2{,}88 \cdot 10^{-3} V = 2{,}88mV$

A negyedik szakaszon ΔB az elsőnek 3-szorosa, ebből U_2 = 8,64 mV

A hatodik szakaszon ΔB az elsőnek 5-szöröse, ebből U_3 = 14,4 mV

A tizenkettedik szakaszon ΔB az elsőnek 9-szerese, ebből U_4 = 25,92 mV

A tizenötödik szakaszon ΔB az elsőnek 2-szerese, ebből U_5 = 5,76 mV

Ezek alapján a feszültség idő grafikon: (M.10.82 ábra)

A feszültségarányokból az első kódot (2,88 mV→ 1) figyelmen kívül hagyva a név kódja: 35359_251, amiből a tulajdonos neve CECEI BEA

M.10.83

Adatok: N = 1200, l_t = 6 cm, I = 120 mA, l = 3 cm, U_i = 0,5 mV

A kialakított mágneses mező:

$$B = 0{,}3 \cdot \mu_0 \cdot \frac{N \cdot I}{\ell_t} = 0{,}3 \cdot 1{,}256 \cdot 10^{-6} \frac{Vs}{Am} \cdot \frac{1200 \cdot 0{,}12A}{0{,}06m} = 9 \cdot 10^{-4} T \approx 1mT$$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Az indukált feszültség $U_i = B \cdot \ell \cdot v$ képletből a sebességet kifejezhetjük:

$$v = \frac{U_i}{B \cdot \ell} = \frac{5 \cdot 10^{-4} V}{9 \cdot 10^{-4} T \cdot 0{,}03 m} = 18{,}5 \frac{m}{s} \approx 67 \frac{km}{h}$$

M.10.84

Adatok: h = 10 cm, B = 260 mT, l = 18 cm, U = 80 mV

A mező a zuhanó vezetékben feszültséget indukál. Az indukált feszültség $U_i = B \cdot \ell \cdot v$ képletet átalakítva a sebesség: $v = \frac{U_i}{B \cdot \ell} = \frac{0{,}08 V}{0{,}26 T \cdot 0{,}18 m} = 1{,}7 \frac{m}{s}$

Egy szabadon eső tárgy ezt a sebességet: $t = \frac{v}{g}$ idő alatt éri el, és ez idő alatt

$h = \frac{g}{2} \cdot t^2 = \frac{g}{2} \cdot \frac{v^2}{g^2} = \frac{v^2}{2g} = \frac{\left(1{,}7 \frac{m}{s}\right)^2}{2 \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2}} = 0{,}15 m = 15 cm$ hosszan zuhant. Az ejtési magasság ennél 5 cm-rel nagyobb, vagyis 20 cm, hiszen a talajtól 5 cm magasságban volt a vezeték a mező közepén.

M.10.85

Adatok: m = 50 g, l = 25 cm, D = 20 N/m, B = 850 mT, A = 5 cm

A kialakuló rezgés periódusideje: $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{2D}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{0{,}05 kg}{40 \frac{N}{m}}} = 0{,}2221 s$, hiszen két rugó által jön létre a rezgés.

A rezgés körfrekvenciája: $\omega = \sqrt{\frac{2D}{m}} = 28{,}28 \frac{1}{s}$

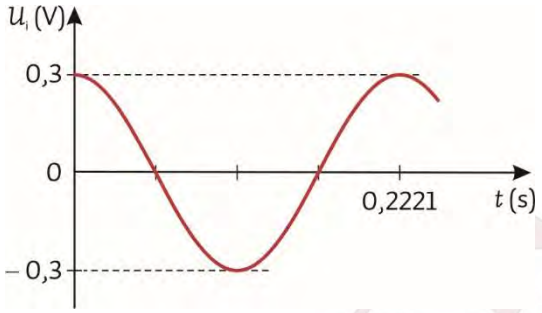
A rúd sebessége: $v = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)$, szinuszos függvény. Ebből az indukált feszültség:

$U_i = B \cdot \ell \cdot v = B \cdot \ell \cdot A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)$

A maximális feszültség: $U_{max} = B \cdot \ell \cdot A \cdot \omega = 0{,}85 T \cdot 0{,}25 m \cdot 0{,}05 m \cdot 28{,}28 \frac{1}{s} = 0{,}3005 V \approx 3 V$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT



A feszültség is szinuszos függvény:

M.10.86*

l = 18 cm, α = 30°, R = 10 ohm, B = 0,5 T, m = 15 g, μ = 0,1

Először is vizsgáljuk meg a rúdra ható erőket!

A rúdra négy erő hat: a nehézségi erő, a tartóerő, a súrlódási erő és a Lorentz-erő.

A nehézségi erő sínre merőleges komponense egyensúlyt tart a tartóerővel:

$$mg \cdot \cos\alpha = F_t$$

Amikor a rúd sebessége egyenletessé válik, akkor a nehézségi erő lejtővel párhuzamos komponense egyensúlyt tart a súrlódási erővel és az indukált áram miatt kialakult Lorentz-erővel:

$$mg \cdot \sin\alpha = \mu \cdot F_{ny} + F_L$$
$$mg \cdot \sin\alpha = \mu \cdot mg \cdot \cos\alpha + I \cdot B \cdot \ell$$

Ebből az áramerősség: $I = \frac{mg \cdot (\sin\alpha - \mu \cdot \cos\alpha)}{B \cdot \ell} = \frac{0{,}147N \cdot (0{,}5 - 0{,}1 \cdot 0{,}866)}{0{,}5T \cdot 0{,}18m} = 0{,}68A$

Ohm törvénye segítségével a rúd feszültsége: $U = R \cdot I = 1\Omega \cdot 0{,}68A = 0{,}68V$

A feszültség a mágneses mezőben való mozgás miatt alakult ki, így az $U_i = B \cdot \ell \cdot v$ képletet átalakítva a maximális sebesség: $v = \frac{U_i}{B \cdot \ell} = \frac{0{,}68V}{0{,}5T \cdot 0{,}18m} = 7{,}5\frac{m}{s} \approx 27\frac{km}{h}$

M.10.87*

Adatok: l_{vez} = 80 m, A_{vez} = 1 mm^2, r = 8 cm, l_{tek} = 20 cm, l' = 80 cm, a = 25 cm, d = 2 mm, U = 1,5 V, Δt = 5 μs

Először számítsuk ki a rézvezeték ellenállását:

$$R = \rho \cdot \frac{\ell_{vez}}{A_{vez}} = 0{,}0178\Omega \cdot \frac{mm^2}{m} \cdot \frac{80m}{1mm^2} = 1{,}42\Omega$$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Ohm törvénye szerint a bekapcsolás után a tekercs árama: $I = \frac{U}{R} = \frac{1,5V}{1,42\Omega} = 1,06A$

A tekercs menetszámát a menethosszból tudjuk kiszámítani. A menethossz: $\mathrm{K} = 2\pi \cdot \mathrm{r}$,

a menetszám: $N \le \frac{\ell_{vez}}{2\pi \cdot r} = \frac{80m}{2\pi \cdot 0,08m} = 160$

A tekercset körbevevő dróthurokban feszültség indukálódik a fluxusváltozás miatt.

A kezdeti fluxus 0, a végső fluxus $\Phi = \mathrm{B} \cdot \mathrm{A}$, ahol A a tekercs keresztmetszete, hiszen csak ebben változik a mágneses mező erőssége.

$$\Phi = B \cdot A = B \cdot r^2 \cdot \pi = \mu_0 \cdot \frac{N \cdot I}{\ell_{tek}} \cdot r^2 \cdot \pi = 1,256 \cdot 10^{-6} \frac{Vs}{Am} \cdot \frac{160 \cdot 1,06A}{0,2m} \cdot (0,08m)^2 \cdot \pi = 2,14 \cdot 10^{-5} Wb$$

Az indukált feszültség: $U_i = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{2,14 \cdot 10^{-5} Wb}{5 \cdot 10^{-6} s} = 4,28V$

Ez a feszültség tölti fel a kondenzátort, melynek kapacitása:

$$C = \varepsilon_0 \cdot \frac{A}{d} = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2} \cdot \frac{(0,25m)^2}{0,002m} = 2,77 \cdot 10^{-10} F$$

A felhalmozódott töltésmennyiség: $Q = C \cdot U_i = 2,77 \cdot 10^{-10} F \cdot 4,28V = 1,2 \cdot 10^{-9} C = 1,2nC$

M.10.88*

Adatok: l = 1 m, α = 30°, f = 0,928 Hz, B = 735 mT

A pálca keresztezi a B-vonalakat, de nem merőlegesen. Ezért bontsuk fel a pálca egy adott helyzetében az azt keresztező indukcióvektorokat a pálcával párhuzamos, és arra merőleges (B') komponensekre. Indukált feszültséget csak B' okoz. B' értéke minden pillanatban ugyanakkora: $B' = B \cdot \sin\alpha = 0,735T \cdot 0,5 = 0,368T$

A pálca keringési ideje: $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{0,928Hz} = 1,08s$

Ezalatt az idő alatt a pálca a kúp palástjának megfelelő nagyságú területet súrolt (járt be).

A palást területe: $T_P = \ell \cdot r \cdot \pi = 1m \cdot 0,5m \cdot \pi = 1,57m^2$, ahol r az alapkör sugara, mely a pálca szögéből és hosszából könnyen számolható.

Így az indukált feszültség: $U_i = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{B' \cdot T_P}{T} = \frac{0,368T \cdot 1,57m^2}{1,08s} = 0,535V$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Megjegyzés: Használhatjuk az $U_i = B'lv$ összefüggést is, azonban ilyenkor a pálca középpontjának a sebességét kell a képletbe írni: $v = r\pi/T$. Így nem kell megküzdenünk a palást területének kiszámításával, és megnyugodva láthatjuk, hogy ugyanarra az eredményre jutottunk.

M.10.89

Adatok: $N_1 = 5$, $A = 10\ cm^2$, $l = 7\ cm$, $R = 5\ ohm$, $U = 12\ V$, $N_2 = 2000$, $\Delta t = 2\ ms$, $\mu = 1800$

Az elektromágnes árama: $I = \frac{U}{R} = \frac{12V}{5\Omega} = 2{,}4A$

Az elektromágnes mágneses mezője:

$$B = \mu \cdot \mu_0 \cdot \frac{N \cdot I}{\ell} = 1800 \cdot 1{,}256 \cdot 10^{-6} \frac{Vs}{Am} \cdot \frac{5 \cdot 2{,}4A}{0{,}07m} = 0{,}39T$$

Mivel megszakításkor az elektromágnes árama megszűnik, a mágneses mező fluxusa nullává válik.

Ez fluxusváltozás okoz feszültséget a másik tekercsben. Az indukált feszültség:

$$U_i = N_2 \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = 2000 \cdot \frac{0{,}39T \cdot 10^{-3} m^2}{2 \cdot 10^{-3} s} = 390V$$

M.10.90

Adatok: $l = 20\ cm$, $N = 15$, $d = 5\ cm$, $I = 3\ A$, $D = 400\ N/m$, $F = 8\ N$, $t = 1\ s$

A tekercs kezdeti induktivitása:

$$L_1 = \mu_0 \cdot \frac{N^2 \cdot A}{\ell} = 1{,}256 \cdot 10^{-6} \frac{Vs}{Am} \cdot \frac{225 \cdot 1{,}96 \cdot 10^{-3} m^2}{0{,}2m} = 2{,}2H$$

A rugóerő törvény alapján a rugó hosszváltozása: $\Delta\ell = \frac{F}{D} = \frac{8N}{400\frac{N}{m}} = 0{,}02m = 2cm$

A tekercs végső induktivitása:

$$L_2 = \mu_0 \cdot \frac{N^2 \cdot A}{\ell'} = 1{,}256 \cdot 10^{-6} \frac{Vs}{Am} \cdot \frac{225 \cdot 1{,}96 \cdot 10^{-3} m^2}{0{,}18m} = 2{,}45H$$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Az indukált feszültség:

$$U_i = N \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = I \cdot \frac{\Delta L}{\Delta t} = 3A \cdot \frac{0{,}25H}{1s} = 0{,}75V$$

M.10.91

Adatok: μ = 2000, N = 500, l = 8 cm, I_{eff} =0,2 A, f = 50 Hz

A maximális áramerősség: $I_{max} = \sqrt{2} \cdot I_{eff} = 1{,}414 \cdot 0{,}2A = 0{,}283A$

Az ennek megfelelő maximális mágneses mező:

$$B_{max} = \mu \cdot \mu_0 \cdot \frac{N \cdot I_{max}}{\ell} = 2000 \cdot 1{,}256 \cdot 10^{-6} \frac{Vs}{Am} \cdot \frac{500 \cdot 0{,}283A}{0{,}08m} = 4{,}44T$$

A mágneses mező minden olyan pillanatban nulla, mikor az áramerősség is nulla. Ez minden fél periódusban bekövetkezik, így:

$$\Delta t = \frac{T}{2} = \frac{1}{2f} = \frac{1}{100\frac{1}{s}} = 0{,}01s$$

M.10.92

Adatok: l = 5 cm, A = 2 cm, f = 15 Hz, B = 0,7 T

A pálca maximális sebessége: $v_{max} = A \cdot \omega = A \cdot 2\pi \cdot f = 0{,}02m \cdot 2\pi \cdot 15\frac{1}{s} = 1{,}885\frac{m}{s}$

Ez a sebesség az egyensúlyi helyzeten való áthaladáskor alakul ki. Ekkor a pálcában indukálódó feszültség nagysága: $U_i = B \cdot \ell \cdot v_{max} = 0{,}7T \cdot 0{,}05m \cdot 1{,}885\frac{m}{s} = 0{,}066V$

Ez a rezgés során kialakuló maximális feszültség. Mivel a folyamat szinuszosan változik, ezért az effektív feszültség: $U_{eff} = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{0{,}066V}{\sqrt{2}} = 0{,}047V = 47mV$

M.10.93

Adatok: l = 10 cm, N = 80, k_1 = 10, k_2 = 240, f = 48 1/perc, B = 0,05 mT

A fogaskerekek fogszámainak arányából a fordulatszámokra következtethetünk:

$k_1 \cdot f_g = k_2 \cdot f$, amiből $f_g = \frac{k_2}{k_1} \cdot f = \frac{240}{10} \cdot 48\frac{1}{perc} = 1152\frac{1}{perc} = 19{,}2\frac{1}{s} = 19{,}2Hz$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

(f_g a házi generátor fordulatszáma)

A mágneses mezőben való forgás miatt a tekercsben feszültség indukálódik, de csak azokon a szakaszokon, melyek merőlegesek az indukcióvonalakra, azaz párhuzamosak a tengellyel. Egy ilyen 10 cm-es vezetékszakaszban indukálódó feszültség: $U_i = B \cdot \ell \cdot v$, ahol *l* a négyzet egy oldala és v a kerületi sebesség indukcióvonalakra merőleges komponense. Ennek maximális értéke:

$$U_{max} = B \cdot \ell \cdot v_k = B \cdot \ell \cdot 2\pi \cdot \ell \cdot f_g = B \cdot \ell^2 \cdot 2\pi \cdot f_g = 5 \cdot 10^{-5} T \cdot 0{,}01 m^2 \cdot 2\pi \cdot 19{,}2 \frac{1}{s} = 6{,}032 \cdot 10^{-5} V$$

Ennek effektív értéke (a szinuszos változás miatt): $U_{eff} = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}} = 4{,}265 \cdot 10^{-5} V \approx 0{,}04 mV$

Megjegyzés: Hallgatólagosan azt tételeztük fel, hogy a négyzet egyik oldala a forgástengely.

M.10.94*

Adatok: U = 230 V, f = 50 Hz, R = 215 ohm, *l* = 300m, A = 1 mm^2, σ = 0,15 mol/cm^3

A vezeték ellenállása: $R_{vez} = \rho \cdot \frac{\ell}{A} = 0{,}0178 \Omega \cdot \frac{mm^2}{m} \cdot \frac{300 m}{1 mm^2} = 5{,}34 \Omega$

Az eredő ellenállás: $R_e = R + R_{vez} = 215 \Omega + 5{,}34 \Omega = 220{,}34 \Omega$

Az áramkör effektív áramerőssége: $I_{eff} = \frac{U_{eff}}{R_e} = \frac{230 V}{220{,}34 \Omega} = 1 A$

Az áramerősség csúcsértéke: $I_{max} = I_{eff} \cdot \sqrt{2} = 1{,}41 A$

Az áramerősség definíciója szerint nagyon kis *t* idő alatt a vezeték *A* keresztmetszetén átáramlott elektronok töltése: $Q = I \cdot t = 1{,}41 \frac{C}{s} \cdot t$

Az elektron töltéséből következik, hogy az átáramlott elektronok száma:

$N = \frac{Q}{e} = \frac{1{,}41 \frac{C}{s} \cdot t}{1{,}6 \cdot 10^{-19} C} = 8{,}8 \cdot 10^{18} \frac{1}{s} \cdot t$, ez megfelel $1{,}47 \cdot 10^{-5} \frac{mol}{s} \cdot t$ mennyiségnek.

Jelöljük s-sel a t idő alatt átáramlott elektronok úthosszát! Ekkor:

$$s \cdot 0{,}01 cm^2 \cdot 0{,}15 \frac{mol}{cm^3} = 1{,}47 \cdot 10^{-5} \frac{mol}{s} \cdot t$$

A mértékegységekkel egyszerűsítve és átrendezve az egyenletet kapjuk:

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$\frac{s}{t} = \frac{1{,}47 \cdot 10^{-5} \frac{mol}{s}}{1{,}5 \cdot 10^{-3} \frac{mol}{cm}} = 0{,}01 \frac{cm}{s}$. Ez nem más, mint az elektronok maximális sebessége.

A $v_{max} = A \cdot \omega$ képletet átrendezve, az amplitúdóra kapjuk:

$$A = \frac{v_{max}}{\omega} = \frac{v_{max}}{2\pi \cdot f} = \frac{10^{-4} \frac{m}{s}}{2\pi \cdot 50 \frac{1}{s}} = 3{,}2 \cdot 10^{-7} m = 320 nm$$

Az elektronok pályája két amplitúdó hosszúságú, azaz 640 nm.

M.10.95

Adatok: P = 60 W, U = 240 V, I = 3,6 A, N_p:N_{sz} = 1:12

Az izzón lévő adatok azt jelentik, hogy a maximális effektív feszültség 240 V lehet, és ezen a feszültségen az izzó teljesítménye 60 W. Ezekből az adatokból a maximális effektív áramerősség kiszámolható: $I_{max} = \frac{P}{U} = \frac{60W}{240V} = 0{,}25A$

A primer áramkör maximális áramerőssége 3,6 A lehet, és az áramerősségek fordított arányban állnak a menetszámokkal. Azaz: $I : I_{sz,max} = 12 : 1$. Ebből a szekunder áramkör maximális áramerőssége a biztosíték kioldásáig 0,3 A. Az izzó adataiból számított maximális áramerősségből látszik, hogy hamarabb ég ki az izzó, mint ahogy a biztosíték kioldana.

A lámpa 0,25 A értéknél ég ki. A fenti $I_p : I_{max} = 12 : 1$ arányból ez I_p = 3 A primer áramerősségnél következik be. A transzformátoregyenlet miatt: $U_p \cdot I_p = U \cdot I_{max}$,

amiből $U_p = \frac{I_{max}}{I_p} \cdot U = \frac{0{,}25A}{3A} \cdot 240V = 20V$

Megjegyzés: U_p kiszámítható az első transzformátoregyenletből is:

$U_p : U = N_p : N_{sz} = 1 : 12$

A valóságban az izzólámpák rövid időre jelentősen túlfeszíthetők, ami azt jelenti, hogy a névleges feszültségértéküknél magasabb terhelés esetén sem égnek ki azonnal. Ha a primér körben az áramerősséget 3,6 A-re növeljük, akkor a szekunder

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

körben (amint azt már fent láttuk) az áram 0,3 A lesz, amit a villanykörte jó pár óráig kibír, azonban benne megnő a volfrámszál párolgása, ezért a szokásos időnél jóval hamarabb elsötétedik.

M.10.96

Adatok: U_p =230 V, N_p = 10500, P_{max} = 3 W, I_{max} = 1,5 A

Az izzók maximális feszültsége $U_{max} = \frac{P_{max}}{I_{max}} = \frac{3W}{1{,}5A} = 2V$ lehet, így a szekunder feszültség a soros kapcsolás miatt maximum 40 V nagyságú lehet. Ebből a szekunder menetszám:

$N_{sz} = \frac{U_{sz}}{U_p} \cdot N_p \le \frac{40V}{230V} \cdot 105 = 1826$. A szekunder menetszám tehát mintegy 1800 menet.

Ezzel a kialakuló valós szekunder feszültség: $U_{sz} = \frac{N_{sz}}{N_p} \cdot U_p = \frac{1800}{10500} \cdot 230V = 39{,}4V$

Az egy izzóra jutó feszültség: $U = \frac{U_{sz}}{20} = 1{,}97V \approx 2V$.

Az izzó feszültsége és a rajta átfolyó áramerősség Ohm törvénye szerint egyenesen arányos, ezért: $I = \frac{I_{max}}{U_{max}} \cdot U = \frac{1{,}5A}{2V} \cdot 1{,}97V = 1{,}48A$. Ebből egy izzó valós teljesítménye:

$P = U \cdot I = 1{,}97V \cdot 1{,}48A = 2{,}9W$, ami a névleges teljesítmény 97 %-a.

M.10.97

Adatok: $U_1 = U_3$ = 230 V, P_3 = 2 kW, s = 60 m, t = 3 h

A kapcsolás 3 áramkörből áll. A harmadik áramkörben lévő fogyasztó adataiból az áramerősség meghatározható: $I_3 = \frac{P_3}{U_3} = \frac{2000W}{230V} = 8{,}696A$

A transzformálás arányából a második áramkör áramerőssége: $I_2 = \frac{I_3}{8} = 1{,}087A$.

A vezeték összesen 120 m hosszú, a réz fajlagos ellenállásának segítségével az ellenállása:

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$$R_v = \rho\frac{\ell}{A} = 0{,}0178\Omega\cdot\frac{mm^2}{m}\cdot\frac{120m}{1mm^2} = 2{,}136\Omega$$

A rézvezetéken a teljesítményveszteség: $P = R_v\cdot I_2^2 = 2{,}136\Omega\cdot(1{,}087A)^2 = 2{,}524W$

Ha nem használnánk transzformátorokat, akkor a fogyasztó és a vezeték eredő ellenállása:

$$R_e = R + R_v = \frac{U_3}{I_3} + R_v = \frac{230V}{8{,}696A} + 2{,}136\Omega = 28{,}58\Omega$$

Így a hálózati áram erőssége: $I = \frac{U_1}{R_e} = \frac{230V}{28{,}58\Omega} = 8{,}048A$. Ebből a vezetéken a teljesítményveszteség: $P' = R_v\cdot I^2 = 2{,}136\Omega\cdot(8{,}048A)^2 = 138{,}3W$

Az energiamegtakarítás:

$$\Delta E = (P' - P)\cdot t = (138{,}3W - 2{,}524W)\cdot 3h = 407{,}3Wh = 0{,}4073kWh$$

Ez pedig kb. 20 Ft megtakarítást jelent.

M.10.98*

Adatok: U_K = 110 V, U_C =240 V, U_J =100 V, f_1 =50 Hz, f_2 = 60 Hz, ΔI = 0,4 A

A tekercs impedanciája a frekvenciától függ. Jelöljük Z_1-gyel az 50 Hz-hez, Z_2-vel pedig a 60 Hz-hez tartozó impedanciát.

A Kubában és Cipruson mért áramerősség: $I_K = \frac{U_K}{Z_2}$ $I_C = \frac{U_C}{Z_1}$. Az áramerősségek arányából az impedanciák aránya: $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{U_C}{U_K}\cdot\frac{I_K}{I_C} = \frac{240V}{110V}\cdot\frac{1}{3} = 0{,}7273$

Japán keleti és nyugati részén mért áramerősségek különbsége:

$$\Delta I = I_{J1} - I_{J2} = \frac{U_J}{Z_1} - \frac{U_J}{Z_2}$$

A feszültséggel osztva, majd behelyettesítve kapjuk: $\frac{1}{Z_1} - \frac{1}{Z_2} = \frac{\Delta I}{U_J} = \frac{0{,}4A}{100V} = \frac{1}{250\Omega}$

Az impedanciák arányát felhasználva kapjuk:

$\frac{1}{0{,}7273\cdot Z_2} - \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{250\Omega}$, amiből Z_2-t kifejezve: $Z_2 = 93{,}75\Omega$. Ebből $Z_1 = 68{,}18\Omega$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Az impedancia képletének négyzetre emeléséből kapjuk: $Z_1^2 = R^2 + (L \cdot 2\pi \cdot f_1)^2$ és $Z_2^2 = R^2 + (L \cdot 2\pi \cdot f_2)^2$. A két egyenletet kivonva kapjuk: $Z_2^2 - Z_1^2 = L^2 \cdot 4\pi^2 \cdot (f_2^2 - f_1^2)$.

Ebből az induktivitás: $L = \sqrt{\frac{Z_2^2 - Z_1^2}{4\pi^2 \cdot (f_2^2 - f_1^2)}} = \sqrt{\frac{4141\Omega^2}{4\pi^2 \cdot 1100\frac{1}{s^2}}} = 0{,}3088H = 308{,}8mH$

Az ohmos ellenállás pedig:

$$R = \sqrt{Z_1^2 - (L \cdot 2\pi \cdot f_1)^2} = \sqrt{(136{,}4\Omega)^2 - (97{,}01\Omega)^2} = 95{,}89\Omega \approx 96\Omega$$

M.10.99*

Adatok: r = 3 cm, μ = 500, l_{vez} = 200 m, d = 1 mm, U = 230 V, f = 50 Hz

A rézvezeték ellenállása: $R = \rho \cdot \frac{\ell_{vez}}{A_{vez}} = 0{,}0178\Omega \cdot \frac{mm^2}{m} \cdot \frac{200m}{0{,}7854mm^2} = 4{,}533\Omega$. Ez egyben a tekercs ohmikus ellenállása.

A tekercs menethossza: $K = 2\pi \cdot r = 0{,}1885m$, ebből a menetszám:

$$N = \frac{\ell_{vez}}{K} = \frac{200m}{0{,}1885m} = 1061$$

A rézvezeték vastagságából és a menetszámból meghatározható a tekercs hossza:

$$\ell = N \cdot d = 1061 \cdot 1mm = 1{,}061m$$

A tekercs keresztmetszete: $A = r^2 \cdot \pi = 9cm^2 \cdot \pi = 28{,}27cm^2$

A tekercs induktivitása:

$$L = \mu \cdot \mu_0 \cdot \frac{N^2 \cdot A}{\ell} = 500 \cdot 1{,}256 \cdot 10^{-6} \frac{Vs}{Am} \cdot \frac{1061^2 \cdot 28{,}27 \cdot 10^{-4} m^2}{1{,}061m} = 1{,}884H$$

A tekercs impedanciája: $Z = \sqrt{R^2 + (L \cdot 2\pi \cdot f)^2} = \sqrt{(4{,}533\Omega)^2 + (591{,}9\Omega)^2} = 591{,}91\Omega$

Az áramerősség: $I = \frac{U}{Z} = \frac{230V}{591{,}91\Omega} = 0{,}3886A \approx 0{,}4A$

A hatásos teljesítmény: $P_h = R \cdot I^2 = 4{,}533\Omega \cdot (0{,}3886A)^2 = 0{,}6845W \approx 0{,}7W$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.10.100*

Adatok: R = 200 ohm, L = 500 mH, U = 230 V, f = 50 Hz

Azonos feszültség esetén abban az esetben nem változik az áramerősség, ha az impedancia is változatlan. Ezek szerint: $R^2 + X_L^2 = R^2 + (X_L - X_C)^2$. A műveletek elvégzése és egyszerűsítés után azt kapjuk, hogy $X_C = 2X_L$, azaz $\frac{1}{C \cdot \omega} = 2L \cdot \omega$. Ebből a kapacitás: $C = \frac{1}{2L \cdot 4\pi^2 \cdot f^2} = \frac{1}{1H \cdot 4\pi^2 \cdot 2500\frac{1}{s^2}} = 1{,}013 \cdot 10^{-5} F = 10{,}13\mu F \approx 10\mu F$

Az impedancia az első esetben: $Z = \sqrt{R^2 + (L \cdot 2\pi \cdot f)^2} = \sqrt{(200\Omega)^2 + (157{,}1\Omega)^2} = 254{,}3\Omega$

Ebből az áramerősség: $I = \frac{U}{Z} = \frac{230V}{254{,}3\Omega} = 0{,}9044A \approx 0{,}9A$

M.10.101*

Adatok: C = 800 nF, U = 24 V, f_1 = 200 Hz, f_2 = 800 Hz

A két esetben azonos feszültség mellett akkor nem változik az áramerősség, ha az impedancia is változatlan: $R^2 + \left(L \cdot 2\pi \cdot f_1 - \frac{1}{C \cdot 2\pi \cdot f_1}\right)^2 = R^2 + \left(L \cdot 2\pi \cdot f_2 - \frac{1}{C \cdot 2\pi \cdot f_2}\right)^2$. A műveletek elvégzése és egyszerűsítések után kapjuk:

$\frac{1}{C \cdot 2\pi \cdot f_1} - L \cdot 2\pi \cdot f_1 = L \cdot 2\pi \cdot f_2 - \frac{1}{C \cdot 2\pi \cdot f_2}$. Ebből L-et kifejezve kapjuk:

$L = \frac{1}{C \cdot 4\pi^2 \cdot f_1 \cdot f_2} = \frac{1}{8 \cdot 10^{-7} F \cdot 4\pi^2 \cdot 160000\frac{1}{s^2}} = 0{,}198H$

Az áramerősség abban az esetben lesz maximális, ha az impedancia minimális. Ez akkor következik be, ha az induktív és a kapacitív ellenállás egyenlő, azaz:

$L \cdot 2\pi \cdot f = \frac{1}{C \cdot 2\pi \cdot f}$. Az

egyenletet f-re rendezve kapjuk: $f = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C \cdot 4\pi^2}} = \sqrt{\frac{1}{0{,}1979H \cdot 8 \cdot 10^{-7} F \cdot 4\pi^2}} = 400Hz$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Megjegyzés: Általában is igaz, hogy ha f_1 és f_2 frekvencián az áramerősség, azaz az impedancia ugyanakkora, akkor a két frekvenciaérték mértani középértékénél lesz az áram maximális, azaz az impedancia minimális.

M.10.102

Adatok: N = 300, A = 10 cm^2, l = 10 cm, λ =250 m

A tekercs induktivitása:

$$L = \mu_0 \cdot \frac{N^2 \cdot A}{\ell} = 1{,}256 \cdot 10^{-6} \frac{Vs}{Am} \cdot \frac{9 \cdot 10^4 \cdot 10^{-3} m^2}{0{,}1 m} = 1{,}13 \cdot 10^{-3} H = 1{,}13 mH$$

Az elektromágneses hullámok terjedési sebessége alapján a rezgés frekvenciája:

$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}}{250 m} = 1{,}2 \cdot 10^6 Hz$. A Thomson-képlet alapján:

$$C = \frac{1}{L \cdot 4\pi^2 \cdot f^2} = \frac{1}{1{,}13 \cdot 10^{-3} H \cdot 4\pi^2 \cdot 1{,}44 \cdot 10^{12} \frac{1}{s^2}} \approx 1{,}6 \cdot 10^{-11} F = 15 pF$$

M.10.103

Adatok: C = 5 nF, f = 50 kHz, I_{max} = 16 mA

Az antenna tekercsének induktivitása a Thomson-képletből:

$$L = \frac{1}{C \cdot 4\pi^2 \cdot f^2} = \frac{1}{5 \cdot 10^{-9} F \cdot 4\pi^2 \cdot 25 \cdot 10^8 \frac{1}{s^2}} = 2{,}026 \cdot 10^{-3} H = 2{,}026 mH$$

A tekercs legnagyobb mágneses energiája:

$$E = \frac{1}{2} L \cdot I_{max}^2 = 1{,}013 \cdot 10^{-3} H \cdot 2{,}56 \cdot 10^{-4} A^2 = 2{,}59 \cdot 10^{-7} J$$

M.10.104

Adatok: Δλ = 175 m

Legyen az eredeti rezgőkör induktivitása L, kapacitása C. A vasmagos tekercs induktivitása a képlet alapján: L' = μL = 270L. A kondenzátor lemezeinek távolsága fordítottan arányos a kapacitásával, így az elhangolt kapacitás: C' = 3C. A hullámhosszváltozás mértéke a Thomson-képlet alapján:

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = c \cdot T' - c \cdot T = c \cdot 2\pi \cdot \sqrt{270L \cdot 3C} - c \cdot 2\pi \cdot \sqrt{L \cdot C} = c \cdot 2\pi \cdot \sqrt{L \cdot C} \cdot \left(\sqrt{810} - 1\right).$$

Ebből az egyenletből az eredeti rezgőkör frekvenciája meghatározható:

$$f = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{L \cdot C}} = \frac{c \cdot \left(\sqrt{810} - 1\right)}{\Delta\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8 \frac{m}{s} \cdot 27{,}46}{175m} = 4{,}7 \cdot 10^7 Hz = 47MHz$$

Megjegyzés: Mivel a tekercs induktivitása is növekedett és a kondenzátor kapacitása is nőtt, ezért biztosak lehettünk a megoldás során, hogy a hullámhossz változás növekedést jelent..10.105*

Adatok: f = 5,2 GHz

A két lemez között a 2 belső csomópont miatt 1,5 hullámhossznyi távolság van. Azaz:

$$\ell = 1{,}5 \cdot \lambda = 1{,}5 \cdot \frac{c}{f} = 1{,}5 \cdot \frac{3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}}{5{,}2 \cdot 10^9 \frac{1}{s}} = 0{,}087m$$

Az eredeti kapacitást C-vel jelölve a megnövelt kapacitás 1,2C lesz. Emiatt megváltozik a frekvencia is: $f' = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{L \cdot 1{,}2C}} = \frac{1}{\sqrt{1{,}2}} \cdot \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{L \cdot C}} = \frac{1}{\sqrt{1{,}2}} \cdot f = 4{,}75GHz$

Távolítva a lemezt az antenna és a lemez között most is 1,5 hullámhossznyi távolság van:

$$\ell' = 1{,}5 \cdot \lambda' = 1{,}5 \cdot \frac{c}{f'} = 1{,}5 \cdot \frac{3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}}{4{,}75 \cdot 10^9 \frac{1}{s}} = 0{,}095m$$

A távolítás mértéke $\Delta\ell = \ell' - \ell = 8 \cdot 10^{-3} m = 8mm$

M.10.106

Adatok: f = 1,24 GHz, s_1 = 600 m, s_2 = 800 m

A barátok akkor tudják venni a jeleket, ha a két hullám erősíti egymást. Az elő esetben Péter a Két antennától azonos távolságra van, így a két jelet ellentétes fázisban kapja, a hullámok kioltják egymást. Miklóstól a két antenna különböző távolságra van, ha a távolabbiból a jel azonos fázisban érkezik a közelebbi antennához, akkor a két jel erősítve érkezik Miklóshoz. Ennek feltétele, hogy a két

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

antenna távolsága $s = \left(k + \frac{1}{2}\right) \cdot \lambda$, ahol k természetes szám. A frekvenciát felhasználva:

$$s = \left(k + \frac{1}{2}\right) \cdot \lambda = \left(k + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{c}{f} = \left(k + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}}{1{,}24 \cdot 10^9 \frac{1}{s}} = \left(k + \frac{1}{2}\right) \cdot 0{,}2419 m .$$

Így a legrövidebb távolság: 12,1 cm. További megoldások: 36,3 cm, 60,48 cm, 84,67 cm

A második esetben ugyanez a helyzet, a jelenség nem függ a barátok távolságától.

Megjegyzés: Az antennáktól távolabb az elektromos mező és a mágneses mező egymással fázisban, közelítőleg síkhullám alakjában terjed, azonban az antennák közvetlen közelében ennél jóval bonyolultabb a helyzet. Ezért szerencsésebb néhány hullámhossznyira meg egy félre tenni az antennákat a tréfához. És az is ezt indokolja, hogy ebben az esetben a két antennából érkező intenzitások is gyakorlatilag megegyeznek a kioltás helyén (egyébként az intenzitás ügyes beállítására is szüksége van Andrásnak a teljes kioltáshoz).

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

TESZTFELADATOK

10.107

Mágneses mező indukcióvonalai koncentrikus negyed körívek. A szomszédos körívek távolsága állandó. Homogén ez a mágneses mező?

A) Igen, hiszen az indukcióvonalak azonos sűrűségűek, a B értéke mindenhol ugyanakkora.

B) Nem, hiszen az indukcióvonalak görbék, a B iránya pontról-pontra változik.

C) Nem, hiszen az indukcióvonalak különböző hosszúságúak, a B értéke pontról-pontra változik.

M.10.107 A helyes válasz: B

A homogén mágneses mező feltétele, hogy a tér minden pontjában az indukcióvektor ugyanakkora legyen. A vektor tulajdonság miatt nemcsak a B nagyságára, hanem az irányára is figyelni kell.

10.108 Seprűnyélre rézdrótot tekerünk úgy, hogy menetei szorosan egymás mellett legyenek. A 10 cm hosszú tekercs elkészülte után zsebtelepre kötjük és mérjük a mágneses terét. Azután a tekercs egyik végéhez újabb rézdrótot forrasztunk és folytatjuk a tekercselést, míg az egész nyélre drót nem kerül. Az így meghosszabbított tekercset újból zsebtelepre kötjük, és ismét megmérjük a mágneses teret. Milyen irányba változott a mágneses tér nagysága a második esetben?

A) A második esetben nagyobb a mágneses tér.

B) A második esetben nem változik a mágneses tér.

C) A második esetben kisebb a mágneses tér.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.10.108 A helyes válasz: C

A tekercs mágneses terét meghatározó képlet alapján a második esetben nagyobb lesz a tekercs hossza, de a szoros tekercselés miatt ugyanolyan mértékben változik a menetszám is, ez tehát nem befolyásolja a mágneses teret. Viszont ,mindkét esetben zsebtelepet használunk, így a hosszabb – és ezáltal nagyobb ellenállású – tekercsben kisebb lesz az áramerősség, vagyis gyengébb a mágneses tér.

10.109 Megfigyelték, hogy amikor egy villám egy fémtárgy közelében csap le, akkor az mágnesessé válik. A kertben kinnfelejtett véső közelében függőlegesen egyenes villám csap le. Milyen helyzetben legyen a véső a villámhoz képest, hogy a lehető legnagyobb eséllyel mágneseződjön?

A) Függőlegesen, párhuzamosan a villámmal.
B) Vízszintesen, a villám felé mutatva.
C) Vízszintesen, a villám felé mutató irányra merőlegesen.

M.10.109 A helyes válasz: C)

Hosszú egyenes vezető, jelen esetben a villám, maga körül koncentrikus szerkezetű mágneses mezőt hoz létre. B iránya a körök érintőinek irányába mutat. Ez az irány a legmegfelelőbb a véső pozíciójára.

10.110 Kincsvadászok könnyebben találnak fémdetektorral arany tallért, mint lyukas garast. Miért?

A) A tallér relatív permeabilitása jobb, mint a garasé.
B) A tömör tallérban nagyobb a köráram, mint a lyukas garasban.
C) A tallér paramágneses, a garas diamágneses.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.10.110 A helyes válasz: B

A fémdetektorok az általuk kibocsátott mágneses mező és a belekerülő fémekben kialakuló köráramok kölcsönhatását érzékelik. Az anyagok mágneses tulajdonságai kevésbé számottevők. Egyszerűen a fémek mérete a döntő tényező.

10.111 Rézkarikát ejtünk ugyanolyan magasságból farúdra, majd mágnesrúdra. Melyik esetben nagyobb a karika végsebessége?

A) Az első esetben, hiszen a Lenz-törvény miatt a mágnesrúd fékezi a karika esését.
B) A második esetben, hiszen a mágnes vonzó hatása gyorsítja a karika esését.
C) A végsebesség mindkét esetben ugyanakkora.

M.10.111 A helyes válasz: A

A réz diamágneses anyag, a mágnesnek rá nincs vonzó hatása, viszont a karikában kialakuló indukált áram iránya olyan, hogy igyekszik fenntartani a karikát.

10.112 Függőlegesen lefelé mutató, erős homogén mágneses mezőben sétálunk, két kézzel magunk előtt tartva egy fémpálcát vízszintes helyzetben. Mi történik a pálcában lévő elektronokkal?

A) Az elektronok a jobb kezünk felé vándorolnak.
B) Az elektronok a bal kezünk felé vándorolnak.
C) Az elektronok áramforrás hiányában nem vándorolnak.

M.10.112 A helyes válasz: A

Ha homogén mágneses mezőben töltéseket mozgatunk, azokra Lorentz-erő hat, mely a jobbkéz-szabály szerint elmozdítja a töltéseket a pálcában.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

10.113 Egy kondenzátor homogén elektromos mezőjébe az E-vonalakra merőlegesen elektront lövünk, és vizsgáljuk az elektron pályáját. Majd ugyanakkora sebességgel egy patkómágnes sarkai közötti homogén mágneses mezőbe lőjük az elektront. A sebesség iránya most is merőleges a B-vonalak irányára. Miben különbözik az elektron által befutott két pálya?

A) A két pálya különböző sugarú körívből áll.
B) A két pálya különböző alakú görbékből áll.
C) A két pálya nem különbözik egymástól.

M.10.113 A helyes válasz: B

Az első esetben parabola, míg a másodikban körív alakú a pálya.

10.114 Vasrúdra drótot tekerünk úgy, hogy menetei szorosan egymás mellett legyenek. A tekercs elkészülte után az egyik végéhez újabb, az előzővel azonos hosszúságú drótot forrasztunk és folytatjuk a tekercselést. Hányszorosa az így meghosszabbított tekercs induktivitása az eredetinek?

A) Kétszerese
B) Négyszerese
C) Fele

M.10.114 A helyes válasz: A

A paraméterek közül a menetszám és a tekercshossz is a duplájára nő. Az induktivitás képletét felhasználva látható, hogy összességében az induktivitás is a duplájára nő.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

10.115 Három tökéletesen egyforma tekercset egymás után kötve 24 V egyenfeszültségre kötjük. Hányszorosa a három tekercs mágneses energiája, ahhoz képest, mintha az áramforrásra csak egy tekercset kötnénk?

A) Háromszorosa

B) Változatlan

C) Harmadakkora

M.10.115 A helyes válasz: C

A képlet alapján a mágneses energia az induktivitástól és az áramerősségtől függ. Soros kapcsolás esetén az ellenállások összeadódnak, így az első esetben harmadakkora az áramerősség, mint a másodikban. Így egy tekercs mágneses energiája kilencede a második esethez képest. Mivel azonban az áramkörben három tekercs van, így összességében a mágneses energia harmadakkora.

10.116 Iskolai transzformátor U alakú vasmagjának szárain kis rugók találhatók. Erre ráhelyezzük a záró vasmagot, majd a transzformátort hálózati feszültség segítségével működésbe hozzuk. Működés közben a záró vasmag rezgésbe jön. Mekkora a rezgés frekvenciája?

A) 50 Hz

B) 60 Hz

C) 100 Hz

M.10.116 A helyes válasz: C

A primer feszültség frekvenciája 50 Hz. Mivel a vasmagot az északi és a déli pólus is vonzza, ezért egy periódus alatt a vasmag kétszer nyomja össze a rugót, így a rezgés frekvenciája duplája a hálózati frekvenciának.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

10.117 Milyen esetben lesz egy váltakozó áramú áramkörben a látszólagos és a hatásos teljesítmény egyenlő?

A) Ha az ohmos ellenállás és az impedancia egyenlő
B) Ha az induktivitás és a kapacitás egyenlő
C) Ha φ = 90°

M.10.117 A helyes válasz: A

A kérdéses esetben a teljesítménytényező, azaz a cos φ értéke 1 kell legyen. Ez pedig akkor áll fenn, ha R és Z egyenlő. Ilyenkor az induktív és a kapacitív ellenállás is egyenlő egymással.

10.118 Két azonos hosszúságú és átmérőjű alumínium és vörösréz huzalból egyforma tekercseket készítünk. Hálózati feszültségre kapcsolva, melyiken lesz nagyobb az áram fáziskésése?

A) Alumínium
B) Réz
C) Nem lesz különbség

M.10.118 A helyes válasz: B

A két tekercs induktivitása egyenlő, hiszen minden paraméter (N, A, *l*) megegyezik. A tekercsek ellenállása viszont a fajlagos ellenállás miatt különbözik. Az alumínium tekercs ohmos ellenállása nagyobb. Így a fáziskésés a réz esetében nagyobb.

10.119 Hány százalékkal változik meg egy rezgőkör periódusideje, ha induktivitását 20 %-kal növeltük, kapacitását ugyanakkor 20 %-kal csökkentettük?

A) 0 %

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

B) 2 %

C) 4 %

M.10.119 A helyes válasz: B

A képlet szerint: $T' = 2\pi \cdot \sqrt{1{,}2L \cdot 0{,}8C} = \sqrt{0{,}96} \cdot T \approx 0{,}98 \cdot T$

10.120 Mikrohullámú sütőben elromlott a forgótányér, ezért a sajtos melegszendvicsen csak sávokban olvadt meg a sajt. A sávok egymástól 6 cm-re vannak. Mekkora hullámhosszú mikrohullámot használ a sütő?

A) 3 cm

B) 6 cm

C) 12 cm

M.10.120 A helyes megoldás: C

A megolvadt sávok az állóhullámok duzzadóhelyei, így két sáv távolsága épp a hullámhossz fele.

10.121 Egy iránytű fölé feltöltött síkkondenzátort helyezünk úgy, hogy a függőleges helyzetű pozitív lemez az északi pólus felé, a negatív lemez a déli pólus felé áll. A kondenzátor lemezeit egy tekerccsel összekötjük. Mi történik az iránytűvel ezalatt?

A) Az iránytű nem mozdul.

B) Az iránytű 90°-kal elfordul.

C) Az iránytű 180°-kal elfordul.

M.10.121 A helyes válasz: A

A kondenzátorban váltakozó elektromos mező lesz, mely körül, az E-vonalakra merőlegesen koncentrikus szerkezetű, váltakozó mágneses mező alakul ki. Ennek irányába állna be az iránytű (hasonlóan az Oersted kísérlethez). Azonban a változás gyorsaságát (a rezgőkör frekvenciáját) az iránytű nem képes követni, tehetetlensége miatt egy helyben marad.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

10. 122. Homogén mágneses mezőbe hidrogénionokat lövünk közel azonos sebességgel. Az ionok sebessége és a mágneses indukcióvektor egyirányú. Milyen pályán mozognak az ionok?

A) Közel azonos körpályákon.

B) Egy bizonyos körpályán.

C) Egyenes pályán.

M.10.122. A helyes válasz: C

10. 123. Egy felfüggesztett rugó alsó végére egy kis rúdmágnest erősítünk, majd kitérítve rezgésbe hozzuk, és mérjük a rezgés csillapodásának idejét. Hogyan alakul a csillapodási idő nagysága, ha a mérést úgy ismételjük meg, hogy a kitérítés előtt a mágnes egyensúlyi helyzetében a mágnes körül vízszintes síkú, lapos tekercset helyezünk, melyen a mágnes súrlódás nélkül keresztülhaladhat?

A) Kisebb lesz.

B) Nagyobb lesz.

C) Változatlan nagyságú lesz.

M.10.123. A helyes válasz: A

10. 124. (Emelt szintű, szürke) Egy vasmagos tekercsre váltakozó feszültséget kapcsolunk. A feszültségforrást úgy tudjuk szabályozni, hogy a feszültség frekvenciája változhat, miközben az effektív feszültség értéke állandó marad. Hogyan változik az áramerősség effektív értéke és a fázisszög, ha a feszültség frekvenciáját növeljük?

A) Az effektív áramerősség nő, a fázisszög nő.

B) Az effektív áramerősség nő, a fázisszög csökken.

C) Az effektív áramerősség csökken, a fázisszög nő.

D) Az effektív áramerősség csökken, a fázisszög csökken.

M.10.124. A helyes válasz: C.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

ESSZÉKÉRDÉSEK

10.125. A Lorentz-erő

Ismertesse egy áramvezetőre ható Lorentz-erő tulajdonságait, mely mágneses mezőben helyezkedik el. Adjon módszert az erő irányának meghatározásához. Hogyan alkalmazható ez a jelenség egy képcső katódsugarán? Értelmezze a sarki fény jelenségét. Mi állapítható meg két, párhuzamosan futó áramjárta vezeték kölcsönhatásakor? Mutassa be, milyen kísérletek irányulnak jelenleg a plazma állapotú anyagok csapdába ejtésére!

10.126. Az erőműtől a konnektorig

Ismertesse a generátor működési elvét. Adjon példákat a generátor lehetséges működtetésére. Ezek közül melyeket használják Magyarországon? Ismertesse a keletkező hálózati feszültség tulajdonságait. Mutassa be, milyen okok vezettek a transzformátor megalkotásához. Mi a feladata a „háromeres” vezeték három, különböző színű vezetékének?

10.127. Az elektromágneses hullám

Adjon módszert, hogyan kelthetünk elektromágneses hullámokat. Csoportosítsa a különféle elektromágneses hullámokat valamely tulajdonságuk szerint. Mutasson be kísérleteket, melyek az elektromágneses hullámok hullámtulajdonságait igazolják. Értelmezze a fénynyomás jelenségét.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

KIHÍVÁST JELENTŐ FELADATOK

M.10.128**

Adatok: α = 30°, *l* = 1 m, R = 5 ohm, B = 1,25 T, m = 0,2 kg, μ = 0,1

Az első esetben a rúdra ható erők eredője gyorsítani kezdi a rudat, majd az egyre növekvő Lorentz-erő a mozgást egyenletessé teszi. Ekkor:

$mg \cdot \sin\alpha - \mu \cdot mg \cdot \cos\alpha = I \cdot B \cdot \ell$, ahol I a mozgás miatt indukált áram erőssége. Ezt az indukált feszültség és az ellenállás határozza meg: $I = \frac{U}{R} = \frac{B \cdot \ell \cdot v}{R}$. A fenti egyenletbe behelyettesítve, majd rendezve az egyenletet v-re kapjuk:

$$v = \frac{R \cdot (mg \cdot \sin\alpha - \mu \cdot mg \cdot \cos\alpha)}{B^2 \cdot \ell^2} = \frac{R \cdot mg \cdot (1 - \sqrt{3}\mu)}{2 \cdot B^2 \cdot \ell^2}.$$

A második esetben akkor áll meg a rúd ugyanazon a helyen, ha a lejtő alján ugyanakkora a végsebessége, mint az első estben. Ekkor h-val jelölve a kezdeti magasságot alkalmazzuk a munkatételt:

$mg \cdot h - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \mu \cdot mg \cdot 2h \cos 30° = \sqrt{3}\mu mgh$, ahol 2h a h magasról 30°-ban megtett út hossza. Fejezzük ki h-t:

$$h = \frac{\frac{1}{2} \cdot v^2}{g \cdot (1 - \sqrt{3}\mu)}$$

Helyettesítsük be v-t, így h-ra kapjuk:

$$h = \frac{\frac{1}{2} \cdot v^2}{g \cdot (1 - \sqrt{3}\mu)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{R^2 \cdot m^2 g^2 \cdot (1 - \sqrt{3}\mu)^2}{4 \cdot B^4 \cdot \ell^4}}{g \cdot (1 - \sqrt{3}\mu)} = \frac{R^2 \cdot m^2 g \cdot (1 - \sqrt{3}\mu)}{8 \cdot B^4 \cdot \ell^4} = 0{,}415m \approx 40cm.$$

M.10.129**

Adatok: R = 4 ohm, U = 230 V, f = 50 Hz, N = 800, A = 10 cm^2, r = 6 cm

A vezeték maga körül változó mágneses mezőt hoz létre, mely r távolságban:

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$$B = \mu_0 \cdot \frac{i}{2\pi \cdot r} = \mu_0 \cdot \frac{u}{R \cdot 2\pi \cdot r} = \mu_0 \cdot \frac{U_0}{R \cdot 2\pi \cdot r} \cdot \sin(\omega t)$$

A körtekercsben emiatt változik a fluxus is (feltesszük, hogy a toroid belsejében az átlagtér akkora, mint a középköre mentén):

$$\Phi = BA = \mu_0 \cdot \frac{U_0 \cdot A}{R \cdot 2\pi \cdot r} \cdot \sin(\omega t)$$

Az indukált feszültség: $U_i = N \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$, vagyis a fluxus változási gyorsaságától függ (idő szerinti deriváltja).

Megj: A számítás hasonlít a harmonikus rezgőmozgás kitérése és sebessége közötti kapcsolathoz.

Behelyettesítve: $U_i = N \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = N \cdot \mu_0 \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot U \cdot A}{R \cdot 2\pi \cdot r} \cdot \omega \cdot \cos(\omega t) = \sqrt{2} \cdot N \cdot \mu_0 \cdot \frac{U \cdot A}{R \cdot r} \cdot f \cdot \cos(\omega t)$

A kialakuló feszültség szinuszos, és effektív értéke:

$$U_{eff} = N \cdot \mu_0 \cdot \frac{U \cdot A}{R \cdot r} \cdot f = 800 \cdot 1{,}256 \cdot 10^{-6} \frac{Vs}{Am} \cdot \frac{230V \cdot 10^{-3} m^2}{4\Omega \cdot 0{,}06m} \cdot 50\frac{1}{s} = 0{,}048V = 48mV.$$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

11. FEJEZET: OPTIKA

ALAPOZÓ FELADATOK

A FÉNY. A GEOMETRIAI OPTIKA ALAPFOGALMAI

M.11.01.

$t = \frac{s}{c}$, $c = 3 \cdot 10^8$ m/s

a) $t = \frac{s}{c} = 10^{-8}$ s

b) $t = \frac{s}{c} = 1.33 \cdot 10^{-3}$ s

c) A Nap-Föld távolság kb. 150 millió km. $t = \frac{s}{c} \approx 500$ s

M.11.02.

$t = \frac{s}{c}$, $c = 3 \cdot 10^8$ m/s

A Hold-Föld távolság kb. 384 000 km. $t = \frac{s}{c} \approx 1{,}28$ s

M.11.03.

a) 160 ezer év

b) $s = c \cdot t = 1{,}51 \cdot 10^{18}$ km (ami természetesen 160 000 fényév km-ben kifejezve)

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.11.04.

Adatok: $c_1 = 3 \cdot 10^8$ m/s, $c_2 = 340$ m/s, $t_2 - t_1 = 6$ s.

$$c_1 = \frac{s}{t_1} \Rightarrow t_1 = \frac{s}{c_1},\ t_2 = \frac{s}{c_2}$$

$$t_2 - t_1 = s \cdot \left[\frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_1} \right]$$

$$s = \frac{c_2 \cdot c_1}{c_1 - c_2} \cdot (t_2 - t_1) \approx c_2 \cdot (t_2 - t_1) = 2040 \text{ m} \approx 2 \text{ km}$$ (vagyis a dörgés minden 3 másodperces késése 1 km-es távolságnak felel meg)

Megjegyzés: A fény olyan gyorsan terjed, hogy lényegében a felvillanáskor azonnal meglátjuk a villámot, azonban a dörgésre gyakran váratlanul hosszú ideig kell várnunk.

M.11.05.

Adatok: $c_1 = 3 \cdot 10^8$ m/s, $c_2 = 340$ m/s, s = 20 m.

$$c_1 = \frac{s}{t_1} \Rightarrow t_1 = \frac{s}{c_1},\ t_2 = \frac{s}{c_2}$$

$$t_2 - t_1 = s \cdot \left[\frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_1} \right] \approx \frac{s}{c_2} = 0{,}059 \text{ s}$$

M.11.06.

Milyen távoli hegycsúcsok között próbálhatta mérni Galilei a fény sebességét? 30 km-re, esetleg 300 km-re voltak a csúcsok egymástól? A 300 km már igen abszurdnak, erős felső becslésnek tekinthető. 300 km-t egyezred másodperc alatt tesz meg a fény. Az emberi reakcióidő 0,2-03 s. Tehát Galileinek a reakcióidő kb. ezredrészét kellett volna mérnie, amit nem tudott.

M.11.07.

Adatok: Budapest a 47. északi szélességi kör közelében van: $\alpha = 47^\circ$, a Föld sugara R = 6370 km.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

A Föld tengely körüli forgás miatt a Budapest közelében lévő pont kerületi sebesség

$$v = \frac{2R\pi \cdot \cos\alpha}{T} = 316\text{m/s}$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{v}{c} = 1{,}053 \cdot 10^{-6} \Rightarrow \alpha = 6{,}04 \cdot 10^{-5}\,^\circ \approx 0{,}217''$$

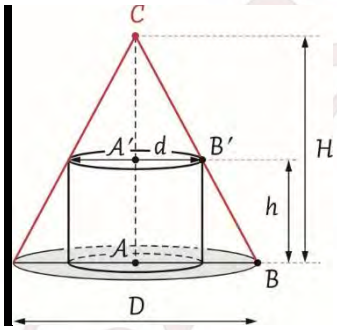
M.11.08

Adatok: d = 9 cm, D = 12 cm, h = 10 cm.

a) A bögre (henger) forgástengelyére illeszkedik a pontszerűnek tekinthető fényforrás.

b) Az árnyék a következő síkidomokra darabolható:ellipszis-, és egy körcikk, illetve egy ellipsziscikk, egy négyszög és egy körcikk (így egymás után). Olyan is előfordulhat, hogy a kezdeti kör csak egy kissé deformálódik, és teljes ellipszis lesz.

c) Vázlatrajzot készítve, és a két hasonló háromszögre $\left(ABC_\Delta \sim A'B'C_\Delta\right)$ felírva a megfelelő oldalak arányának egyenlőségét:



$$H : (H - h) = D : d \Rightarrow H = \frac{D}{D-d} \cdot h = 40\text{ cm}.$$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

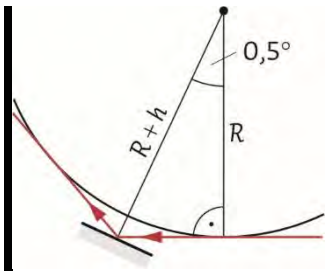
SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

A FÉNYVISSZAVERŐDÉS

M.11.09.

Adatok: A Föld sugara R = 6370 km.

a)



A félfokos derékszögű háromszög hosszabb befogója R, az átfogója:

$$R+h=\frac{R}{\cos 0{,}5^\circ} \Rightarrow h=\left(\frac{1}{\cos 0{,}5^\circ}-1\right)\cdot R=243\ \text{m}$$

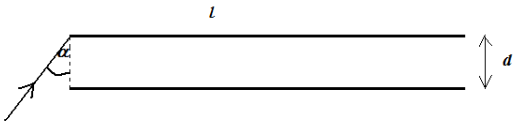
b) $89{,}5^\circ$

c) A fény által megtett út: $s=360\cdot 2\cdot (R+h)\cdot \sin 0{,}5^\circ = 40\ 024\ 900\ \text{m}$

(kb. 1020 méterrel nagyobb a Föld kerületénél.) Az ehhez szükséges idő:

$t=\frac{s}{c}=0{,}133\ \text{s}$.

M.11.10.



Adatok: d = 10 cm, l = 1 m, $\alpha=30^\circ$, $c=3\cdot 10^8\ \text{m/s}$

Az $\alpha=30^\circ$ hegyesszögű háromszög átfogóját (s) teszi meg a fény, miközben a kisebb befogóval egyenlőt halad „előre” a két síktükör között, ezért $s=2\cdot l=2\ \text{m}$ úton,

$t=\frac{s}{c}=\frac{2}{3}\cdot 10^{-8}\ \text{s}$ idő alatt.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.11.11.

a) Nem kell attól félni, hogy a tükrök pici elmozdulása miatt a távolságmérés meghiúsul, hisz a saroktükörnek az a tulajdonsága, hogy ráeső fénysugár irányát két vagy három visszaverődés során ellentétesre változtatja.

b) A Hold-Föld távolság kb. 384 000 km. $t = \frac{2 \cdot s}{c} \approx 2{,}56 \text{ s}$.

M.11.12.

Adatok: s = 200 m, $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.

$$t = \frac{2 \cdot s}{c} = \frac{4}{3} \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

M.11.13.

Adatok: f = +12 cm.

a) $f = \frac{R}{2} \Rightarrow R = 2 \cdot f = 24 \text{ cm}$

b) Ha a görbültség a 3/2-szeresére nő, akkor az új sugár: $R' = \frac{2}{3} R = 16 \text{ cm}$.

Most a fókusztávolság: $f' = \frac{R'}{2} = 8 \text{ cm}$.

M.11.14.

Adatok: f = -16 cm.

a) $f = \frac{R}{2} \Rightarrow R = 2 \cdot f = -32 \text{ cm}$

b) Ha a görbültség a 2/3-szeresére csökken, akkor az új sugár: $R' = \frac{3}{2} R = -48 \text{ cm}$.

Most a fókusztávolság: $f' = \frac{R'}{2} = -24 \text{ cm}$.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

A FÉNY TÖRÉSE

M.11.15.

Adatok: $c_1 = 1{,}93 \cdot 10^8$ m/s, $c_2 = 1{,}52 \cdot 10^8$ m/s, $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

a) $n_{1,l} = \dfrac{c}{c_1} = 1{,}55$

b) $n_{2,1} = \dfrac{c_1}{c_2} = 1{,}27.$

M.11.16.

Adatok: $n_{v,l} = 4/3$, $c = 3 \cdot 10^8$ m/s, $\alpha = 40^\circ$.

a) $n_{v,l} = \dfrac{c}{c_{víz}} \Rightarrow c_{víz} = \dfrac{c}{n_{v,l}} = 2.25 \cdot 10^8$ m/s

b) Alkalmazzuk a Snellius-Descartes törési törvényt:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n \Rightarrow \sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n} = 0{,}482 \Rightarrow \beta = 28{,}8^\circ$$

M.11.17.

Adatok: $n_{v,l} = 4/3$, $90^\circ - \alpha = 30^\circ \Rightarrow \alpha = 60^\circ$.

Alkalmazzuk a Snellius-Descartes törési törvényt:

$\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n \Rightarrow \sin\beta = \dfrac{\sin\alpha}{n} = 0{,}65 \Rightarrow \beta = 40{,}5^\circ$, vagyis a Nap a vízszinteshez képest magasabban, (90 – 40,5)° = 49,5°-ban látszik.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Megjegyzés: Érdekes észrevennünk, hogy a horizont sem a vízszintesben látszik a víz alól, hanem magasabban, 90° – $\sin^{-1}(1/n)$ = 41,4°-ban, tehát a víz alól a Nap a látszólagos horizont felett mindössze (49,5 – 41,4)° = 8,1°-ban látszik. Ha víz alól nézzük a világot, akkor kis beesési szög esetén alig látunk torzítást, nagy beesési szögek esetén viszont a torzítás igen jelentős lesz.

M.11.18.

Adatok: $\alpha = 40^\circ$, $\beta = 15{,}5^\circ$.

Alkalmazzuk a Snellius-Descartes törési törvényt:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n = 2{,}4$$

A Négyjegyű függvénytáblázatok segítségével megállapítható, hogy a vizsgált kristály a gyémánt.

M.11.19.

Adatok: $\alpha = 30^\circ$, n = 1,6.

Alkalmazzuk a Snellius-Descartes törési törvényt:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n \Rightarrow \sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n} = 0{,}3125 \Rightarrow \beta = 18{,}2^\circ$$

$$\alpha + \gamma + \beta = 180^\circ \Rightarrow \gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 131{,}8^\circ$$

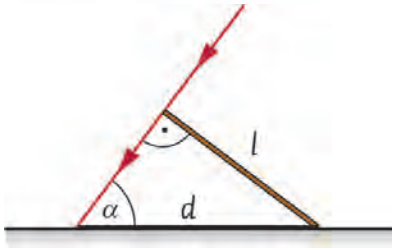
M.11.20.

Adatok: l = 2 m, d = 2,5 m, $n_{v,l} = 4/3$, h = 1,5 m.

a) Akkor mérjük a bot legnyagyobb árnyékát, ha a botra merőlegesen esnek a fénysugarak. Az ábrából a következő összefüggés olvasható le.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT



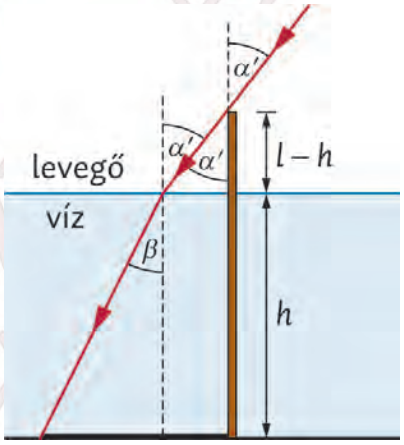
$$\sin\alpha = \frac{l}{d} = \frac{4}{5} \Rightarrow \alpha = 53{,}1°$$

b) A beesési szög $\alpha' = 90° - \alpha = 36{,}9°$

Alkalmazzuk a Snellius-Descartes törési törvényt:

$$\frac{\sin\alpha'}{\sin\beta} = n \Rightarrow \sin\beta = \frac{\sin\alpha'}{n} = 0{,}45 \Rightarrow \beta = 26{,}7°$$ a törési szög.

A bot árnyéka a medence alján:



$$d' = (l-h)\cdot \mathrm{tg}\alpha' + h\cdot \mathrm{tg}\beta = 1{,}13 \text{ m}$$

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy a bot levegőben lévő részének a víz felszínén ugyanakkora az árnyéka, mint a medence alján.

M.11.21.

Adatok: H = 80 cm, $\alpha = 50°$, d = 70 cm

a) Alkalmazzuk a Snellius-Descartes törési törvényt:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n \Rightarrow \sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n} = 0{,}57 \Rightarrow \beta = 35°$$ a törési szög.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$$d = h \cdot \mathrm{tg}\alpha + H \cdot \mathrm{tg}\beta \Rightarrow h = \frac{d - H \cdot \mathrm{tg}\beta}{\mathrm{tg}\alpha} = 12 \text{ cm}$$

b) Az új adatokkal $H' = 60$ cm, $h' = 32$ cm

$$d = h' \cdot \mathrm{tg}\alpha + H' \cdot \mathrm{tg}\beta = 80 \text{ cm}.$$

M.11.22.

Adatok: $n_1 = 1{,}7$, $n_2 = 1{,}512$

Alkalmazzuk a Snellius-Descartes törési törvényt a teljes visszaverődés határszögére:

$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1{,}512}{1{,}7} = 0{,}8894 \Rightarrow \sin\alpha_h = 0{,}8894 \Rightarrow \alpha_h = 62{,}8^\circ$ a teljes visszaverődés határszöge.

M.11.23.

Adatok: l = 2 m, $d = 2 \cdot r = 0{,}02$ mm $\alpha = 30^\circ$, n = 1,7.

a) Alkalmazzuk a Snellius-Descartes törési törvényt:

$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n \Rightarrow \sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n} = 0{,}29 \Rightarrow \beta = 17{,}1^\circ$ a törési szög a szálba való belépéskor. Az optikai szál palástjához a fénysugár $72{,}9^\circ$ beesési szöggel érkezik, ami jóval nagyobb a teljes visszaverődés határszögénél ($\alpha_h = \arcsin\frac{1}{n} = 36^\circ$)

Egy teljes visszaverődéshez $\Delta s = d \cdot \mathrm{tg}\beta$ elmozdulás tartozik a szál mentén. A teljes visszaverődések száma: $N = \frac{l}{\Delta s} = \frac{l}{d \cdot \mathrm{tg}\beta} = 32500$

b) A megtett út: $s = \frac{l}{\sin 72{,}9^\circ} = 2{,}09$ m, szükséges idő: $t = \frac{s}{c/n} = \frac{s \cdot n}{c} = 1{,}19 \cdot 10^{-8}$ s

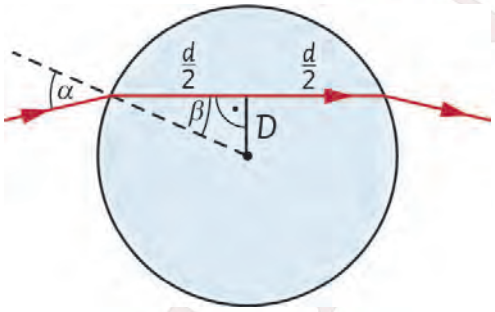
KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.11.24.

Adatok: d = 10 cm, D = 2 cm, n = 3/2.

a)



A törési szög: $\sin\beta = \frac{D}{d/2} = \frac{2}{5} \Rightarrow \beta = 23{,}6^\circ$

Alkalmazzuk a Snellius-Descartes törési törvényt:

$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n \Rightarrow \sin\alpha = n \cdot \sin\beta = 0{,}6 \Rightarrow \alpha = 36{,}9^\circ$ a beesési szög.

b) A fény által az üveggömbben megtett út: $s = 2 \cdot \frac{d}{2} \cdot \cos\beta = d \cdot \cos\beta = 9{,}16\ \text{cm}$.

A fény sebessége az üvegben: $c' = \frac{c}{n} = 2 \cdot 10^8\ \text{m/s}$.

A keresett időtartam: $t = \frac{s}{c'} = 4{,}58 \cdot 10^{-10}\ \text{s}$.

M.11.25.

Adatok: n = 2,4.

Alkalmazzuk a Snellius-Descartes törési törvényt akkor, amikor a fénysugár határfelülettel bezárt szöge a levegőn 90°:

$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n \Rightarrow \sin\beta = \frac{\sin 90^\circ}{n} = \frac{1}{2{,}4} \Rightarrow \beta = 24{,}6^\circ$ a teljes visszaverődés határszöge.

M.11.26.

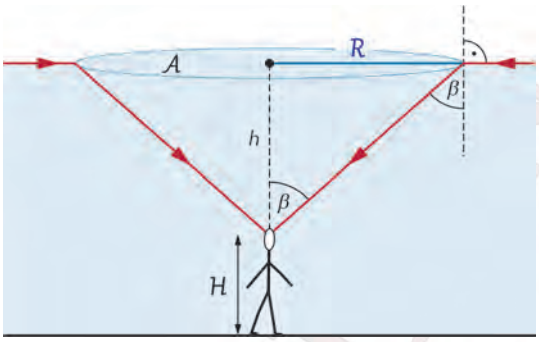
Adatok: n = 4/3, A = 30 m^2.

Alkalmazzuk a Snellius-Descartes törési törvényt akkor, amikor a beesési szög 90°:

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n \Rightarrow \sin\beta = \frac{\sin 90^\circ}{n} = 0{,}75 \Rightarrow \beta = 48{,}6^\circ$ a legnagyobb törési szög.



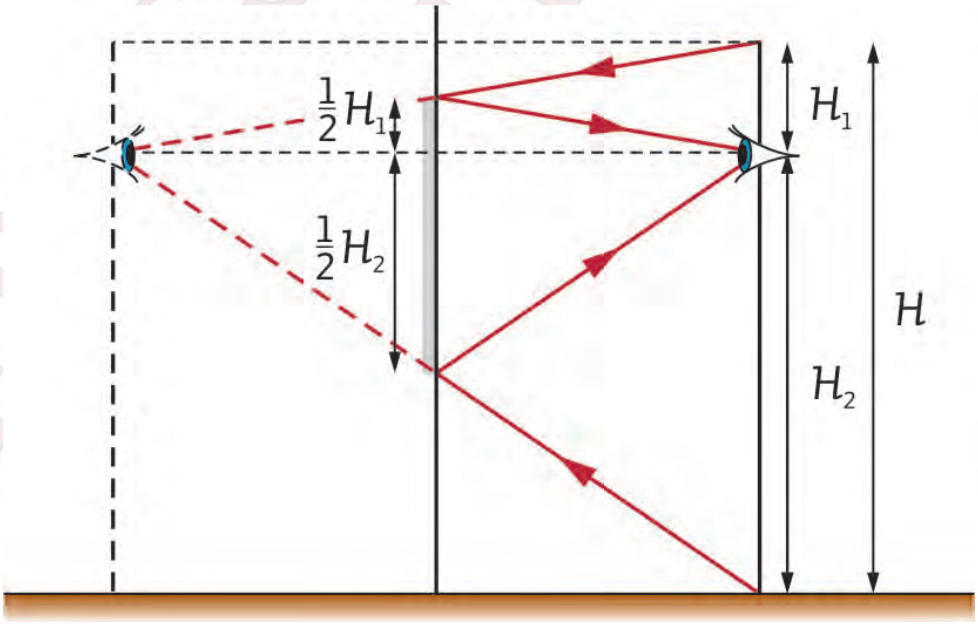
A világos körlap területe:

$A = R^2 \cdot \pi \Rightarrow R = \sqrt{\frac{A}{\pi}} = 3{,}09\ \text{m}$

$\text{tg}\beta = \frac{R}{h} \Rightarrow h = \frac{R}{\text{tg}\beta} = 2{,}72\ \text{m}$, tehát a tó mélysége (2,72 + 1,78) m = 4,5 m.

TÜKRÖK ÉS LENCSÉK KÉPALKOTÁSA

M.11.27.



Adatok: H = 186 cm.

Az ábra alapján: $H = H_1 + H_2$.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

A tükör mérete: $\frac{1}{2}H_1+\frac{1}{2}H_2=\frac{1}{2}\cdot(H_1+H_2)=\frac{1}{2}H=93\text{ cm}$.

M.11.28.

Adatok: $H_1=170\text{ cm}$, $H_2=190\text{ cm}$, $H_3=150\text{ cm}$, d = 10 cm.

a) Az előző feladat alapján a családtagoknak szükséges tükör aljának és tetejének távolsága a padlótól:

	A tükör alsó széle: $\frac{H-d}{2}$	A tükör felső széle $H-\frac{d}{2}$
anya	80 cm	165 cm
apa	90 cm	185 cm
kislány	70 cm	145 cm

a) A család minden tagja akkor fogja tudni használni a tükröt, ha a mérete:

185 cm – 70 cm =115 cm

b) A tükör alsó széle a padló felett 70 cm-re, a felső széle 185 cm-re legyen.

M.11.29.

Adatok: $f_1=+12\text{ cm}$

A két tükörfelület görbültsége csak előjelben különbözik. Az $f=\frac{R}{2}$ összefüggés szerint a domború tükör fókusztávolsága: $f_2=-12\text{ cm}$.

M.11.30.

Adatok: t = 8 cm, k = 24 cm.

a) Nagyított valódi képet homorú tükör hoz létre.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

b) Alkalmazzuk a leképezési törvényt: $\frac{1}{f}=\frac{1}{t}+\frac{1}{k} \Rightarrow f=\frac{t\cdot k}{t+k}$ = 6 cm.

c) A nagyítás $N=\frac{K}{T}=-\frac{k}{t}=-3$. A kép háromszor nagyobb a tárgynál és vele ellentétes állású.

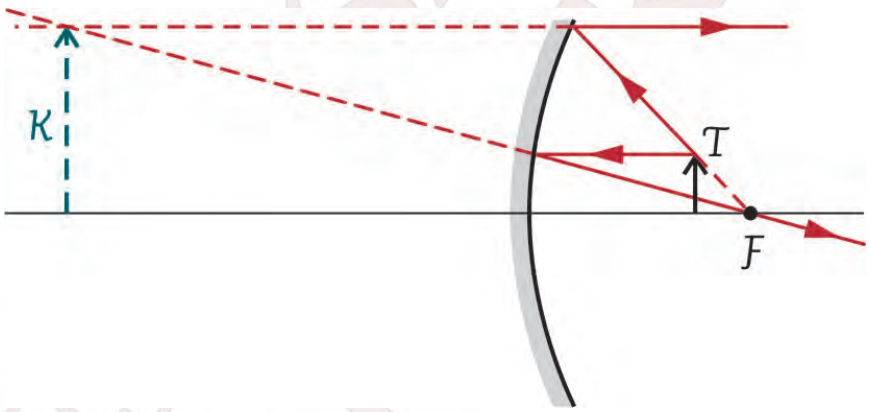
M.11.31.

Adatok: R = 80 cm, t = 30 cm.

a) Az $f=\frac{R}{2}$ összefüggés szerint f = 40 cm.

b) Alkalmazzuk a leképezési törvényt: $\frac{1}{f}=\frac{1}{t}+\frac{1}{k} \Rightarrow k=\frac{f\cdot t}{t-f}=-120\ \text{cm}$. A tükör mögött keletkezik a látszólagos kép.

c) Négyszeresen nagyított, látszólagos, a kép a tárggyal egyező állású.



M.11.32.

Adatok: R = 40 cm, t = 25 cm.

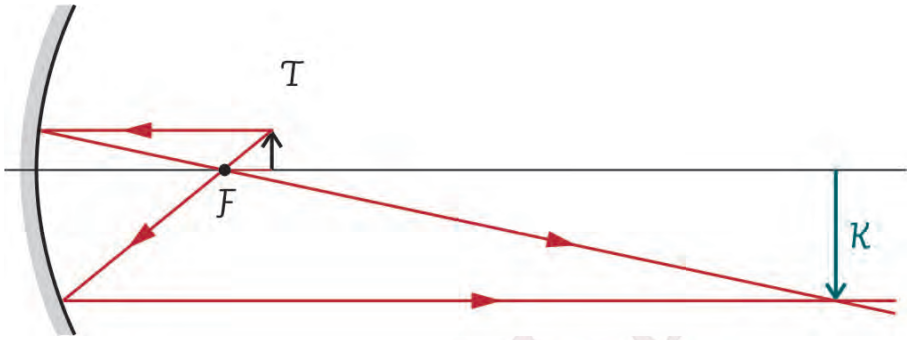
a) Az $f=\frac{R}{2}$ összefüggés szerint f = 20 cm.

b) Alkalmazzuk a leképezési törvényt: $\frac{1}{f}=\frac{1}{t}+\frac{1}{k} \Rightarrow k=\frac{f\cdot t}{t-f}=100\ \text{cm}$. A tükör a faltól 100 cm távol van.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

c) Négyszeresen nagyított, valódi, a kép a tárggyal fordított állású a kép.



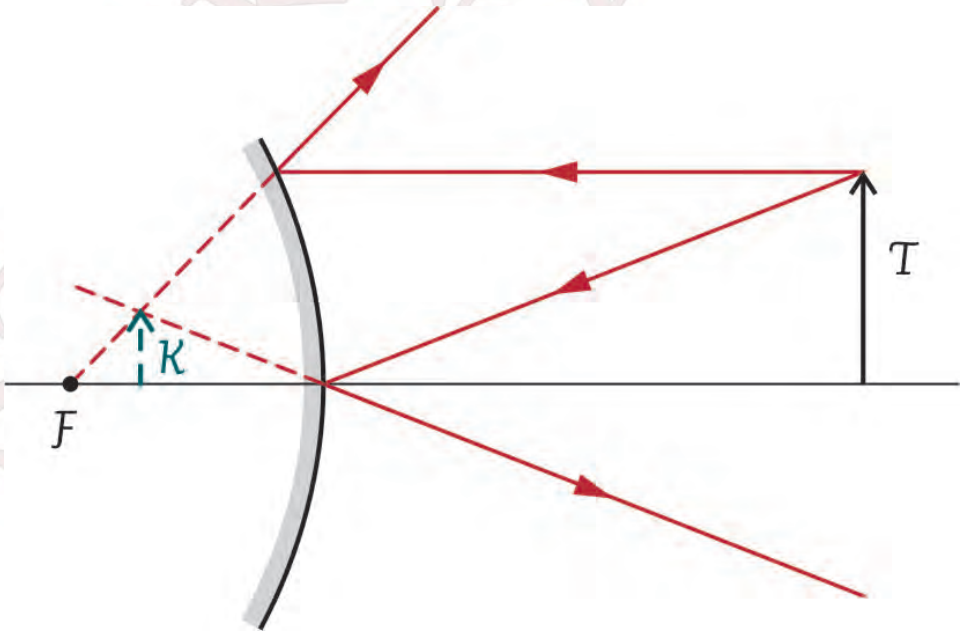
M.11.33.

Adatok: d = 14 cm, t = 1,5 m.

a) Domború tükör, Az $f = \frac{R}{2}$ összefüggés szerint $f = \frac{R}{2} = \frac{d}{4} = -3{,}5\ \text{cm}$.

b) Alkalmazzuk a leképezési törvényt: $\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k} \Rightarrow k = \frac{f \cdot t}{t - f} = -3{,}42\ \text{cm}$. A tükör mögött, tőle 3,42 cm távol jön létre a kép.

c) Kicsinyített, látszólagos, a kép a tárggyal egyező állású.



KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.11.34.

Adatok: R = 2 m, t = 10 m

a) Az $f = \frac{R}{2}$ összefüggés szerint $f = \frac{R}{2} = -1\ \text{m}$.

b) Alkalmazzuk a leképezési törvényt: $\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k} \Rightarrow k = \frac{f \cdot t}{t - f} \approx$ -0,91 m.

A nagyítás fogalma: $N = -\frac{k}{t} = \frac{f}{f - t} = \frac{1}{11}$. A tárgy 1/11 arányú, kicsinyített, vele megegyező állású képét látjuk.

M.11.35.

Adatok: f = -40 cm, t = 20 m, T = 3,5 m.

Alkalmazzuk a leképezési törvényt: $\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k} \Rightarrow k = \frac{f \cdot t}{t - f}$.

A nagyítás fogalma: $N = \frac{K}{T} = -\frac{k}{t} = \frac{f}{f - t} = \frac{1}{51}$. $K = \frac{1}{51} \cdot T \approx 6{,}9\ \text{cm}$

M.11.36.

Adatok: D = 8 1/m.

Alkalmazzuk a $D = 1/f$ összefüggést, $f = 1/D$ = 1/8 m = 12,5 cm.

M.11.37.

Adatok: t = 30 cm, k = 60 cm.

a) Alkalmazzuk a leképezési törvényt: $\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k} \Rightarrow f = \frac{k \cdot t}{t + k} = 20\ \text{cm}$.

b) A nagyítás fogalma: $N = \frac{K}{T} = -\frac{k}{t} = -2$.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Nagyított, valódi, a kép a tárggyal egyező állású.

M.11.38.

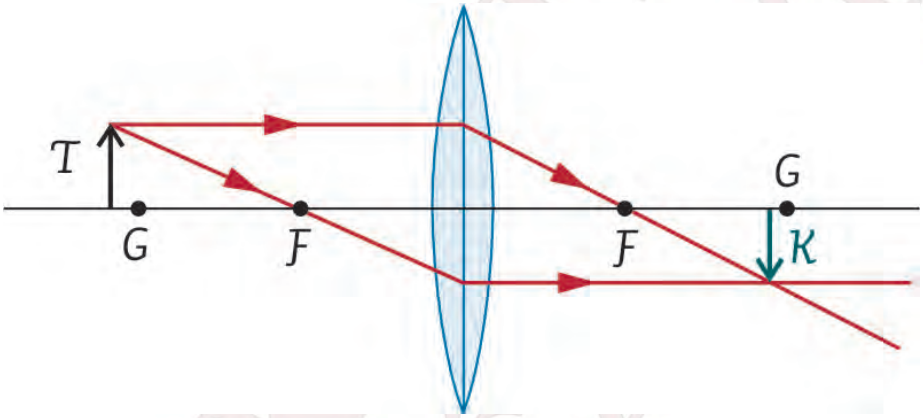
Adatok: t = 25 cm, T = 5 cm, k = 23 cm.

a) Alkalmazzuk a leképezési törvényt: $\frac{1}{f}=\frac{1}{t}+\frac{1}{k} \Rightarrow f=\frac{k\cdot t}{t+k}\approx 11{,}98\ \text{cm}$.

b) $D=\frac{1}{f}\approx 8{,}35\ \frac{1}{\text{m}}$

c) A nagyítás fogalma: $N=\frac{K}{T}=-\frac{k}{t} \Rightarrow K=-\frac{k}{t}\cdot T=-4{,}6\ \text{cm}$.

d) Kicsinyített, valódi, a kép a tárggyal fordított állású.



M.11.39.

Adatok: D = 5 1/m, t = 30 cm, T = 5 cm.

a) $D=\frac{1}{f} \Rightarrow f=\frac{1}{D}=0{,}2\ \text{m}=20\ \text{cm}$. Alkalmazzuk a leképezési törvényt:

$\frac{1}{f}=\frac{1}{t}+\frac{1}{k} \Rightarrow k=\frac{f\cdot t}{t-f}=60\ \text{cm}$.

A nagyítás fogalma: $N=\frac{K}{T}=-\frac{k}{t} \Rightarrow K=-\frac{k}{t}\cdot T=-10\ \text{cm}$.

b) Nagyított, valódi, a kép a tárggyal fordított állású.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.11.40.

Adatok: D = -5 1/m.

Alkalmazzuk a $D = 1/f$ összefüggést, $f = 1/D$ = -1/5 m = -20 cm.

M.11.41.

Adatok: t = 24 cm, T = 2 cm, k = -8 cm.

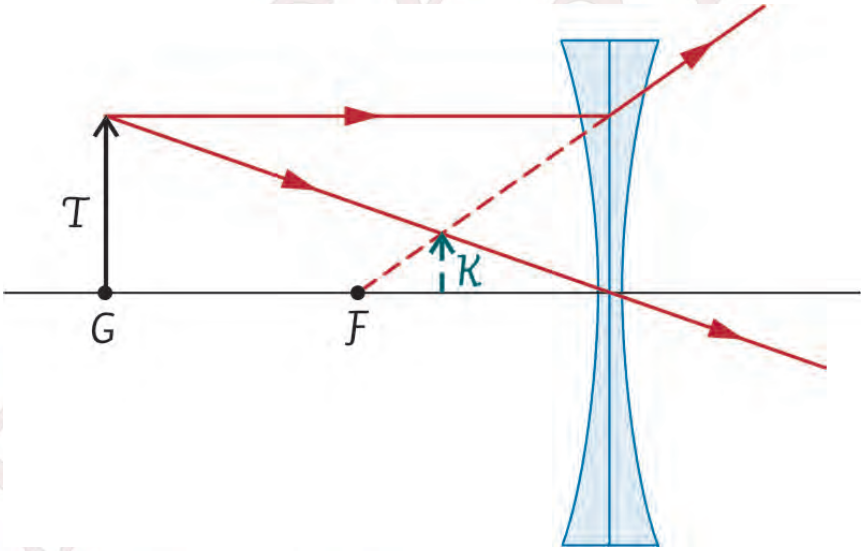
b) Alkalmazzuk a leképezési törvényt: $\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k} \Rightarrow f = \frac{k \cdot t}{t + k} = -12\ \text{cm}.$

a) szórólencsét használunk

c) $D = 1/f$ = -8,33 1/m

d) A nagyítás fogalma: $N = \frac{K}{T} = -\frac{k}{t} \Rightarrow K = -\frac{k}{t} \cdot T = 2/3\ \text{cm}.$

e) Kicsinyített, látszólagos, a kép a tárggyal egyező állású.



M.11.42.

Adatok: T = 10 cm, t = 16 cm, D = -6,25 1/m.

a) Alkalmazzuk a $D = 1/f$ összefüggést, $f = 1/D$ = -16 cm.

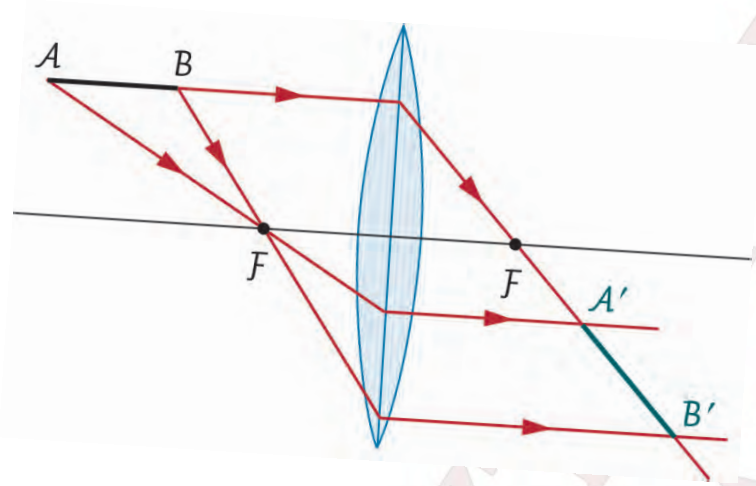
KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

b) Alkalmazzuk a leképezési törvényt: $\frac{1}{f}=\frac{1}{t}+\frac{1}{k} \Rightarrow k=\frac{f\cdot t}{t-f}=-8\ \text{cm}$.

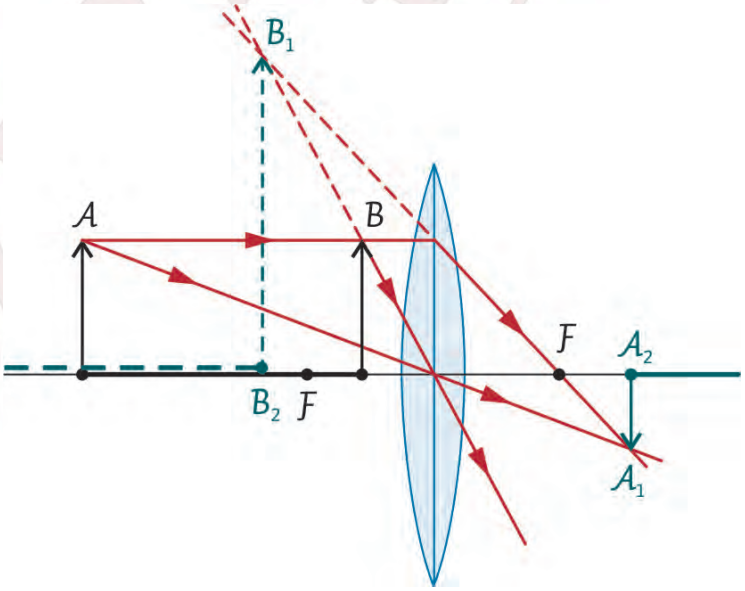
A nagyítás fogalma: $N=\frac{K}{T}=-\frac{k}{t} \Rightarrow K=-\frac{k}{t}\cdot T=5\ \text{cm}$.

c) Kicsinyített, látszólagos, a kép tárggyal egyező állású.



M.11.43.

Az *A* és *B* pontokra illeszkedő, optikai tengellyel párhuzamos „nevezetes fénysugár" a lencsén való törés után az *F* fókuszponton halad. Ezen az egyenesen kimetszi az *A*, ill. a *B* pontokból induló, a közelebbi fókuszponton áthaladó, majd a lencsén való fénytörés után az optikai tengellyel párhuzamosan tovább haladó két fénysugár a fénycső két végpontját.



KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

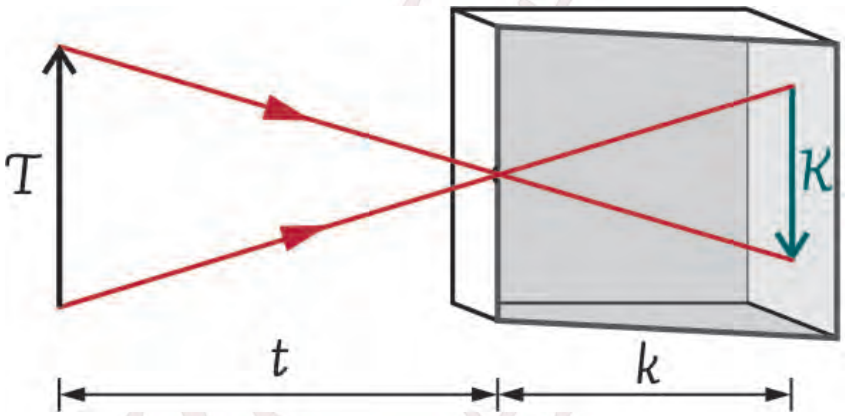
OPTIKAI ESZKÖZÖK

M.11.44.

Adatok: k = 8 cm, K = 4 cm, t = 12 m.

A hasonló háromszögekre a megfelelő arányokat felírva:

$$\frac{K}{T}=\frac{k}{t}\Rightarrow T=\frac{t}{k}\cdot K=6\ \text{m}.$$



M.11.45.

Adatok: d = 1 mm, D = 60 mm, t_1 = 7,5 min = 450 s.

Az azonos méretű fényérzékeny felület a két esetben azonos mennyiségű fény jut:

$$I\cdot\left(\frac{d^2\cdot\pi}{4}\right)\cdot t_1=I\cdot\left(\frac{D^2\cdot\pi}{4}\right)\cdot t_2$$

$$t_2=\left(\frac{d}{D}\right)^2\cdot t_1=0{,}125\ \text{s}$$

M.11.46.

Adatok: l = 20 cm.

a) f = 20 cm

b) $D = 1/f$ = 5 1/m.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.11.47.

Adatok: D = 5 1/m, t = 8 cm.

a) $f = 1/D = 1/5$ m = 20 cm.

b) Alkalmazzuk a leképezési törvényt: $\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k} \Rightarrow k = \frac{f \cdot t}{t - f} = -13{,}3 \text{ cm}$.

c) A nagyítás fogalma: $N = \frac{K}{T} = -\frac{k}{t} = 1{,}67$.

M.11.48.

Adatok: $N = 3$, $x = 5 \text{ cm} \Rightarrow k = -(25 - x) \text{ cm} = -20 \text{ cm}$

a)

$$N = -\frac{k}{t} = 3, \; k = -20 \text{ cm}$$

$$t = -\frac{k}{N} \Rightarrow t = 6{,}67 \text{ cm}$$

b)

Alkalmazzuk a leképezési törvényt:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k} \Rightarrow f = \frac{k \cdot t}{t + k} = 10 \text{ cm}$$

c) A nagyítás geometriai optikai fogalma alapján: $N = \frac{K}{T} = -\frac{k}{t} = 3$. Azonban a háromszoros nagyítású kép a szemünktől 25 cm-re látszik, míg lencse nélkül a tárgyat $x + t = 11{,}7 \text{ cm}$-ről nézzük, ami 11,7/25 = 0,47-szeres kicsinyítésnek felel meg. Tehát a retinán megjelenő kép mindössze 0,47 · 3 = 1,4-szer nagyobb annál, mintha nagyító nélkül néznénk a szemünktől ugyanannyira lévő ásványt. (Érdemes megjegyeznünk, hogy ahhoz viszont igen erős szem kell, hogy a szemünktől mindössze 11,7 cm-re lévő ásványt szabad szemmel tisztán lássuk, hiszen az átlagosnak tekinthető, megállapodáson alapuló tisztán látás távolsága 25 cm. Ezért inkább azok használnak nagyítót, akiknek gyengébb a szeme.)

d) Nagyított, látszólagos, a kép a tárggyal egyező állású.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.11.49.

Adatok: N = -20, k = 3 m, $A_1 = 24 \cdot 36 \text{ mm}^2$.

a) Használjuk fel, hogy a hasonló síkidomok területeinek aránya a hasonlósági arányszám négyzetével egyenlő:

$$A_2 : A_1 = N^2 \Rightarrow A_2 = N^2 \cdot A_1 = 0{,}3456 \text{ m}^2$$

b) A nagyítás fogalma: $N = \frac{K}{T} = -\frac{k}{t} = -20$. $t = \frac{k}{20} = 0{,}15 \text{ m}$.

c) Alkalmazzuk a leképezési törvényt: $\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k} \Rightarrow f = \frac{k \cdot t}{t + k} = 14{,}3 \text{ cm}$.

$$D = \frac{1}{f} = 7 \frac{1}{\text{m}}.$$

M.11.50

Adatok: f_1 = 20 cm, f_2 = -5 cm l = 15,7 cm, t_1 = 520 cm.

Alkalmazzuk a leképezési törvényt t_1 tárgytávolságra:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k} \Rightarrow k_1 = \frac{f_1 \cdot t_1}{t_1 - f_1} = 20{,}8 \text{ cm}.$$

A szemlencse számára a tárgylencse által alkotott kép (ami N_1 = -0,04-szeres nagyítású (vagyis kicsinyített), fordított állású, valódi kép) úgynevezett virtuális tárgyat jelent, aminek tárgytávolsága:

$t_2 = l - k_1$ = - 5,1 cm. Ne ijedjünk meg a negatív értékű virtuális tárgytávolságtól, hanem alkalmazzuk a leképezési törvényt a szemlencsére:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k} \Rightarrow k_2 = \frac{f_2 \cdot t_2}{t_2 - f_2} = -255 \text{ cm}.$$

Az eredményt úgy értelmezhetjük, hogy a szemlencse az eredeti tárgy oldalán hoz létre nagyított látszólagos képet, aminek nagyítása: $N_2 = \frac{K}{T} = -\frac{k_2}{t_2} = -50$. A negatív nagyítás azt mutatja, hogy a szemlencse is megfordítja a képet, vagyis végső soron a

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

tárggyal azonos állású képet látunk, ha a Galilei-féle távcsőbe nézünk. Ha a távcső nagyítását úgy értelmezzük, hogy a két nagyítást összeszorozzuk, akkor $N_1N_2 = 2$ értéket kapunk, azonban a szemünkben nem kétszer akkorának látjuk az 520 cm-re lévő tárgyat távcsővel, mert a távcső nemcsak kétszeresre nagyít, hanem nagyjából fele távolságra is hozza a tárgy képét (520 + kb. 20) cm-ről (255 + kb. 5) cm-re, hiszen a szemünk nagyon közel van a távcső szemlencséjéhez. Ez azt jelenti, hogy nagyjából négyszeres a távcső nagyítása, ami pontosan megfelel a távcsövek úgynevezett szögnagyítására érvényes közelítő formulának: $N = f_1/f_2$.

M.11.51.

Adatok: $f_1 = 0{,}5$ cm, $f_2 = 5$ cm, $l = 10$ cm, $t_1 = 0{,}55$ cm.

a) Alkalmazzuk a leképezési törvényt a tárgylencse képalkotására:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k} \Rightarrow k_1 = \frac{f_1 \cdot t_1}{t_1 - f_1} = 5{,}5 \text{ cm}$$

A tárgylencsétől 5,5 cm távol keletkezik a kép.

b) Ez a kép a szemlencse számára tárgy: $t_2 = l - t_1 = 4{,}5$ cm.

Alkalmazzuk a leképezési törvényt a szemlencse képalkotására:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k} \Rightarrow k_2 = \frac{f_2 \cdot t_2}{t_2 - f_2} = -45 \text{ cm}$$

c)

A tárgylencse nagyítása: $N_1 = -\frac{k_1}{t_1} = -\frac{5{,}5}{0{,}55} = -10.$

A szemlencse nagyítása: $N_2 = -\frac{k_2}{t_2} = -\frac{-45}{4{,}5} = 10.$

A két lencséből álló mikroszkóp nagyítása $N = N_1 \cdot N_2 = -100$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.11.52.

Adatok: l = 15 cm, f_1 = +20 cm.

a) A színházi látcső, vagy Galilei-féle távcső tárgylencséje gyűjtő-, szemlencséje szórólencse. Az azonos oldalon lévő fókuszpontjaik egybe esnek:

$$f_1 = l + |f_2| = l - f_2 \Rightarrow f_2 = l - f_1 = -5 \text{ cm}$$

b) A színházi távcső a tárggyal azonos állású, nagyított képet állít elő. Ezt úgy lehet megérteni, hogy a tárgylencse közbülső képe a szemlencse mögött keletkezik, és ez a fordított állású, kicsinyített közbülső kép úgynevezett virtuális tárgy a szemlencse számára, vagyis a virtuális tárgytávolság negatív, aminek abszolút értéke egy kissé nagyobb, mint a szóró szemlencse fókusztávolságának abszolút értéke. Ilyen esetben a szórólencse megfordítja a virtuális tárgyat, nagyított, látszólagos, az eredeti tárggyal azonos állású kép jön létre.

Megjegyzés: Az a megállapítás, hogy a távcsövek, vagyis a teleszkópikus rendszerek esetén a tárgylencse és a szemlencse fókusztávolsága egybeesik, csak akkor teljesül pontosan, ha a tárgy végtelen messze van, egyébként a megállapítás csak közelítőleg igaz. Ezért kell a színházi távcsöveket is egy állító csavarral az adott tárgytávolsághoz igazítanunk.

M.11.53.

Adatok: l = 50 cm, f_1 = 45 cm.

a) A Kepler-féle távcső tárgylencséje és szemlencséje is gyűjtőlencse. A két lencse fókuszpontjai a tubus belsejében egybeesnek.

$$l = f_1 + f_2 \Rightarrow f_2 = 5 \text{ cm}$$

b) A távcső szögnagyítása: $\frac{f_1}{f_2} = 9$.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.11.54.

Adatok: D = 2 1/m $\Rightarrow f = 50\ \text{cm}$,

A szemüveg használata azt jelenti, hogy a tisztánlátás távolságában lévő tárgyat nézve a szemüveg lencséje úgy képezi le, hogy a kép 50 cm távol legyen a szemtől (pontosabban a szemüvegtől) $(k = -50\ \text{cm})$:

Alkalmazzuk a leképezési törvényt: $\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k} \Rightarrow t = \frac{f \cdot k}{k - f} = 25\ \text{cm}$

A tisztánlátás távolsága a szemüveg használatával 25 cm. Hiába kétszeres a képtávolság, az ember nagyjából ugyanakkorának látja a könyvet, mert a nagyítás is kétszeres. Viszont van egy kis távolság a szemünk és a szemüveg lencséje között, ezért ilyen esetekben kissé nagyított képet látunk. Ugyanekkora dioptriás kontaktlencse használata esetén a tárgy látszólagos mérete nem változna, hiszen a kontaktlencse teljesen ráfekszik a szemre.

M.11.55.

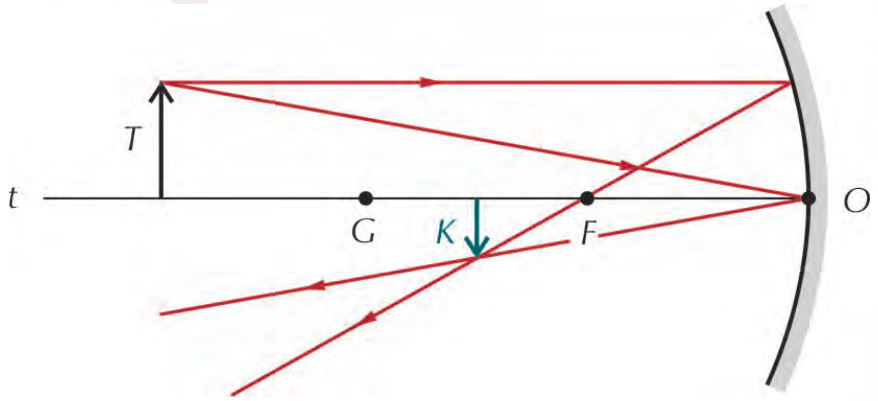
a)

A szemüveg használata azt jelenti, hogy a nagyon távoli tárgyat nézve a szemüveg lencséje úgy képezi le, hogy a kép 1,5 m távol legyen a szemtől (pontosabban a szemüvegtől) : (k = 150 cm):Alkalmazzuk a leképezési törvényt: $\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k}$. A tárgytávolságot végtelennek véve:

$\frac{1}{f} = \frac{1}{k} \Rightarrow f = k = -150\ \text{cm}.$

b)

$D = \frac{1}{f} = \frac{1}{k} = -0{,}67\ \frac{1}{\text{m}}.$



KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

HULLÁMOPTIKA. FÉNYHULLÁMOK INTERFERENCIÁJA, ELHAJLÁSA

M.11.56.

Adatok: $\lambda = 700\ \text{nm} = 7 \cdot 10^{-7}\ \text{m}$, $c = 3 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}$, n = 4/3.

a) Alkalmazzuk a hullámterjedés alapegyenletét:

$$c = \lambda \cdot f$$

$$f = \frac{c}{\lambda} = 4{,}29 \cdot 10^{14}\ \text{Hz}$$

b)

$$n = \frac{c}{c_{víz}} \Rightarrow c_{víz} = \frac{c}{n} = 2{,}25 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}$$

M.11.57.

Adatok: $\lambda = 550\ \text{nm} = 5{,}5 \cdot 10^{-7}\ \text{m}$, $c = 3 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}$, n = 4/3.

a) $n = \frac{c}{c_{víz}} = \frac{\lambda}{\lambda_{víz}} \Rightarrow \lambda_{víz} = \frac{\lambda}{n} = 412{,}5\ \text{nm}$

b) Alkalmazzuk a Snellius – Descartes törvényt:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n \Rightarrow \sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n} = \frac{3}{8} \Rightarrow \beta = 22^{\circ}$$

M.11.58.

Adatok: $\lambda_1 = 520\ \text{nm} = 5{,}2 \cdot 10^{-7}\ \text{m}$, $\lambda_2 = 690\ \text{nm} = 6{,}9 \cdot 10^{-7}\ \text{m}$

Nem fog interferálni a két hullám, mert a két hullám hullámhossza (frekvenciája) különböző, ezért nem állandó fáziskülönbséggel találkozik a két hullám.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.11.59.

Adatok: $\lambda = 540\ \text{nm} = 5{,}4 \cdot 10^{-7}\ \text{m}$.

a) A két hullám maximálisan gyengíti egymást, ha az általuk megtett utak különbsége a fél hullámhossz páratlan számú többszöröse:

$|\lambda_2 - \lambda_1| = (2k+1) \cdot \frac{\lambda}{2}$, ahol k = 0, 1, 2, ...

b) A két hullám maximálisan erősíti egymást, ha az általuk megtett utak különbsége a fél hullámhossz páros számú többszöröse:

$|\lambda_2 - \lambda_1| = 2k \cdot \frac{\lambda}{2} = k \cdot \lambda$, ahol k = 0, 1, 2, ...

M.11.60.

Adatok: $\lambda = 650\ \text{nm}$, $\Delta\lambda_1 = 325\ \text{nm}$, $\Delta\lambda_2 = 1300\ \text{nm}$.

a) $\Delta\lambda_1 = 325\ \text{nm} = \frac{\lambda}{2}$. A két hullám maximálisan gyengíti egymást.

b) $\Delta\lambda_2 = 1300\ \text{nm} = 2 \cdot \lambda$. A két hullám maximálisan erősíti egymást.

M.11.61.

Adatok: $\alpha = 30^\circ$, h = 2 m, n_1 = 1,343, n_2 =1,328.

A Snellius – Descartes törvény segítségével számoljuk ki a kék, ill. a vörös fényre a törési szögeket:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n \Rightarrow \sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n}$$

$\beta_1 = 21{,}857^\circ$, $\beta_2 = 22{,}117^\circ$

A színkép szélessége a plafonon: $d = h \cdot (tg\beta_2 - tg\beta_1) \approx 1{,}1\ \text{cm}$.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.11.62.

Adatok: $\lambda = 500\ \text{nm}$, d = 1 mm, n = 3/2.

a)

A találkozó két fényhullám fáziskülönbsége:

$$\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 = \frac{d}{\lambda_2}\cdot 2\pi - \frac{d}{\lambda}\cdot 2\pi = \ldots = \frac{d}{\lambda}(n-1)2\pi = 1000\cdot 2\pi$$

b) A két fénynyaláb maximálisan erősíti egymást.

M.11.63.

Adatok: $\lambda = 630\ \text{nm}$, d = 0,4 mm, n = 3/2, L = 2 m.

a) $\sin\alpha = \frac{\lambda}{d} = 0{,}001575 \Rightarrow \alpha = 5{,}41'$

b) Maximális erősítést, éles fénycsíkot látunk ebben az irányban.

c) $\frac{\lambda}{d} = \frac{y}{L} \Rightarrow y = \frac{L}{d}\cdot\lambda = 3{,}15\ \text{mm}$

M.11.64.

Adatok: $\lambda = 630\ \text{nm}$, n = 4/3.

A levegő – folyadék határáról visszaverődő fény π fázisugrást szenved. Ezért a folyadékba hatoló, majd az újabb közeghatárról fázisugrás nélkül visszaverődő fénysugár pontosan egy hullámhossznyi utat tesz meg.

$$d = \frac{1}{2}\cdot\lambda' = \frac{1}{2}\cdot\frac{\lambda}{n} = 236\ \text{nm}.$$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.11.65.

Adatok: $\lambda = 630\ \text{nm}$, $\alpha = 45^\circ$ n = 1,46.

a) Alkalmazzuk a Snellius – Descartes törvényt:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n \Rightarrow \sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n} = 0{,}4843 \Rightarrow \beta = 29^\circ .$$

b)

A levegő – folyadék határáról visszaverődő fény π fázisugrást szenved. Ezért a folyadékba hatoló, majd az újabb közeghatárról fázisugrás nélkül visszaverődő fénysugár pontosan egy hullámhossznyi utat tesz meg.

$$d = \frac{1}{2}\cdot\lambda' = \frac{1}{2}\cdot\frac{\lambda}{n} = 216\ \text{nm} .$$

A FÉNY POLARIZÁCIÓJA

M.11.66.

Adatok: n = 4/3.

Alkalmazzuk a Snellius – Descartes törvényt:

$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n$, valamint használjuk fel, hogy $\alpha + \beta = 90^\circ$.

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\alpha = n$$

$$tg\alpha_B = n \Rightarrow \alpha_B = arc\ tg\ n = 53{,}13^\circ .$$

M.11.67.

Adatok: n = 4/3.

a)

A napszemüveget a Nap vízfelszínről visszavert fénysugara mint tengely körül forgatjuk. Ha a napkorong képe egyszer csak eltűnik a tó vízéről, akkor a Napnak a tó felszínéről visszavert fénysugara teljes mértékben polarizált. (Ehhez persze olyan napszemüvegre van szükségünk, melyen jó minőségű lineáris polárszűrő bevonat van.)

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

b)

A vízfelszínről visszaverődő fény akkor lesz teljesen polarizált, ha a visszavert és a közegbe hatoló megtört fénysugár egymásra merőleges. Az előző feladat nyomán:

$tg\alpha_B = n \Rightarrow \alpha_B = arc\ tg\ n = 53{,}13^\circ \approx 53°$. Ekkor a Nap (90 – 53) = 37°emelkedési szög alatt látszik.

GYAKORLÓ FELADATOK
A FÉNY. A GEOMETRIAI OPTIKA ALAPFOGALMAI

M.11.68.

Adatok: f = 12,6 1/s, N = 720, s = 8633 m.

a) Amíg a fény megteszi az s távot kétszer, a fogaskerék elfordul a teljes szög $\frac{1}{2 \cdot 720}$-ad részét:

$$\frac{2s}{c} = \frac{1}{2 \cdot 720} \cdot \frac{1}{f} \Rightarrow c = 2 \cdot 720 \cdot 2s \cdot f = 313\,274\,304\ \text{m/s} \approx 313000\ \text{km/s}.$$

b) További fordulatszámok: $f(k) = k \cdot 12{,}6\ \frac{1}{\text{s}}$, k = 1, 2, 3, ...

M.11.69.

Adatok: l = 1 m.

a) Március 21-én délben az Egyenlítőn a Nap pont a fejünk fölött van, a botnak nincs árnyéka.

b) Március 21-én az Egyenlítőn 2 órával a delelés után: 2 óra alatt a Föld a teljesszög 2/24-ed részét fordul el a tengely körüli forgás miatt (a Nap körüli keringés hatását elhanyagoljuk.)

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Emiatt a napsugár a függőlegessel $\frac{2}{24}\cdot 360^\circ = 30^\circ$ zár be. Az árnyék hossza:

$s = l \cdot tg30^\circ = 57{,}7 \text{ cm}$.

M.11.70.

Adatok: l = 1 m.

Budapest kb. a 47. szélességi kör mentén fekszik.

a)

Március 21-én délben Budapesten a napsugarak $\alpha = 47^\circ$-ot zárnak be függőlegessel. Az árnyék hossza:

$s = l \cdot tg47^\circ = 107{,}2 \text{ cm}$.

b)

Június 21-én a Nap a Ráktérítő felett delel, kb. a $23{,}5^\circ$-os szélességi körön. Ekkor Budapesten délben a napsugarak $47^\circ - 23{,}5^\circ = 23{,}5^\circ$ szöget zárnak be a függőlegessel. Az árnyék hossza:

$s = l \cdot tg23{,}5^\circ \approx 43{,}5 \text{ cm}$.

M.11.71.

Adatok: h = 90 cm, H = 270 cm, $A_1 = 80 \cdot 120 \text{ cm}^2$.

Használjuk fel, hogy a hasonló síkidomok területeinek arány a hasonlósági arányszám négyzetével egyenlő:

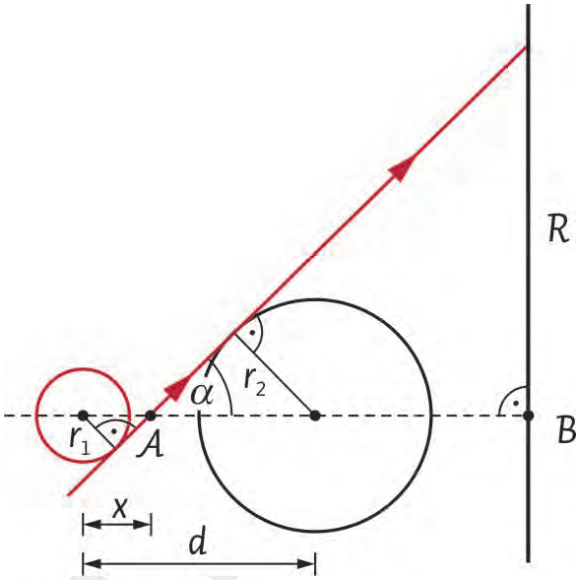
$$\frac{A_2}{A_1} = k^2 = \left(\frac{270}{90}\right)^2 = 9 \Rightarrow A_2 = 9 \cdot A_1 = 8{,}64 \text{ m}^2.$$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.11.72.

Adatok: $r_1 = 2\ \text{cm}$, $r_2 = 5\ \text{cm}$, d = 100 cm.



A rajznak megfelelően meghúzzuk a két gömb közös belső érintőjét a félárnyék külső határának meghatározásához:

A két hasonló háromszög megfelelő arányait felírva:

$$\frac{r_1}{x} = \frac{r_2}{d-x} \Rightarrow x = \frac{200}{7}\ \text{cm}$$

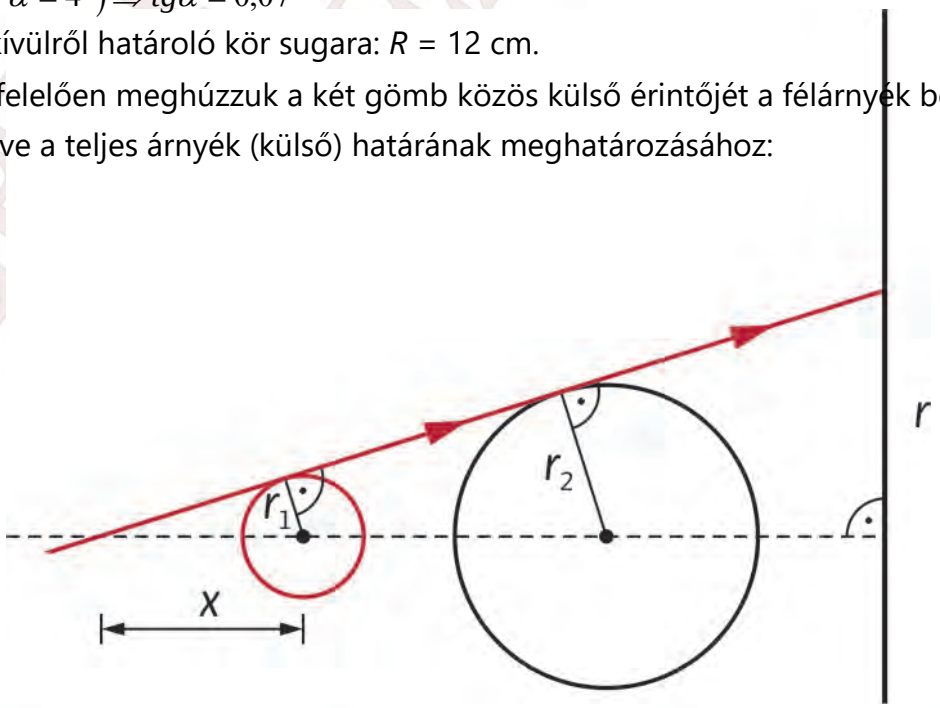
Az AB távolság:

$$AB = 100 - \frac{200}{7} + 100 = \frac{1200}{7}$$

$$\sin\alpha = 0{,}07 \left(\Rightarrow \alpha = 4^\circ\right) \Rightarrow tg\alpha = 0{,}07$$

A félárnyékot kívülről határoló kör sugara: R = 12 cm.

A rajznak megfelelően meghúzzuk a két gömb közös külső érintőjét a félárnyék belső határának, illetve a teljes árnyék (külső) határának meghatározásához:



KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

A két hasonló háromszög megfelelő arányait felírva:

$$\frac{r_1}{x}=\frac{r_2}{d+x}\Rightarrow x=\frac{200}{3}\text{ cm}$$

Írjunk fel egy másik helyes arányt:

$$\frac{r}{200+x}=\frac{2}{\sqrt{2^2+66{,}67^2}}\Rightarrow r\approx 8\text{ cm}$$

A félárnyékot belülről, illetve a teljes árnyékot kívülről $r\approx 8$ cm sugarú kör határolja.

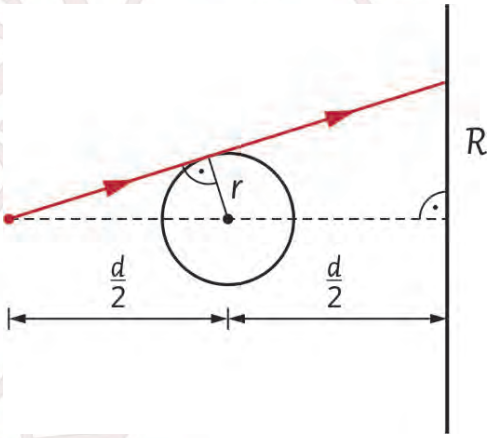
M.1173.

Adatok: H = 3 m, h = 2 m.

Az árnyék ugyanannyi idő 3/1-szer több utat tesz meg, mint a bogár. Az árnyék sebessége háromszor nagyobb a bogár valódi sebességénél.

M.11.74.

Adatok: r = 4 cm, d = 100 cm.



Az ábra alapján két hasonló háromszög megfelelő arányait felírva:

$$\frac{r}{\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2-r^2}}=\frac{R}{d}\Rightarrow R=8{,}026\text{ cm}$$

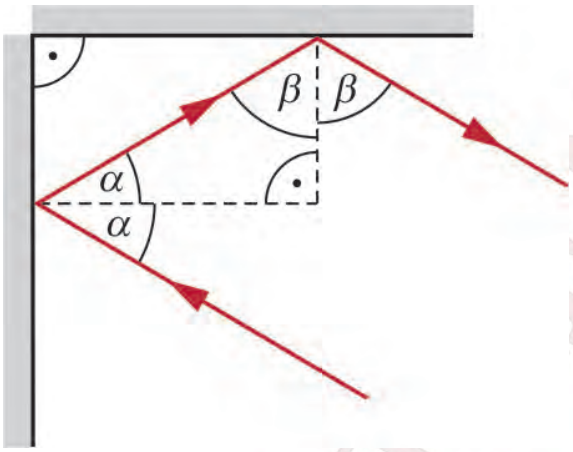
A gömb árnyéka a falon egy kb. 8 cm sugarú kör.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

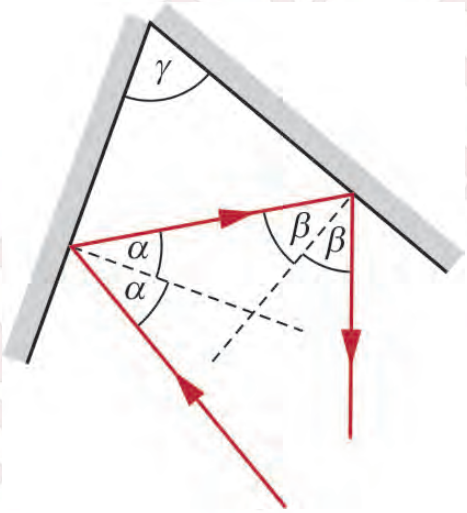
A FÉNYVISSZAVERŐDÉS

M.11.75.



A fénysugár két visszaverődést szenved. A visszaverődési törvény szerint jelöltük be az ábrán látható szögeket. Az ábráról leolvashatjuk: $\alpha+\beta=90^\circ$. A fénysugár az első visszaverődésnél $180^\circ-2\alpha$, a másodiknál $180^\circ-2\beta$ eltérülést szenved, összesen $180^\circ-2\alpha+180^\circ-2\beta=2\cdot180^\circ-2\cdot(\alpha+\beta)=180^\circ$.

M.11.76.



Érdemes az általános esetet vizsgálni rögtön:

A fénysugár két visszaverődést szenved. A visszaverődési törvény szerint jelöltük be az ábrán látható szögeket. Az ábráról leolvashatjuk: $\alpha+\beta=\gamma$. A fénysugár az első visszaverődésnél $180^\circ-2\alpha$, a másodiknál $180^\circ-2\beta$ eltérülést szenved, összesen $180^\circ-2\alpha+180^\circ-2\beta=2\cdot180^\circ-2\cdot(\alpha+\beta)=(360^\circ+)\,2\gamma$

A visszavert fénysugár az eredetivel 2⋯ szöget zár be.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

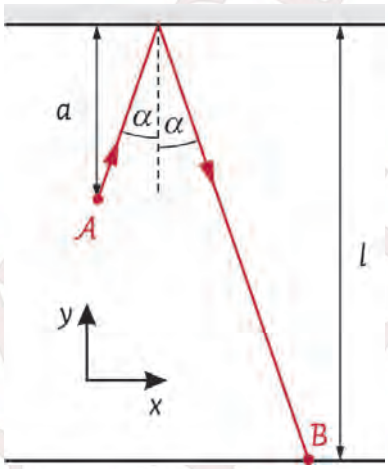
M.11.77.

Ha egy fénysugár β beesési szöggel érkezik a síktükörre, akkor a visszaverődési szög is β lesz. A fénysugár a visszaverődésnél $180^\circ - 2\beta$ eltérülést szenved. Ha a beesési szöget α -val változtatjuk, az eltérülés

$$180^\circ - 2(\beta+\alpha) = (180^\circ - 2\beta) - 2\alpha$$

A tükör α szögű elfordulása esetén a visszavert fénysugár elfordulása 2α .

M.11.78.



Adatok: $\alpha = 20^\circ$, l = 5 m, a = 2 m.

A visszaverődési törvény szerint jelöltük be az ábrán látható szögeket. Az ábráról leolvashatjuk: Az *A* és *B* pontok koordináta különbségei x-irányban:
$d_x = tg\alpha \cdot (a+l) = 2{,}55$ m, y-irányban $d_y = l - a = 3$ m

Az *A* és *B* pontok távolsága: $d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2} = 3{,}94$ m.

M.11.79.

Adatok: $p_1 = 0{,}9$, $p_2 = 0{,}85$.

$p = p_1 \cdot p_2 = 0{,}765$, a fóliázott üveg a ráeső fény 76,5%-át engedi át.

M.11.80.

A lakásunk fényességét (fényenergia-teljesítmény) jelölje P_1, az utcáét P_2.

Az ablaküveg este belülről „tükörként” működik, ha a belülről ráeső és visszaverődő fény több mint a kívülről bejövő:

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$P_1 \cdot 0{,}05 \geq P_2 \cdot 0{,}95 \Rightarrow P_1 \geq 19 \cdot P_2$

Legalább 19-szer fényesebb a lakásunk az utcánál.

M.11.81.

Adatok: $P_2 = 3 \cdot P_1$

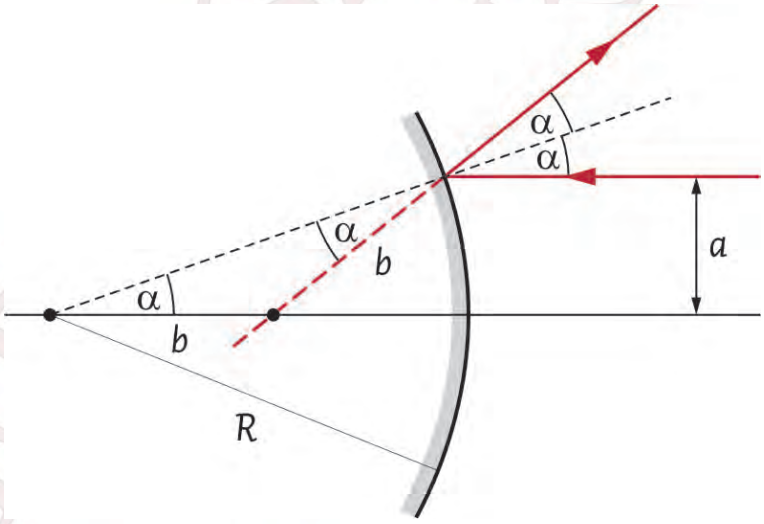
Az üzlet fényességét (fényenergia-teljesítmény) jelölje P_1, az utcáét P_2.

A kirakat kívülről „tükörként működik”, ha a róla kívülről visszaverődő fény több, mint az üzletből az utcára kijutó:

$$(1-p) \cdot P_2 \geq p \cdot P_1 \Rightarrow p \leq \frac{3}{4}$$

Az üveg fényáteresztő-képessége legfeljebb 75%.

M.11.82.



Az ábrán szereplő szögek a visszaverődési törvény szerint lettek bejelölve, illetve a csúcsszögek és az egyállású szögek egyenlőségét használtuk fel. A *b* szárú háromszög területét kétféleképen felírva:

$$\frac{R \cdot b \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{b^2 \cdot \sin 2\alpha}{2}$$

$$b = \frac{R}{2 \cdot \cos\alpha}$$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

a).

$$\sin\alpha = \frac{a}{R} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30° \Rightarrow b = \frac{R}{2\cdot\cos\alpha} = \frac{R}{1{,}732} = 11{,}55\ \text{cm}$$

b)

$$\sin\alpha = \frac{a}{R} = \frac{1}{10} \Rightarrow \alpha = 5{,}74° \Rightarrow b = \frac{R}{2\cdot\cos\alpha} = \frac{R}{1{,}99} = 10{,}05\ \text{cm}$$

Megjegyzés: Vékony tükrökre (*a* sokkal kisebb *R*-nél) igaz, hogy *f* = *R*/2.

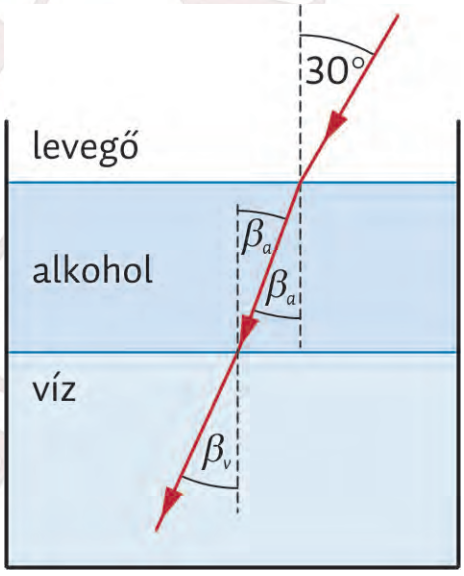
A FÉNY TÖRÉSE

M.11.83.

Adatok: $n_{v,l} = 1{,}33$, $n_{a,l} = 1{,}36$, $\alpha = 30^\circ$.

a) $n_{a,v} = \frac{c_v}{c_a} = \frac{\frac{c}{c_a}}{\frac{c}{c_v}} = \frac{n_{a,l}}{n_{v,l}} = 1{,}022$.

b)



Használjuk mindkét esetben a Snellius-Descartes törési törvényt:

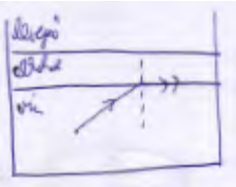
$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n \Rightarrow \sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n}$$

A törési szög az etil-alkoholban $\beta_a = 21{,}57^\circ$, a törési szög a vízben $\beta_v = 22{,}08^\circ$.

c)

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT



Használjuk a Snellius-Descartes törési törvényt a 90° -os törési szögre:

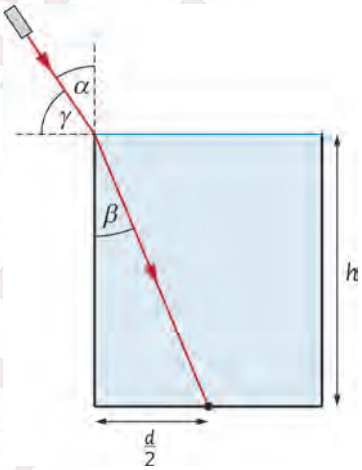
$$\frac{\sin\alpha}{\sin 90^\circ} = n_{v,a} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{n_{a,v}} = \frac{1}{1{,}022} \Rightarrow \alpha \approx 78^\circ$$

A teljes visszaverődés határszöge kb. 78° .

M.11.84.

Adatok: h = 12 cm, d = 10 cm, $\gamma = 55{,}72^\circ$.

a)



a fénysugár beesési szöge α = 90° - γ = $34{,}28^\circ$, törési szöge

$$tg\beta = \frac{d/2}{h} = \frac{5}{12} \Rightarrow \beta = 22{,}62^\circ$$

Használjuk a Snellius-Descartes törési törvényt:

$$n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = 1{,}464$$

b)

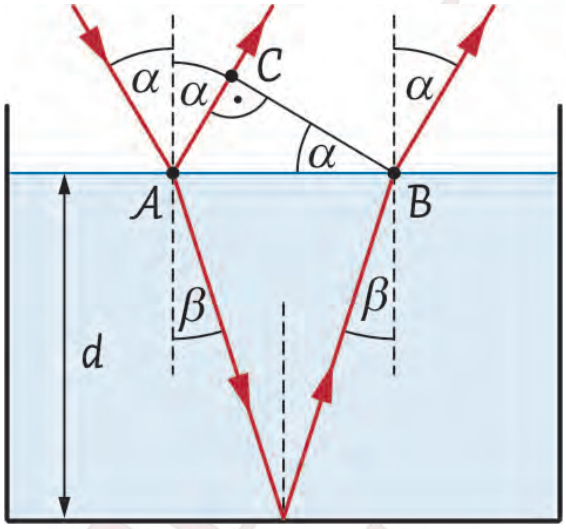
A *Négyjegyű függvénytáblázatok* segítségével megállapítható, hogy a vizsgált folyadék nagy valószínűséggel az glicerin.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.11.85.

Adatok: d = 30 cm, $\alpha = 30^\circ$, n = 4/3.



A visszaverődési-, és a törési törvény alapján jelöltük az ábrán a szögeket.

Használjuk a Snellius-Descartes törési törvényt a törési szög meghatározásához:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n \Rightarrow \sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n} = \frac{3}{8} \Rightarrow \beta = 22^\circ$$

Az AB szakasz hossza: $2 \cdot d \cdot tg\beta = 24{,}27\ \text{cm}$

A két visszavert fénysugár távolsága: $BC = AB \cdot \cos\alpha = 21\ \text{cm}$.

M.11.86.

Adatok: d = 2 m, h = 3 m, A = 9,42 m^2

a) A megvilágított körlap sugara: $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}} = 1{,}73\ \text{m}$. A legnagyobb beesési szöggel érkező fénysugár a körlap kerületén halad át a vízbe:

$$tg\alpha = \frac{r}{h} = 0{,}577 \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

b) A legnagyobb törési szög: $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=n \Rightarrow \sin\beta=\frac{\sin\alpha}{n}=\frac{3}{8} \Rightarrow \beta=22^\circ$

A medence alján megvilágított terület: $A=r_a^2\cdot\pi=(d\cdot tg\beta)^2\cdot\pi=2{,}05\ \mathrm{m}^2$.

M.11.87.

Adatok: $\alpha_h=43^\circ$, $\alpha=20^\circ$.

a) Alkalmazzuk kétszer a Snellius-Descartes törési törvényt $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=n$:

$\frac{\sin\alpha_h}{\sin 90^\circ}=n$, $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=n$.

A két egyenlet bal oldalait egyenlők egymással:

$\sin\alpha_h=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \Rightarrow \sin\beta=\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_h}=0{,}5 \Rightarrow \beta=30^\circ$

.

b)

Az üveg törésmutatója a Snellius-Descartes törési törvény alapján az első fénysugárra számolva: $n=\frac{\sin 30^\circ}{\sin 20^\circ}=1{,}466$, illetve a másik fénysugárra számolva: $n=\frac{\sin 90^\circ}{\sin 43^\circ}=1{,}466$

M.11.88.

Ekkor igaz, hogy $\alpha+\beta=90^\circ$.

Alkalmazzuk a Snellius-Descartes törési törvényt $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=n$.

$\frac{\sin\alpha}{\sin(90^\circ-\alpha)}=n$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=tg\alpha=n=\frac{1}{4/3}=\frac{3}{4} \Rightarrow \alpha=36{,}87^\circ$

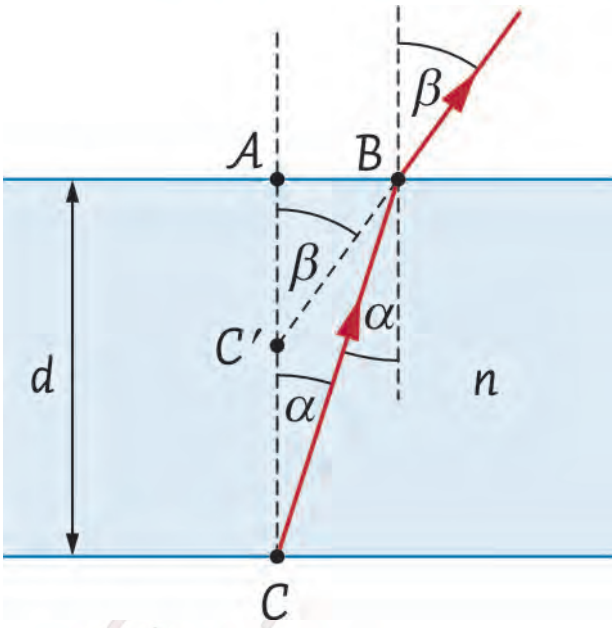
.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.11.89.

Adatok: d = 2 cm, n = 1,5.



Az ábrán látható derékszögű háromszögekre igaz:

$$tg\beta = \frac{AB}{AC'},\ tg\alpha = \frac{AB}{AC}$$

Vegyük a két egyenlet hányadosát:

$$\frac{tg\alpha}{tg\beta} = \frac{AC'}{AC}$$

Használjuk fel, hogy kicsiny α szögekre igaz a $\sin\alpha \approx tg\alpha$ közelítés:

$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{AC'}{AC}$, Alkalmazzuk a Snellius-Descartes törési törvényt $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n_{l,v} = \frac{1}{n}$

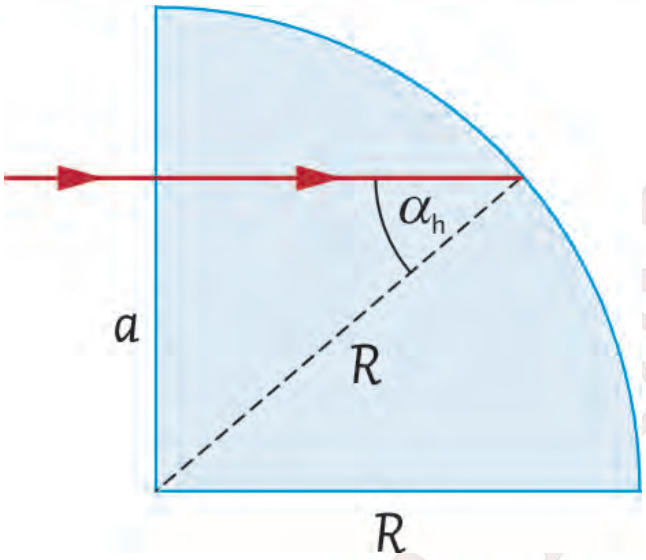
$$\frac{1}{n} = \frac{AC'}{AC} \Rightarrow AC' = \frac{AC}{n} = 4/3 \text{ cm}$$

Az üvegen merőlegesen átnézve 2/3 cm-vel látjuk közelebbinek a közvetlenül mögötte lévő tárgyakat, ami gyakorlatilag észrevehetetlenül kicsi hatás.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.11.90.



Adatok: n = 2/3.

Az ábra segítségével határozzuk meg az üvegben haladó fénysugárra a teljes visszaverődés határszögét:

$$\frac{\sin\alpha_h}{\sin 90^\circ} = n \Rightarrow \alpha_h = arc\sin n = 41{,}81^\circ$$

$$a = R\cdot\sin\alpha_h = R\cdot n = \frac{2}{3}R$$

A megvilágító fény 1/3-a (33,3%) a másik téglalap alakú oldallapon, 2/3-a (66,6%) a görbült lapon távozik a negyed körhengerből.

M.11.91.

Adatok: $c_ü$ = 187 500 km/s, $\alpha = 53^\circ$, d = 2 cm.

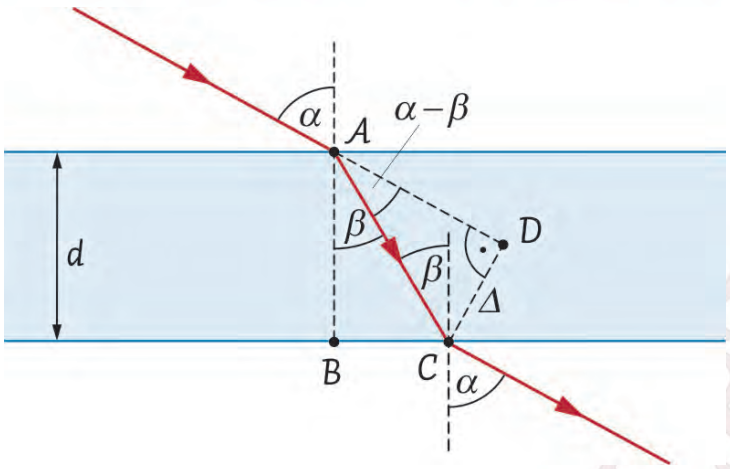
a) $n = \frac{c}{c_ü} = 1{,}6$

b) Alkalmazzuk a Snellius-Descartes törési törvényt a törési szög meghatározására:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n \Rightarrow \sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n} = 0{,}5 \Rightarrow \beta = 30^\circ$$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT



Az ábra alapján $\cos\beta = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AC = \frac{AB}{\cos\beta} = 2{,}31\ \text{cm}$.

c) Szintén az ábra alapján

$$\sin(\alpha-\beta) = \frac{\Delta}{AC} \Rightarrow \Delta = AC \cdot \sin(\alpha-\beta) = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\beta} \cdot d = 0{,}9\ \text{cm}.$$

M.11.92.

Adatok: $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 18{,}2^\circ$, $\Delta = 3\ \text{mm}$.

a) Az üveg törésmutatója $n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = 1{,}6$

b) A 11.91. feladat megoldása alapján: $\Delta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\beta} \cdot d \Rightarrow d = \frac{\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)} \cdot \Delta = 1{,}4\ \text{cm}$

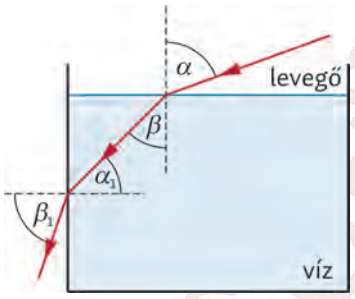
KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.11.93.

Adatok: $\alpha = 70^\circ$, n = 4/3.

a)



Alkalmazzuk a Snellius-Descartes törési törvényt a törési szög meghatározására:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n \Rightarrow \sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n} = 0{,}7 \Rightarrow \beta = 44{,}8^\circ$$

b) A fénysugár irányváltozása szempontjából a víz-üveg és az ezt követő üveg-levegő, egymással párhuzamos közeghatárakon bekövetkező két fénytörés helyettesíthető egyetlen fénytöréssel, ami a víz és a levegő határán történik.A víz – levegő határán a fénysugár beesési szöge $\alpha_1 = 45{,}2^\circ$. A törési szög meghatározásához ismét a Snellius-Descartes törési törvényt használjuk:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{1}{n} \Rightarrow \sin\beta = n \cdot \sin\alpha = 0{,}946 \Rightarrow \beta = 71{,}1^\circ$$

c)

A fénysugár kétszer vált irányt. Ezek összege lesz a vízből kilépő fénysugár a belépő fénysugárral által bezárt szöge:

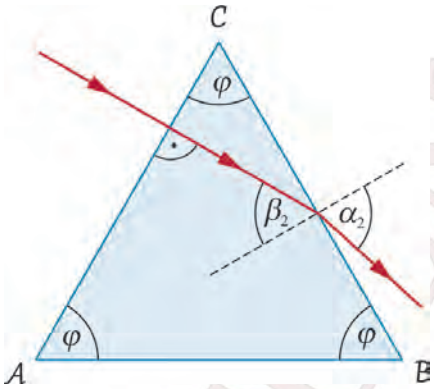
$$(70^\circ - 44{,}8^\circ) + (71{,}1^\circ - 45{,}2^\circ) = 51{,}1^\circ$$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.11.94.

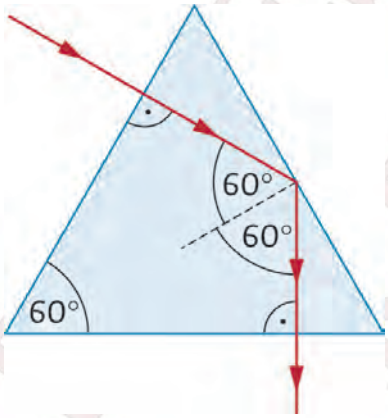
Adatok: n = 1,5, $\alpha_1 = 0$, $\varphi = 60^\circ$.

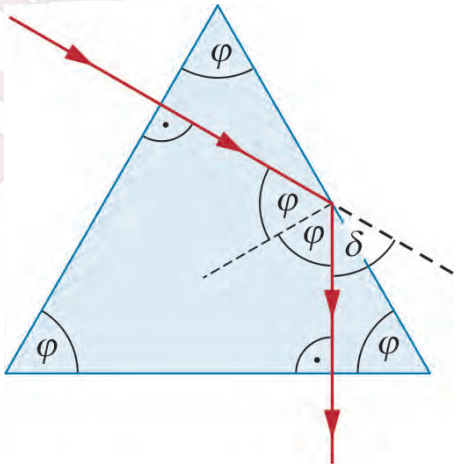


Az ábrát vizsgálva megállapítható: a C csúcsnál lévő φ és β_2 szögek merőleges szárú hegyesszögek, ezért egyenlőek: $\beta_2 = \varphi = 60^\circ$

A kilépési irány meghatározásához alkalmazzuk a Snellius-Descartes törési törvényt:
$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n \Rightarrow \sin\alpha_2 = n \cdot \sin\beta_2 = 1{,}3 \Rightarrow$ Teljes visszaverődés történik az eredeti iránnyal $180^\circ - 2 \cdot 60^\circ = 60^\circ$ szöget zár be a visszavert fénysugár az eredetivel.

Ez azt is jelenti, hogy a prizma harmadik oldalára merőlegesen érkezik a fény, irányváltozás nélkül áthalad rajta.





M.11.95.

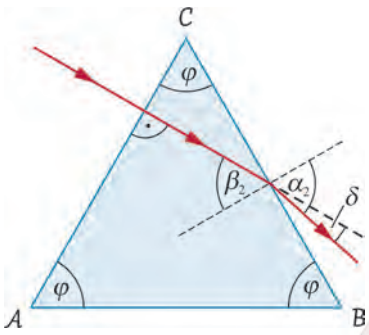
Adatok: $n_ü$ = 1,5, n_v = 4/3, $\alpha_1 = 0$, $\varphi = 60^\circ$.

a) $n_{ü,v} = \frac{n_ü}{n_v} = \frac{9}{8}$.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

b)



Az ábrát vizsgálva megállapítható: a C csúcsnál lévő φ és β_2 szögek merőleges szárú hegyesszögek, ezért egyenlőek: $\beta_2 = \varphi = 60^\circ$.

A kilépési irány meghatározásához alkalmazzuk a Snellius-Descartes törési törvényt:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n \Rightarrow \sin\alpha_2 = n \cdot \sin\beta_2 = 0{,}974 \Rightarrow \alpha_2 \approx 77^\circ$$

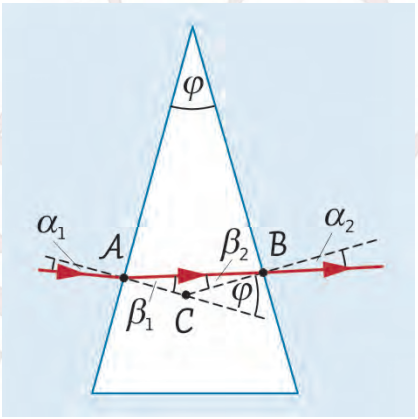
A fénysugár eltérülésének nagysága: $\delta = \alpha_2 - \beta_2 = 17^\circ$.

M.11.96.

Adatok: n_v = 4/3, $\alpha_1 = 10^\circ$, $\varphi = 30^\circ$.

a) A vízben lévő levegőprizma törésmutatója: $n = \frac{1}{n_v} = 3/4$

b)



A prizmában haladó fénysugár irányának meghatározásához alkalmazzuk a Snellius-Descartes törési törvényt: $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n \Rightarrow \sin\beta_1 = \frac{\sin\alpha_1}{n} = 0{,}23 \Rightarrow \beta_1 = 13{,}4^\circ$

Az ábráról leolvasható, hogy az ABC_Δ C csúcsánál lévő külső szöge φ, ezért:

$\varphi = \beta_1 + \beta_2 \Rightarrow \beta_2 = \varphi - \beta_1 = 16{,}6^\circ$.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

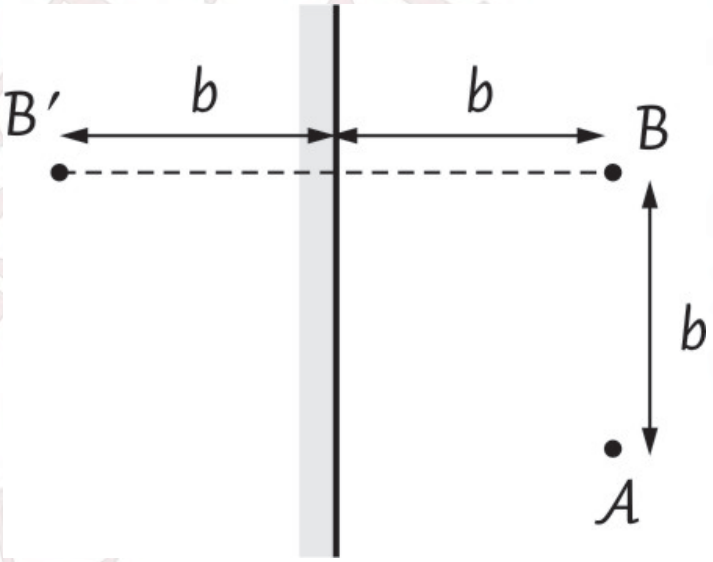
A prizmából való kilépési irány meghatározásához alkalmazzuk a Snellius-Descartes törési törvényt: $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n \Rightarrow \sin\alpha_2 = n \cdot \sin\beta_2 = 0{,}214 \Rightarrow \alpha_2 = 12{,}37^\circ$

a) A fénysugár eltérülésének nagysága: $\delta = \alpha_1 + \alpha_2 - \varphi = -7{,}63^\circ$. A negatív eltérülési szög a levegő prizma különleges sajátossága miatt lép fel, mert a levegő optikailag (is) ritkább, mint a víz.

TÜKRÖK ÉS LENCSÉK KÉPALKOTÁSA

M.11.97.

Adatok: *b*= 2,5 m, $\alpha_2 = 2 \cdot \alpha_1$.



A síktükör képalkotása miatt a kép azonos méretű a tárggyal. A tárgy távolsága Andrástól *b*, a kép távolsága $\sqrt{(2b)^2 + b^2} = \sqrt{5} \cdot b$

A tárgy, ill. a kép méretét jelöljük *h*-val:

$$tg\alpha_1 = \frac{h}{\sqrt{5} \cdot b},\ tg\alpha_2 = \frac{h}{b}$$

$$\frac{tg\alpha_2}{tg\alpha_1} = \sqrt{5}$$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

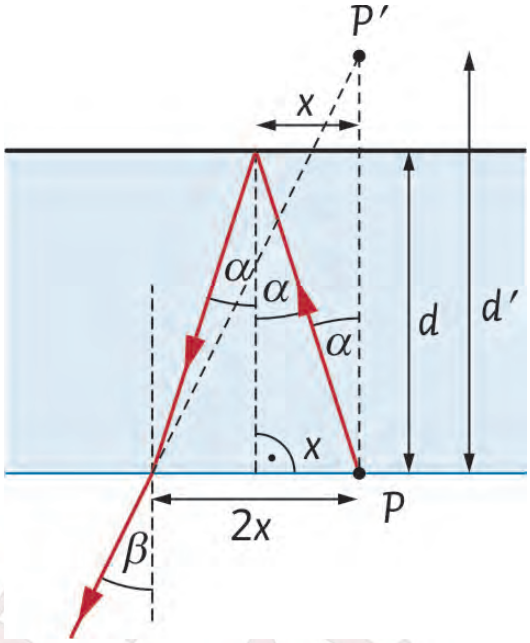
SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$$\frac{tg2\cdot\alpha_1}{tg\alpha_1}=\frac{2}{1-tg^2\alpha}=\sqrt{5}\Rightarrow tg\alpha_1=\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}}}$$

$$h=\sqrt{5}b\cdot tg\alpha_1=182\text{ cm}.$$

M.11.98.

Adatok d = 1 mm, n = 3/2.



Az ábrán látható derékszögű háromszögekre igaz:

$$tg\beta=\frac{2x}{d'},\ tg\alpha=\frac{x}{d}$$

Vegyük a két egyenlet hányadosát:

$$\frac{tg\alpha}{tg\beta}=\frac{d'}{2d}$$

Használjuk fel, hogy kicsiny α szögekre igaz a $\sin\alpha\approx tg\alpha$ közelítés:

$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{d'}{2d}$, Alkalmazzuk a Snellius-Descartes törési törvényt $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=n_{l,v}=\frac{1}{n}$

$$\frac{1}{n}=\frac{d'}{2d}\Rightarrow d'=2d/n=4/3\text{ mm}.$$

M.11.99.

Adatok: t = 1 cm, N = 1,5.

a) A nagyítás fogalmát használva: $N=\frac{K}{T}=-\frac{k}{t}=1{,}5\Rightarrow k=-1{,}5\text{ cm}.$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Alkalmazzuk a leképezési törvényt: $\frac{1}{f}=\frac{1}{t}+\frac{1}{k} \Rightarrow f=\frac{k\cdot t}{t+k}=3\ \text{cm}.$

b) $f=\frac{R}{2} \Rightarrow R=2\cdot f=6\ \text{cm}.$

M.11.100.

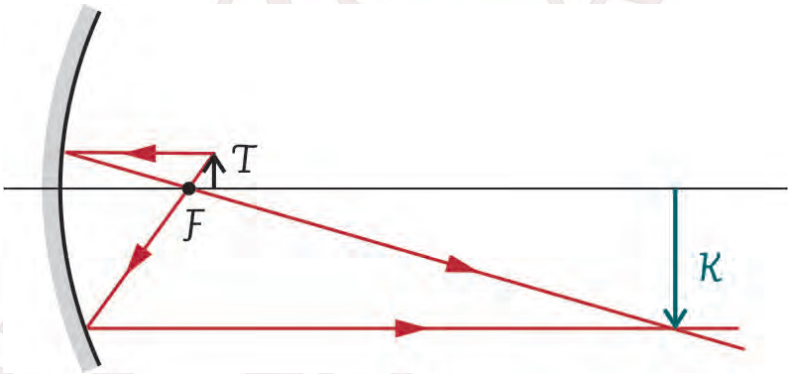
Adatok: R = 80 cm, k = 2 m.

a) $f=\frac{R}{2}=40\ \text{cm}.$

b) Alkalmazzuk a leképezési törvényt: $\frac{1}{f}=\frac{1}{t}+\frac{1}{k} \Rightarrow t=\frac{f\cdot k}{k-f}=50\ \text{cm}.$

c) $N=-\frac{k}{t}=-4$

A kép négyszeresen nagyított, valódi, a tárggyal fordított állású.



M.11.101.

Adatok: N = 1,5, $t+|k|=25\ \text{cm}.$

a) Nagyított (látszólagos) képet csak a homorú tükör állít elő.

b) A látszólagos kép miatt k < 0

$t+|k|=25\ \text{cm} \Rightarrow t-k=25\ \text{cm}$

A nagyítás fogalmát használva: $N=\frac{K}{T}=-\frac{k}{t}=1{,}5 \Rightarrow k=-1{,}5\cdot t.$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$t-(-1{,}5\cdot t)=25\text{ cm}$

t = 10 cm, k = -15 cm

Alkalmazzuk a leképezési törvényt: $\frac{1}{f}=\frac{1}{t}+\frac{1}{k}\Rightarrow f=\frac{k\cdot t}{t+k}=30\text{ cm}$.

Megjegyzés: Ha arcunktól ugyanekkora távolságban elhelyezett síktükörben nézzük magunkat, akkor a változatlan nagyságú képünket 20 cm távolságban látjuk. A homorú tükörben 25 cm messze lévő másfélszeres kép ezért csak 1,5·(20/25) = 1,2-szer nagyobbnak látszik a síktükör képéhez képest.

M.11.102.

Adatok: d = 2 m, t = 0,5 m.

A kép függőleges koordinátái olyanok, mintha síktükör alkotta volna.

A kép vízszintes koordinátáit egy domború tükör alakítja (f = -50 cm):

Alkalmazzuk a leképezési törvényt: $\frac{1}{f}=\frac{1}{t}+\frac{1}{k}\Rightarrow k=\frac{f\cdot t}{t-f}=-25\text{ cm}$.

A kép vízszintes koordinátáit 0,5 arányú kicsinyítéssel kapjuk.

Összefoglalva: A kirakat előtt álló ember azt látja, hogy a kirakatban látott képének magassága megegyezik a valódi magasságával, a kép szélessége kb. az ember valódi szélességének a fele.

M.11.103.

Adatok: d = 12 cm, N = 1/4

$d=12\text{ cm}\Rightarrow R=-6\text{ cm}\Rightarrow f=-3\text{ cm}$

a) $N=-\frac{k}{t}=\frac{1}{4}\Rightarrow k=-\frac{t}{4}$

Alkalmazzuk a leképezési törvényt: $\frac{1}{f}=\frac{1}{t}+\frac{1}{k}=\frac{1}{t}-\frac{4}{t}=-\frac{3}{t}\Rightarrow t=-3f=9\text{ cm}$.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

b) A nagyítás fogalma: $N = \frac{K}{T} = -\frac{k}{t} = \frac{f}{f-t}$.

$$K(t) = \frac{f}{f-t} \cdot T$$

Ez a függvény növekvő pozitív *t* tárgytávolságra csökkenő. Tehát a kép mérete nő, ha a szaloncukrot közelítjük a díszhez.

M.11.104.

Adatok: f = -50 cm, t = 15 m, d = 25 cm.

Ha megfordulunk, és szabad szemmel nézzük az autót, akkor a tárgy látószöge a közelítés felhasználásával:

$$\alpha = \frac{T}{t-d}.$$

A tükörben látott kép képtávolságának meghatározásához alkalmazzuk a leképezési törvényt: $\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k} \Rightarrow k = \frac{f \cdot t}{t-f} = -48{,}387\ \text{cm}$.

A nagyítás fogalma: $N = \frac{K}{T} = -\frac{k}{t} = \frac{1}{31}$.

Viszont ezt a képet mi 73,387 cm távolról látjuk, így kép látószöge a közelítés felhasználásával:

$$\beta = \frac{K}{d+|k|}$$

A két látószög hányadosa:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{K}{T} \cdot \frac{t-d}{d+|k|} = \frac{|k|}{t} \cdot \frac{t-d}{d+|k|} = \frac{48{,}387}{73{,}387} \cdot \frac{59}{60} \approx \frac{59}{91} \approx \frac{2}{3}.$$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Megjegyzés: Mivel a látószög nagyjából 2/3 részére lecsökken (síktükör esetén lényegében nem változik), így a látómező másfélszeresére nő. A megnövekedett látómező segíti a gépkocsivezetőt abban, hogy megfelelő információt kapjon arról, mi történik a forgalomban (és a kocsi hátsó ülésén) mögötte. Ezért használnak síktükör helyett domború tükröt (úgynevezett panorámatükröt) egyes vezetők középső visszapillantó tükörként. Sok esetben az oldalsó visszapillantó tükör kettős, egyik része sík, másik része domború; a sík rész pontosabb információt ad a közeledő jármű valódi távolságáról, a domború megnöveli a látómezőt.

M.11.105.

Adatok: $n = 3/2$, $f = 25$ cm.

a) $D = \frac{1}{f} = 4\,\frac{1}{\mathrm{m}}$.

b) Alkalmazzuk a következő összefüggést

$D = \frac{1}{f} = (n-1)\cdot\left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right]$ és vegyük figyelembe, hogy $R_2 = +\infty$.

$D = (n-1)\cdot\frac{1}{R_1} \Rightarrow R_1 = \frac{n-1}{D} = 12{,}5\ \mathrm{cm}$.

M.11.106.

Adatok: $D = 5$ 1/m, $n_ü = 3/2$, $n_v = 4/3$.

a) $f = 1/D = 1/5$ m $= 20$ cm.

b) Alkalmazzuk a következő összefüggést

$D = \frac{1}{f} = (n-1)\cdot\left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right] = (n-1)\cdot\frac{2}{R}$

$R = (n-1)\cdot\frac{2}{D} = 20\ \mathrm{cm}$.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

c) A lencse törésmutatója a vízre vonatkozóan:

$$n_{ü,v} = \frac{n_{ü}}{n_v} = \frac{9}{8}$$

$$\frac{1}{f'} = (n_{ü,v} - 1)\frac{2}{R} \Rightarrow f' = 80 \text{ cm}$$

.

M.11.107.

Adatok: n = 3/2, R_1 = 12 cm, R_2 = 16 cm.

a) Alkalmazzuk a következő összefüggést

$$D = \frac{1}{f} = (n-1)\cdot\left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right] \Rightarrow f = 13{,}71 \text{ cm}$$

b) Alkalmazzuk a következő összefüggést

$$D = \frac{1}{f} = 7{,}29 \frac{1}{\text{m}}$$

M.11.108.

Adatok: f = 12 cm, N = 4.

Használjuk a nagyítás fogalmát: $N = \frac{K}{T} = -\frac{k}{t}$.

$$N = \frac{K}{T} = -\frac{k}{t} = 4 \Rightarrow k = -4t$$

Alkalmazzuk a leképezési törvényt: $\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{-4t} = \frac{3}{4t}$

$$t = \frac{3}{4}\cdot f = 9 \text{ cm}.$$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.11.109.

Adatok: n = 1,6, f = 16 cm, $R_1 = R_2$

a) Alkalmazzuk a következő összefüggést

$$D = \frac{1}{f} = (n-1)\cdot\left[\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right] = (n-1)\cdot\frac{2}{R}$$

$$R = (n-1)\cdot 2f = 19{,}2 \text{ cm}.$$

b) $n'_{ü,v} = \frac{n_ü}{n_v} = 1{,}2$

$$\frac{1}{f'} = (n_{ü,v}-1)\cdot\left[\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right] = (n_{ü,v}-1)\cdot\frac{2}{R} = \frac{n_{ü,v}-1}{n-1}\cdot\frac{1}{f} \Rightarrow f' = 3\cdot f = 48 \text{ cm}$$

c) $n''_{ü,m} = \frac{n_ü}{n_m} = 0{,}93$

$$\frac{1}{f''} = (n_{ü,m}-1)\cdot\left[\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right] = (n_{ü,m}-1)\cdot\frac{2}{R} = \frac{n_{ü,m}-1}{n-1}\cdot\frac{1}{f} \Rightarrow f'' = -8{,}57\cdot f = -137 \text{ cm}.$$

A negatív előjel azt mutatja, hogy a saját anyagánál nagyobb törésmutatójú folyadékban a gyűjtőlencse szórólencsévé válik.

M.11.110.

Adatok: n = 3/2, f_1 = +30 cm.

A következő összefüggést vegyük figyelembe:

$$D = \frac{1}{f} = (n-1)\cdot\left[\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right] = (n-1)\cdot\frac{1}{R}, \text{ mert } R_2 = \infty$$

a) A sík-domború fókusztávolsága f_1 = +30 cm, dioptriája $D_1 = \frac{1}{f_1} = 3{,}33\,\frac{1}{\text{m}}$.

A sík-homorú lencse csak a görbületi sugár előjelében különbözik, ezért:

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

fókusztávolsága f_2 = -30 cm, dioptriája $D_2 = \frac{1}{f_2} = -3{,}33\,\frac{1}{\text{m}}$.

b) $R_1 = \frac{n-1}{D_1} = 0{,}15\ \text{m}$, illetve $R_2 = \frac{n-1}{D_2} = -0{,}15\ \text{m}$.

M.11.111.

Adatok: t = 24 cm, N = 1/3.

a) Használjuk a nagyítás fogalmát: $N = \frac{K}{T} = -\frac{k}{t} = \frac{1}{3}$.

$$k = -\frac{t}{3} = -8\ \text{cm}$$

Alkalmazzuk a leképezési törvényt: $\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k} \Rightarrow f = -12\ \text{cm}$.

b)

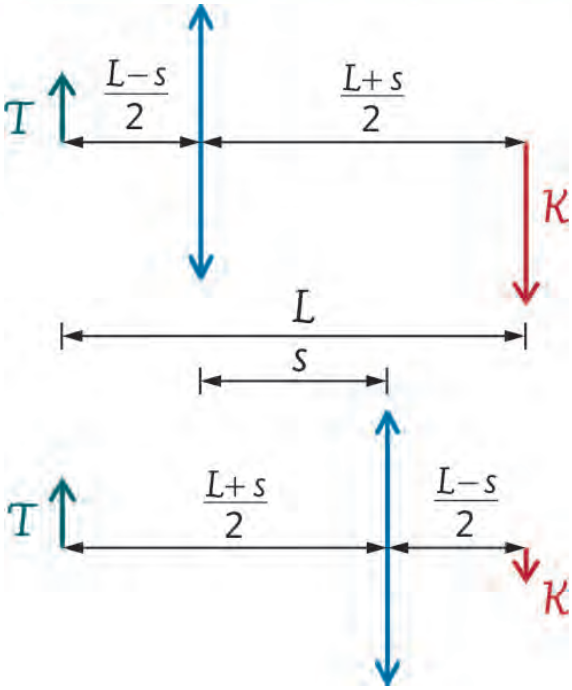
A nagyítás fogalma: $N = \frac{K}{T} = -\frac{k}{t} = \frac{f}{f-t}$.

$$K(t) = \frac{f}{f-t} \cdot T$$

Ez a függvény növekvő pozitív t tárgytávolságra csökkenő (a fókusztávolság negatív).
A kép mérete csökken, ha a lencsét távolítjuk a tárgytól.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT



M.11.112.

Adatok: L = 100 cm, s = 73 cm.

a) Az ábra alapján a nagyított kép esetén a tárgytávolság $\frac{L-s}{2}$, képtávolság $\frac{L+s}{2}$. A leképezési törvényt használva:

$$f = \frac{t \cdot k}{t+k} = \frac{L^2 - s^2}{4 \cdot L} \approx 11{,}7 \text{ cm}.$$

b) A tárgy- és a képtávolság közvetlen mérésénél olyan szakasz hosszát kell mérnünk, amelynek egy végét a lencse görbült felszíne határolja A Bessel módszernél határozottabbak a mérendő szakaszok határai (feltéve, hogy a tárgy helye jól meghatározott), valamint nagyobb távolságokat kell mérni, aminek kisebb a relatív hibája.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

OPTIKAI ESZKÖZÖK

M.11.113.

Adatok: t_1 = 8 m, N_1 = -1/40, N_2 = -1/50.

A k képtávolság mindkét képalkotás során ugyanakkora:

$$N_1 = -\frac{k}{t_1},\ N_2 = -\frac{k}{t_2}$$

A két egyenletet elosztva egymással:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{t_2}{t_1} \Rightarrow t_2 = \frac{N_1}{N_2} \cdot t_1 = 1{,}25 \cdot t_1 = 10\ \text{m}.$$

A készüléket 2 méterrel távolítsuk az épülettől.

M.11.114.

Adatok: d_1 = 6 cm, d_2 =9 cm.

$$P \cdot d_1^2 \cdot \pi \cdot t_1 = P \cdot d_2^2 \cdot \pi \cdot t_2$$

$$t_2 = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 \cdot t_1 = \frac{4}{9} \cdot t_1$$

A megvilágítási időt a 4/9-ére kell csökkenteni.

M.11.115.

Adatok: $D = 5\ \frac{1}{\text{m}}$, d_1 = 6 cm, d_2 =8 cm.

a) $f = \frac{1}{D} = 20\ \text{cm}$. A papírlaptól 20 cm távol tartsa a lencsét.

b) A megfelelő hasonlósági arányt felírva:

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$\frac{d}{d_1} = \frac{4}{20} \Rightarrow d = \frac{1}{5} \cdot d_1 = 1{,}2 \text{ cm}$.

c) $P_1 = I \cdot d_1^2 \cdot \pi$, $P_2 = I \cdot d_2^2 \cdot \pi$

$P_2 = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 \cdot P_1 = \frac{16}{9} \cdot P_1$

16/9-szer több fényteljesítményt lehet a papírra koncentrálni.

M.11.116.

Adatok: D = 8 1/m, N = 2, T = 1 cm, s = 25 cm.

a) $f = \frac{1}{D} = 12{,}5 \text{ cm}$

b) A nagyítás fogalma: $N = \frac{K}{T} = -\frac{k}{t} = 2$. $k = -2t$.

Alkalmazzuk a leképezési törvényt: $\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{2t} \Rightarrow t = \frac{f}{2} = 6{,}25 \text{ cm}$.

c) $k = -2t = -12{,}5 \text{ cm}$. Nagyított, látszólagos, a kép a tárggyal egyező állású.

d)

(A látszólagos kép a tisztánlátás távolságában (s = 25 cm) keletkezik, tehát a szemünk és a kép távolsága 25 cm. A képtávolság -12,5 cm. Ezekből arra következtetünk, hogy a szemünk és a lencse távolsága 12,5 cm.)

A tisztánlátás távolságában a következő szög alatt látnánk szabad szemmel az újság betűit: $tg\alpha = \frac{T}{t} = \frac{1}{25} \Rightarrow \alpha = 2{,}29^\circ$

A képet a következő szög alatt látjuk:

$tg\beta = \frac{K}{s} = \frac{2}{25} \Rightarrow \beta = 4{,}57^\circ$

A lencse szögnagyítása $N_{sz} = \frac{\beta}{\alpha} = 1{,}996 \approx 2$.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Megjegyzés: Ebben a speciális esetben a szokásos $N = K/T$ nagyítás és az $N_{sz} = \beta/\alpha$ szögnagyítás jó közelítéssel megegyezik, azonban általánosságban ezek igencsak különbözhetnek egymástól.

M.11.117.

Adatok: $N = 2$.

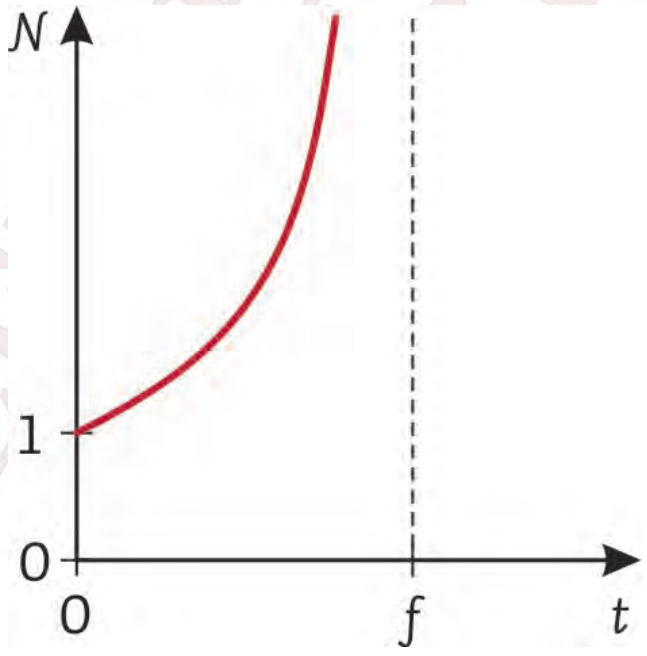
a) Alkalmazzuk a leképezési törvényt: $D = \frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{t} + \frac{1}{-2t} = \frac{1}{2t} \Rightarrow t = \frac{1}{2D}$.

b) Alkalmazzuk a leképezési törvényt: $\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k} \Rightarrow k = \frac{f \cdot t}{t - f}$.

A nagyítás fogalma: $N = \frac{K}{T} = -\frac{k}{t} = \frac{f}{f - t}$.

Ez a függvény növekvő pozitív t tárgytávolságra növekedő. A kép mérete növekszik, ha a lencsét távolítjuk a tárgytól.

c) $N(t) = \frac{f}{f - t}$



KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.11.118.

Adatok: D = 8 1/m, $A_1 = 24 \cdot 36\ \text{mm}^2$, k = 4 m.

a) Alkalmazzuk a leképezési törvényt: $D = \frac{1}{t} + \frac{1}{k} \Rightarrow t = \left(D - \frac{1}{k} \right)^{-1} = 12{,}9\ \text{cm}$.

b) A nagyítás fogalma: $N = \frac{K}{T} = -\frac{k}{t} = -31$.

c) A hasonló síkidomok területeinek aránya egyenlő a hasonlósági arányszám négyzetével:

$$\frac{A_2}{A_1} = N^2 \Rightarrow A_2 = N^2 \cdot A_1 = 0{,}83\ \text{m}^2 .$$

M.11.119.

Adatok: f = 200 mm, t_1 = 1 m, Δs = 0,775 m.

a)

Alkalmazzuk a leképezési törvényt a t_1 = 1 m tárgytávolságra és f = 200 mm fókusztávolságra: $\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k} \Rightarrow k = \frac{f \cdot t}{t - f}$.

$$k_1 = 25\ \text{cm}.$$

b)

A lencse valódi, kicsinyített (N = -1/4), a tárggyal fordított irányú képet hoz létre az ernyőn.

c)

A tárgy és az ernyő távolsága $L = t_1 + k_1 + \Delta s$ = 202,5 cm, a keresett képtávolság k.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Alkalmazzuk a leképezési törvényt a *k* képtávolságra, *L*-*k* tárgytávolságra és *f* = 200 mm fókusztávolságra: $\frac{1}{f}=\frac{1}{L-k}+\frac{1}{k}=\frac{L}{k\cdot(L-k)}$

Az egyenletet rendezve, majd az így kapott másodfokú egyenletet megoldva:

$$0=k^2-L\cdot k+f\cdot L$$

$$k_{1,2}=\frac{L\pm\sqrt{L^2-4fL}}{2}=\frac{202{,}5\pm157{,}5}{2}\ \text{cm}$$

$$k_1=180\ \text{cm},\ k_2=22{,}5\ \text{cm}$$

A lencsét két helyre is rakhatjuk:

Az ernyőtől 180 cm-re, ekkor 8-szoros nagyítású képet kapunk; illetve 22,5 cm-re, ekkor 1/8-szoros kicsinyített kép keletkezik.

M.11.120.

Adatok: $f_1=0{,}4\ \text{cm}$, $f_2=14\ \text{cm}$, l = 12 cm, t_1 =0,45 cm.

a) Alkalmazzuk a leképezési törvényt a t_1 = 0,45 cm-re:

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{t}+\frac{1}{k}\Rightarrow k_1=\frac{f_1\cdot t_1}{t_1-f_1}=3{,}6\ \text{cm}.$$

b) Ez a valódi kép lesz a szemlencse leképezésében a tárgy: $t_2=l-k_1=8{,}4\ \text{cm}$.

Alkalmazzuk a leképezési törvényt a t_2 = 8,4 cm-re: $\frac{1}{f}=\frac{1}{t}+\frac{1}{k}\Rightarrow k_2=\frac{f_2\cdot t_2}{t_2-f_2}=-21\ \text{cm}$.

c) A tárgylencse nagyítása: $N_1=-\frac{k_1}{t_1}=-8$, a szemlencse nagyítása $N_2=-\frac{k_2}{t_2}=2{,}5$.

A mikroszkóp teljes nagyítása ebben az összeállításban:

$$N=\frac{K_2}{T_1}=\frac{K_2}{T_2}\cdot\frac{T_2}{T_1}=\frac{K_2}{T_2}\cdot\frac{K_1}{T_1}=N_2\cdot N_1=-20.$$

Kihasználtuk, hogy az objektív által alkotott kép egyben az okulár számára virtuális tárgy.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.11.121.

Adatok: N_{sz} = -8, $l = f_1 - |f_2| = f_1 + f_2 = 28\ \text{cm}$

Használjuk a távcsőre vonatkozó szögnagyítás fogalmát: $N_{sz} = \frac{f_1}{f_2}$

$-8 = \frac{f_1}{f_2}$, $28 = f_1 + f_2$

Ennek az egyenletrendszernek a megoldása:

a) $f_1 = 32\ \text{cm}$

b) $f_2 = -4\ \text{cm}.$

M.11.112.

Adatok: $f_1 = 60\ \text{cm}$, $f_2 = 6\ \text{cm}$, $t_1 = 20\ \text{m}.$

a) A Kepler-féle távcső két gyűjtőlencséből áll, melyek tubuson belüli fókusztávolságai egybe esnek: $l = f_1 + f_2 = 66\ \text{cm}.$

b) A távcső szögnagyítás: $N_{sz} = \frac{f_1}{f_2} = 10.$

Mind a két kérdésre adott válaszunk csak közelítőleg igaz, hiszen a tárgy ugyan nagyon messze van, de nem a végtelenben. Ezért kell élességet állítanunk, ha a távcsővel különböző (véges) távolságokban lévő tárgyakat nézünk.

M.11.123.

Adatok: k = -80 cm, t = 25 cm.

A szemüveg használata azt jelenti, hogy a tisztánlátás távolságában lévő tárgyat nézve úgy tűnik, hogy az 80 cm távol van $(k = -80\ \text{cm})$:

Alkalmazzuk a leképezési törvényt:

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{t}+\frac{1}{k} \Rightarrow f=\frac{t\cdot k}{t+k}=36{,}36\ \text{cm}$$

D = 1/f =2,75 1/m dioptriájú szemüveget célszerű használnia.

M.11.124.

Adatok: D = -2 1/m.

A szemüveg használata azt jelenti, hogy a nagyon távoli tárgyat nézve úgy tűnik, hogy azt ott látjuk, ameddig szemüveg nélkül kényelmesen élesen látunk.

Alkalmazzuk a leképezési törvényt: $\frac{1}{f}=\frac{1}{t}+\frac{1}{k}$. A tárgytávolságot végtelennek véve:

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{k} \Rightarrow f=k=-50\ \text{cm}.$$

Szemüveg nélkül legfeljebb az 50 cm távol lévő tárgyakat látja megerőltetés nélkül élesen.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

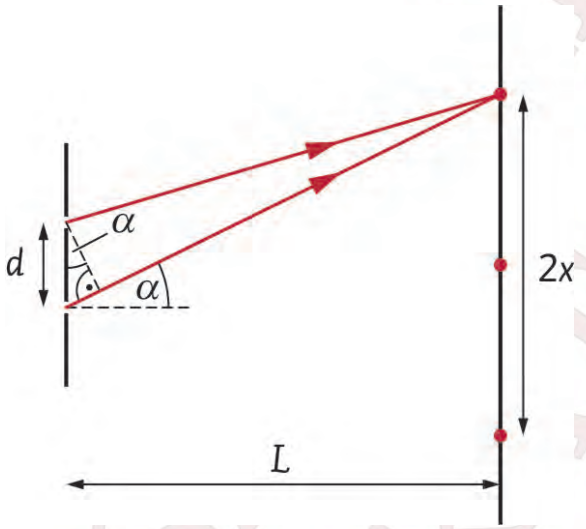
SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

HULLÁMOPTIKA. FÉNYHULLÁMOK INTERFERENCIÁJA, ELHAJLÁSA

M.11.125.

Adatok: d = 0,3 mm, L = 2 m, $\lambda = 630\ \text{nm}$.

Az első erősítési helyre igaz, hogy a két réstől induló fénysugarak útkülönbsége λ.



Az ábra alapján $\sin\alpha = \frac{\lambda}{d}$. Geometriai megfontolások alapján: $tg\alpha = \frac{x}{L}$. Használjuk fel, hogy kicsiny szögek szinusza és tangense kb. egyenlő:

$$\frac{\lambda}{d} = \frac{x}{L} \Rightarrow x = \frac{\lambda}{d} \cdot L = 4{,}2\ \text{mm}.$$

M.11.126.

Adatok: d = 1 mm, L = 2 m, x = 1 mm.

A 11.125. feladat megoldását felhasználva:

$$\frac{\lambda}{d} = \frac{x}{L} \Rightarrow \lambda = \frac{x \cdot d}{L} = 500\ \text{nm}.$$

M.11.127.

Adatok: $\lambda = 589\ \text{nm}$, $\alpha = 50^\circ$, $\beta = 35^\circ$.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

a) A Snellius – Descartes törvény segítségével kiszámoljuk a törésmutatót:

$$n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = 1{,}335$$

b) Alkalmazzuk a hullámtan alapegyenletét:

levegőben a fény frekvenciája: $c = \lambda \cdot f \Rightarrow f = \frac{c}{\lambda} = 5{,}09 \cdot 10^{14}\ \text{Hz}$. Vízben a fény frekvenciája ugyanennyi.

c) $n = \frac{\lambda_{lev}}{\lambda_{víz}} \Rightarrow \lambda_{víz} = \frac{\lambda_{lev}}{n} = 441{,}2\ \text{nm}$.

M.11.128.

Adatok: $\varphi = 20^\circ$, $n_1 = 1{,}58$, $n_2 = 1{,}62$.

a) A 11.94. feladat ábrája és megoldása alapján:

A fehér fénynyaláb a prizmába irányváltoztatás nélkül lép be,

$$\alpha_1 = 0 \Rightarrow \beta_1 = 0 \Rightarrow \beta_2 = \varphi$$

A kilépési irány meghatározásához alkalmazzuk a Snellius-Descartes törési törvényt:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n \Rightarrow \sin\alpha_2 = n \cdot \sin\beta_2$$

Vörös színre $\alpha_{2,v} = 32{,}71^\circ$, kék színre $\alpha_{2,k} = 33{,}65^\circ$

A két fénysugár $\Delta\alpha$ = 0,94°-ot zár be egymással.

b)

A kilépési ponttól 80 cm-re lévő papírlapon a színkép mérete legalább.

$$d = R \cdot \Delta\alpha = 80\ \text{cm} \cdot \frac{0{,}94}{180}\pi = 1{,}31\ \text{cm}.$$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.11.129.

a) Vörös színt akkor fogunk észlelni, ha a zöld (kb. 500 nm) színre kioltás van, és a többi szín együtt eredményezi a zöld szín kiegészítőjét, a vöröset.

A fény egy része behatol a folyadékba, másik része rögtön visszaverődik, π fázisugrással. A fény folyadékba hatoló része megteszi a folyadék vastagságát, visszaverődik, ismét megteszi a folyadék vastagságát, majd kilép a hártyából. A rögtön visszaverődő rész fázisugrását figyelembe véve a kívánt kioltás akkor jön létre, ha a hártyában ide-oda haladó, a folyadékhártya vastagságát kétszer megtéve, 1 hullámhossznyit halad. Itt természetesen a fény vízben mért $\lambda' = \frac{\lambda}{n} = 375\,\text{nm}$ hullámhosszát kell használni.

$$2 \cdot d = \lambda' = 375\ nm \Rightarrow d = 187{,}5\ nm$$

b) $2 \cdot d = \lambda' = \frac{\lambda}{n} \Rightarrow \lambda = 2nd = 573\,\text{nm}$. Ha az 573 nm hullámhosszúságú, sárga színű fényt kivonjuk a spektrumból akkor a maradék szín a kiegészítő színét, az ibolyát „keveri ki”.

Megjegyzés: Az ék alakú folyadékhártyán interferenciával létrejövő színek nem tiszta színek. A jelenség során keletkező színek eredetének kioltással történő értelmezése csak közelítően igaz. Érdekes, hogy ahol a hártya nagyon vékony, ott gyakorlatilag minden színre kioltás történik, már nincs visszavert fény, fekete lesz a hártya teteje (Newton-féle fekete hártya).

M.130.

Adatok: n = 1,8, $d = 150\ nm$.

A fehér fényű megvilágítás egy része a levegő – oxidréteg határáról verődik vissza, a másik része behatol az oxidrétegbe, majd a következő közeghatárról visszaverődik. Az első visszaverődés π fázisugrással jár, ezért az oxidrétegben ide-oda haladó, a réteg vastagságát kétszer megtéve, 1 hullámhossznyit halad.

$$2 \cdot d = \frac{\lambda}{n} \Rightarrow \lambda = 2 \cdot n \cdot d = 540\ nm$$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Ha az 540 nm hullámhosszúságú, zöld színű fényt kivonjuk a spektrumból akkor a maradék szín a kiegészítő színét, közelítőleg a vörös színt „keveri ki”. (Az így előálló szín nem tiszta.)

M.11.131.

Adatok: n = 1,8, n' = 1,38, $\lambda = 550\ \text{nm}$

A lencsére eső fény egy része a levegő-bevonat, másik része a bevonat flintüveg határáról verődik vissza. Mindkét visszaverődés optikailag sűrűbb anyagról történik, azaz π fázisugrással. A két visszavert fénysugár közötti útkülönbség megegyezik a flintüvegről visszaverődő fénysugár többletútjával, ami a bevonat vastagságának kétszerese: $\Delta s = 2 \cdot d$. Akkor találkoznak ellentétes fázisban, ha ez az útkülönbség a fény üvegbeli hullámhosszának a fele: $\Delta s = \frac{\lambda_{n'}}{2}$.

Az útkülönbség kétféle kifejezésének egybevetése után: $2 \cdot d = \frac{\lambda_{n'}}{2}$.

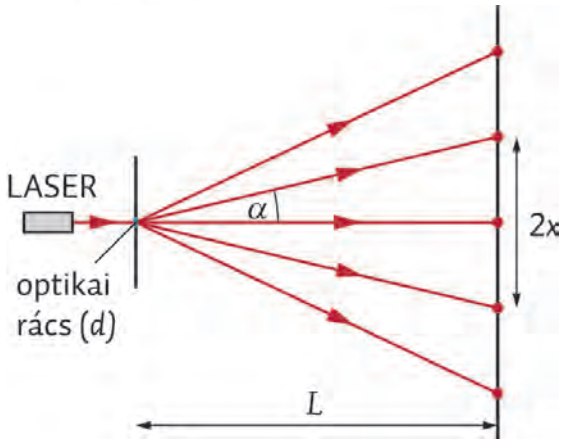
$$d = \frac{\lambda_{n'}}{4} = \frac{\lambda / n'}{4} = \frac{\lambda}{4 \cdot n} = 9{,}96 \cdot 10^{-8}\ \text{m}$$

A visszaverődés-mentes bevonat vastagsága 99,6 nm.

Hasonló bevonattal lehet elérni, hogy a szemüveglencsék tükröződés-mentesek legyenek.

M.11.132.

Adatok: $d = \frac{1}{1000}\ \text{cm} = 10^{-5}\ \text{m}$, L = 1,5 m, $x = 10\ \text{cm}$.



KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Az első erősítési helyre igaz, hogy a két réstől induló fénysugarak útkülönbsége λ.

$\sin\alpha = \frac{\lambda}{d}$. Geometriai megfontolások alapján: $tg\alpha = \frac{x}{L}$. Használjuk fel, hogy a kicsiny szögek szinusza és tangense kb. egyenlő: $tg\alpha = \frac{x}{L} = \frac{1}{15} = 0{,}0666 \Rightarrow \alpha = 3{,}81^\circ$ $(\sin\alpha = 0{,}0665)$.

$$\frac{\lambda}{d} = \frac{x}{L} \Rightarrow \lambda = \frac{d \cdot x}{L} = 667 \text{ nm}.$$

M.11.133.

Adatok: $d = \frac{1}{5000}$ cm $= 2 \cdot 10^{-6}$ m, L = 0,8 m, $2 \cdot x = 30$ cm.

A 11.131. feladat megoldását felhasználva:

a) $\lambda = \frac{d \cdot x}{L} = 375$ nm.

b) $c = \lambda \cdot f \Rightarrow f = \frac{c}{\lambda} = 8 \cdot 10^{14}$ Hz.

c) Hasonló összefüggés írható fel a víz alatti képalkotásra, mint a levegőben:

levegőben: $\lambda_l = \frac{d \cdot x_l}{L}$, vízben: $\lambda_v = \frac{d \cdot x_v}{L}$

A két egyenletet elosztva:

$$\frac{\lambda_l}{\lambda_v} = \frac{x_l}{x_v}$$

$$n = \frac{x_l}{x_v} \Rightarrow 2x_v = \frac{2x_l}{n} = 22{,}5 \text{ cm}.$$

M.11.134.

Adatok: $\lambda = 589$ nm $= 589 \cdot 10^{-9}$ m, L = 1,4 m, $2 \cdot x = 8$ cm.

A 11.131. feladat megoldását felhasználva (ügyelve arra, hogy a másodrendű maximumok esetén az útkülönbség 2λ):

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

$$d = \frac{2\lambda \cdot L}{x} = 4{,}123 \cdot 10^{-5}\ \text{m}$$

Ez kb. 240 $\left(0{,}01\ \text{m} : 4{,}123 \cdot 10^{-5}\ \text{m}\right)$ vonalat jelent centiméterenként.

A FÉNY POLARIZÁCIÓJA

M.11.135.

a) A Brewster-törvény szerint a visszavert fény akkor lesz teljesen poláros, amikor a visszavert és a közegbe hatoló megtört fénysugár egymásra merőleges. Az így meghatározott beesési szöget Brewster-szögnek nevezzük.

Alkalmazzuk a Snellius – Descartes törvényt:

$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n$, valamint használjuk fel, hogy $\alpha + \beta = 90^\circ$.

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\left(90^\circ - \alpha\right)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\alpha = n$$

$$n = tg\alpha_B = 1{,}466.$$

b) A Négyjegyű függvénytáblázatok segítségével megállapíthatjuk, hogy a folyadék neve nagy valószínűséggel glicerin vagy terpentin.

M.11.136.

Adatok: $k_1 = 1\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$, $L_1 = 1\ \text{cm}$, $L_2 = 30\ \text{cm}$, $\alpha_1 = 6{,}7^\circ$, $\alpha_2 = 15^\circ$

Az optikailag aktív cukoroldat a rajta áthaladó fény polarizációs irányát elforgatja. Az elforgatás mértéke egyenesen arányos a *k* koncentrációval, és a fény oldatban megtett *L* útjával. Az arányossági tényezőt jelöljük *C*-vel.

Ez alapján a két eseményre felírhatjuk:

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

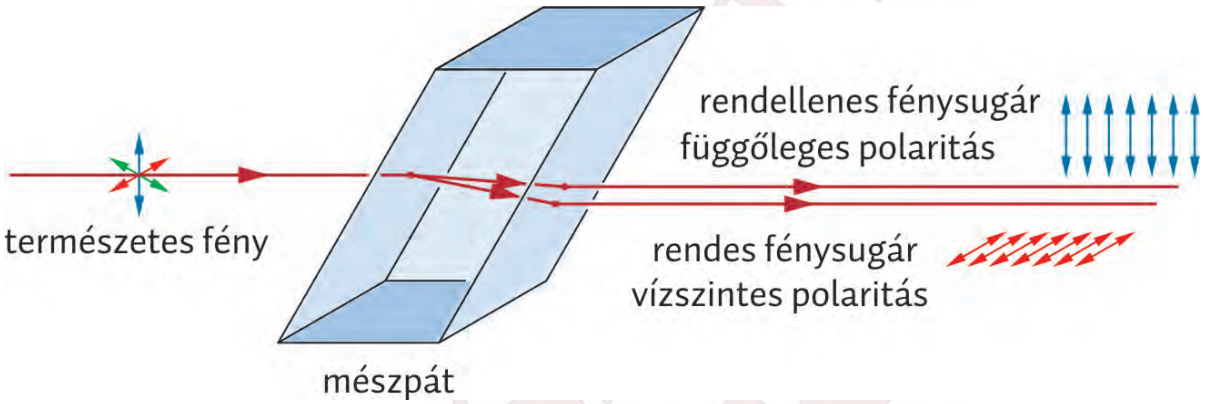
$$\alpha_1 = C \cdot k_1 \cdot L_1 \qquad \alpha_2 = C \cdot k_2 \cdot L_2$$

A két egyenlet hányadosát véve: $\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{k_2 \cdot L_2}{k_1 \cdot L_1}$

Ebből a keresett k_2 koncentrációt kifejezve $k_2 = \frac{L_1}{L_2} \cdot \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot k_1 = 74{,}6 \frac{\text{mg}}{\text{cm}^3}$.

Az ismeretlen oldat koncentrációja $k_2 = 74{,}6 \frac{\text{mg}}{\text{cm}^3}$.

M.11.137.



Adatok: $n_1 = 1{,}65$, $n_2 = 1{,}48$, $\alpha = 30^\circ$.

A kilépési irány meghatározásához alkalmazzuk a Snellius-Descartes törési törvényt:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n \Rightarrow \sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n}$$

Rendes fénysugárra $\beta_1 = 17{,}64^\circ$, a rendellenes fénysugárra $\beta_2 = 19{,}75^\circ$

A két fénysugár $2{,}11^\circ$-ot zár be egymással.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

TESZTFELADATOK

11.138.A villámlás fénye vagy hangja érkezik hozzánk hamarabb?

a) Hangja.
b) Egyszerre érkeznek.
c) Fénye.

M.11.138. c)

A fény sebessége kb. milliószor nagyobb, mint a hang sebessége.

11.139. Kiterjedt fényforrás fénye esik egy tárgyra. Mi a különbség a tárgy mögött kialakuló teljes árnyék és félárnyék között?

a) A teljes árnyékban lévő helyre a fényforrás minden pontjából érkezik fény, a félárnyékba csak a fényforrás feléről.
b) A teljesen sötét (teljes árnyék) és a teljesen világos közti átmeneti részt nevezzük félárnyéknak.
c) A teljes árnyékban lévő pontokba érkező fények teljesen kioltják egymást, a félárnyékban csak részben.

M.11.139.b)

A teljesen árnyékban lévő pontokhoz semmilyen fény nem jut. A félárnyékban lévő pontokhoz a fényforrás egy részéről jut csak fény. A teljesen világos helyekre a fényforrás minden pontjáról jut fény.

11.140. A víznek levegőre, vagy a levegőnek vízre vonatkozó törésmutatója a nagyobb?

a) A víznek levegőre vonatkozó törésmutatója
b) Levegőnek vízre vonatkozó törésmutatója
c) A két törésmutató egyenlő

M.140.a)

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

A törésmutató definíciója szerint:

$$n_{v,l} = \frac{c_l}{c_v} > \approx \frac{4}{3}.$$

11.141. A víz levegőre vonatkoztatott törésmutatója 4/3. Az üveg levegőre vonatkoztatott törésmutatója 3/2. Mekkora az üveg vízre vonatkoztatott törésmutatója?

a) 8/9
b) 9/8
c) 2
d) 1/2

M.11.141.a)

A törésmutató definíciója szerint:

$$n_{ü,v} = \frac{n_{ü}}{n_v} = \frac{9}{8}.$$

11.142. Fénysugár új közeg határához érkezik. Mikor jöhet létre teljes visszaverődés?

A) Ha az új közeg optikailag sűrűbb, mint a régi.
B) Ha az új közeg optikailag ritkább, mint a régi.
C) Ha a fénysugár merőlegesen érkezik a közeghatárra.

11.142. Megoldás: A helyes válasz: B).

11.143. A víz és levegő határán melyik irányba haladó fénysugár szenvedhet teljes visszaverődést?

a) Vízből levegő felé haladó
b) Levegőből víz felé haladó
c) Mindkét irányba lehet, a beesési szögtől függően

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

M.11.143.a)

Az optikailag sűrűbb közegből a ritkább felé haladva a törési szög nagyobb, mint a beesési. A határszög esetén éppen 90 fok. A határszögnél nagyobb beesési szög esetén teljes visszaverődés történik.

11.144. Az üveg törésmutatója 1,5. Mekkora az üvegben a fény terjedési sebessége?

a) $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

b) $c = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{1{,}5} = 2 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

c) $c = 1{,}5 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} = 4{,}5 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

M.11.144.b)

A törésmutató definíciója szerint:

$$n_{ü,l} = \frac{c_l}{c_ü} = 1{,}5 \Rightarrow c = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{1{,}5} = 2 \cdot 10^8 \text{ m/s}.$$

11.145. A 180 cm magas András olyan falitükröt szeretne vásárolni, amelyben tetőtől talpig láthatja magát. Legalább mekkorát vásároljon?

A) Legalább 90 cm magasat.

B) Legalább 100 cm magasat.

C) Legalább 180 cm magasat.

11.145. Megoldás: A helyes válasz: A).

11.146. Jellemezd a szórólencse képalkotását!

a) A szórólencse minden esetben kicsinyített, a tárggyal egyező állású, látszólagos képet alkot.
b) A szórólencse minden esetben nagyított, a tárggyal ellentétes állású, valódi képet alkot.
c) A szórólencse a fókuszán belüli tárgyról nagyított, azon kívül kicsinyített képet alkot.

M.11.146.a)

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Vizsgáljuk a leképezési törvényt: $\frac{1}{f}=\frac{1}{t}+\frac{1}{k}$.

f negatív, *t* pozitív, ezért $k < 0$ és $|k| <$ t

Innen lehet tudni, hogy a szórólencse minden esetben kicsinyített, a tárggyal egyező állású, látszólagos képet alkot.

11.147. Milyen tükröt használnak közlekedési tükörként a nehezen belátható útkereszteződéseknél, kocsi-kiállóknál.

a) Síktükröt
b) Domború tükröt
c) Homorú tükröt

M.11.147.b)

A domború tükör ad minden esetben kicsinyített, a tárggyal egyező állású, látszólagos képet.

11.148. Jellemezzük a domború tükör képalkotását!

A) A domború tükör minden esetben kicsinyített, a tárggyal egyező állású, látszólagos képet alkot.

B) A domború tükör minden esetben nagyított, a tárggyal ellentétes állású, valódi képet

alkot.

C) A domború tükör a fókuszán belüli tárgyról nagyított, azon kívül kicsinyített képet alkot.

11.148. Megoldás: A helyes válasz: A).

11.149. Hogyan változik egy homorú tükör fókusztávolsága, ha a Földről a Holdra vinnénk?

a) Csökkenne
b) Növekedne
c) Nem változna

M.11.149.c)

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

A tükrök képalkotását a visszaverődési törvény határozza meg, ami a Holdon is ugyanolyan, mint a Földön.

11.150. 6 cm átmérőjű gyűjtőlencsére a Nap fénye merőleges érkezik. A lencsétől 8 cm távol lévő, vele párhuzamos papírlapon 2 cm átmérőjű fényes körlapot látunk. Mekkora lehet a lencse fókusz távolsága?

A) 6 cm.

B) 12 cm.

C) 6 cm, vagy 12 cm.

11.150. Megoldás: A helyes válasz: C).

11.151.A 6 cm átmérőjű gyűjtőlencsére merőlegesen érkező napfényt sikerül az ernyőn 2 mm^2-nyi területre koncentrálni. Hányszor több fényenergia jut így egységnyi felületre, mint a lencse használata nélkül?

A) kb. 1400-szor.

B) kb. 5600-szor.

C) kb. 30-szor.

11.151. Megoldás: A helyes válasz: A).

11.152. Hogyan változik az üvegből (n = 1,5) készült gyűjtőlencse fókusztávolsága, ha vízbe (n = 4/3) tesszük?

a) Nem változik
b) négyszeresére nő
c) negyedére csökken
d) Felére csökken

M.11.152.b)

Alkalmazzuk a következő összefüggést $D = \frac{1}{f} = (n-1)\cdot\left[\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right]$!

A gyűjtőlencsét a vízbe helyezve a törésmutatója csökken (9/8), a görbületi sugarak nem változnak. A levegőn: $n-1=1/2$, a vízben $n-1=1/8$. A fókusztávolság vízben a négyszeresére nő.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

11.153. Lehet-e egy domború lencse szórólencse?

A) Igen, ha a tárgy a fókusztávolságon belül van.
B) Nem, a domború lencse mindig gyűjtőlencse is.
C) Igen, ha a környezet optikailag sűrűbb, mint a lencse anyaga.

11.153. Megoldás: A helyes válasz: C).

11.154. Melyik a helyes állítás a szórólencse képalkotásáról?

a) A szórólencsével csak nagyított, egyenes állású képet hozhatunk létre.
b) A szórólencse csak a fókuszán belüli tárgyakról hoz létre nagyított képet.
c) A szórólencse a távoli tárgyakról fordított állású képet alkot.

M.11.154.a)

Vizsgáljuk a leképezési törvényt: $\frac{1}{f}=\frac{1}{t}+\frac{1}{k}$.

$f < 0$ és $t > 0$, csak úgy teljesülhet, ha $k < 0$ és $|k| > t$, azaz a szórólencse mindig nagyított, látszólagos, a tárggyal azonos állású képet hoz létre.

11.155. A közellátó szem látásának korrekciójára milyen szemüveglencsét használnak?

a) szórólencsét
b) gyűjtőlencsét
c) lehet szóró-, is gyűjtőlencse is

M.11.155.a)

A rövidlátó szem a messziről érkező fénysugarakat a retina elé képezi le. Ezt a hibát egy szórólencsével lehet korrigálni.

11.156. A távollátó szem látásának korrekciójára milyen szemüveglencsét használnak?

A) Szórólencsét.

B) Gyűjtőlencsét.

C) Lehet szóró- és gyűjtőlencse is.

11. 156. Megoldás: A helyes válasz: B).

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

11.157. A fehér fénynyalábból kiszűrjük a piros színt. Milyen színt kever ki a „maradék”?

a) Sárga
b) Zöld
c) Kék

M.11.157.b)

A többi szín a kiszűrt szín kiegészítőjét, a zöld színt „keveri ki”.

11.158. Milyen fizikai jelenség húzódik meg a lepkeszárny, a bogár kitinpáncéljának irányfüggő színe (irizálás) mögött?

a) Elhajlás.
b) Interferencia.
c) Fénytörés.

M.11.158.b)

Ezeket a változó színeket a találkozó fényhullámok interferenciája határozza meg.

11.159. Milyen fénytani jelenség miatt kék az égbolt?

A) Fényszóródás.
B) Fénypolarizáció.
C) Fénytörés.

11.159. Megoldás: A helyes válasz: A).

11.160. A Brewster-szög alatt érkezik a poláros fény a közeghatárhoz. A beeső fénynyaláb a beesési síkkal párhuzamosan polarizált. Jellemezd a megtört és a visszavert fénysugarakat!

a) Teljes egészében visszaverődik, megtört fény nem lesz.
b) Teljes egészében megtörik, visszavert fény nem lesz.
c) A fény egy része megtörik, másik része visszaverődik.

Brewster-szögű beeséskor a fénynyaláb beesési síkkal párhuzamos összetevője megtörik, tehát ebben az esetben az egész, ami azt is jelenti, hogy nem verődik vissza fény.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

11.161. Milyen fénytani jelenség játszik szerepet abban, hogy a naplemente vörös?

A) Fénytörés.
B) Diszperzió.
C) Fényszóródás.

11.161. Megoldás: A helyes válasz: C).

ESSZÉKÉRDÉSEK:

11.162. Optikai leképezés

Szemünk épségét különösen nagyon érdemes óvni, hisz a fény segítségével szerezzük a legtöbb információt környezetünkről. Látásunk távolságának határt szab a természet: a nagyon pici, közeli dolgokat, illetve a nagyon távoli tárgyakat nem látjuk.

Milyen jelenségekkel foglalkozik a geometriai optika (sugároptika)?

Ismertesd azokat a jelenségeket, melyek akkor fordulnak elő, amikor egy fénysugár egy új közeg sík határához érkezik!

A teljes visszaverődés milyen feltételek esetén valósul meg? Sorolj fel két alkalmazást, és az egyiket ismertesd részletesebben!

Mutasd be az optikai képalkotás fogalmait, törvényét egy szabadon választott eszköz (tükör, lencse) segítségével. A nevezetes sugármenetek felhasználásával készítsd el a választott eszköz képalkotását, illetve, ha lehetséges, akkor a tipikus képalkotásait. Sorold fel egy másik optikai eszköz lehetséges alkalmazásait!

M.11.162.

Megoldás-vázlat:

A geometriai optika olyan fényjelenségeket vizsgál, amelyek során a fény útjába kerülő testek, illetve rések mérete sokkal nagyobb a fény hullámhosszánál. Ilyenkor a fény hullám tulajdonságára nem vagyunk tekintettel, munkaeszközünk a fénysugár.

Fénysugár egy új közeg sík határához érkezik: egy része visszaverődik (visszaverődési törvény), másik része behatol az új közegbe (Snellius-Descartes törési törvény).

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

A fényvisszaverődés törvénye:

- A visszavert fénysugár a beeső fénysugár és a beesési merőleges által meghatározott síkban van.
- A visszaverődési szög egyenlő a beesési szöggel.

Kép: emelt tankönyv 132. o. bal alsó rajza

A fénytörés törvénye (Snellius-Descartes törési törvény):

- A megtört fénysugár a beeső fénysugár és a beesési merőleges által meghatározott síkban van.
- A határfelületre merőlegesen érkező fénysugár az új közegben irányváltoztatás nélkül halad tovább.
- A közeghatárra ferdén érkező fénysugár iránya az új közegben megváltozik:

.

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c_1}{c_2} = n_{2,1}$$

Az optikailag sűrűbb közegből a ritkább felé haladva a törési szög nagyobb, mint a beesési. A határszög esetén éppen 90 fok. A határszögnél nagyobb beesési szög esetén teljes visszaverődés történik.

Teljes visszaverődés alkalmazásai: képfordító prizma, fényvezető kábel.

Optikai képalkotás akkor történik, ha a fénysugarak irányát fényvisszaverő felület, vagy fénytörő közeg megváltoztatja.

A tárgynak, illetve a képnek a képalkotó eszköztől mért távolsága a *t* tárgytávolság, illetve a *k* képtávolság. A tárgy, illetve a kép mérete *K* és *T*. A képalkotó eszköz törőképessége a *D* dioptria, fókusztávolsága *f*, kapcsolatuk $D = 1/f$.

A *t*, *k* és *f* között a leképezési törvény (geometriai optika alapegyenlete) teremt kapcsolatot:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k}$$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

A képalkotást jellemzi a nagyítás: $N = \frac{K}{T} = -\frac{k}{t}$

A nevezetes sugármenetek segítségével készült vázlatrajzok a homorú gömbtükör képalkotásáról:

Az emelt tankönyv 145. oldalon alsó 3, és a146. oldalon felső kettő ábrája

Például a domború tükröt használnak közlekedési tükörnek.

11.163. A fény, mint hullám

Rezgések, hullámok vesznek körül minket természetes, illetve technikai környezetünkben. A legérdekesebb hullámjelenségeket talán a fény hozza létre. Rengeteg modern technikai eszközünk működésének hátterében az optika legújabb eredményei húzódnak meg.

Ismertesd a fény hullámtulajdonságait leíró fizikai mennyiségeket, és a köztük fennálló összefüggést!

Milyen jelenségekkel foglalkozik a fizikai optika (hullámoptika)?

Sorold fel és röviden írd le azokat a fényjelenségeket, amelyeket csak a fény hullámtulajdonságával lehet értelmezni. Válassz közülük egyet, és mutasd be egy természeti előfordulását és egy technikai alkalmazását!

M.11.163.

Megoldás-vázlat:

A fény hullámtulajdonságait leíró fizikai mennyiségek:

Terjedési sebesség (*c*): a fény vákuumbeli terjedési sebessége (kb. $3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$) határsebesség. Közegben ennél kisebb sebességgel halad a fény.

Periódusidő (*T*): egy teljes rezgés ideje.

Frekvencia (*f*): Számértéke az egységnyi idő alatt megtett teljes rezgések számát adja. $f = \frac{1}{T}$.

Hullámhossz (λ): A hullámtér két, szomszédos, azonos fázisú pontjának a távolsága.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

A köztük fennálló összefüggés a hullámtan alapegyenlete: $c = \lambda \cdot f = \frac{\lambda}{T}$.

A fizikai optika vizsgálati tárgya:

A fizikai optika (hullámoptika) olyan fényjelenségeket vizsgál, amelyek során a fény útjába kerülő testek, illetve rések mérete összemérhető a fény hullámhosszánál. Ezek a fényjelenségek csak a fény hullámtermészetével értelmezhetők.

Csak a fény hullámtulajdonságával lehet értelmezni a következő jelenségeket: interferencia, elhajlás, polarizáció.

Interferencia: Ha két fényhullám úgy találkozik, hogy fáziskülönbségük időben állandó (koherens fényhullámok), akkor a térben lesznek olyan pontok, ahol maximálisan erősítik, illetve maximálisan gyengítik egymást. Az interferencia két vagy több hullám szuperpozíciója eredményeként létrejövő új hullám mintázat. A vízen úszó vékony olajfolt felületén kialakuló szivárványszínek az interferenciával magyarázhatók.

Elhajlás: Ha a fényhullámok útjába a hullámhosszhoz képest viszonylag nagy méretű rést helyezünk, akkor a résen áthaladó hullámok közelítőleg egyenesen haladnak tovább. A rést határoló akadályoknak árnyéka van. Ha a rést mérete összemérhető a hullámhosszal, akkor a fényhullámok behatolnak abba az árnyéktérbe is – ilyenkor tapasztalható az elhajlás, azaz a diffrakció.

Polarizáció: A fény elektromágneses hullám. Olyan transzverzális hullám, amiben, az $\vec{E}$ elektromos térerősség és a $\vec{B}$ mágneses indukció egymásra és a terjedési irányra merőlegesen rezeg. Az elektromos térerősség irányát egyben a polarizáció irányának is nevezzük. Polarizált fényben csak egy ilyen kitüntetett irány van. Polarizálatlan fényben az elektromos térerősség rezgési iránya szabálytalan.

Fénytani hullámjelenségek természeti előfordulásának, és technikai alkalmazásának bemutatása:

Interferencia: fényinterferencia vízen úszó olajfolton, szappanbuborékon, ék keresztmetszetű folyadékhártyán, holográfia

Fényelhajlás és interferencia optikai résen, rácson, CD-én, esernyővásznon

Polarizáció: polárszűrő, rovarok és madarak polarizációlátása, optikai aktivitás a folyadékkristályos kijelzőkben

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

KIHÍVÁST JELENTŐ FELADATOK

M.11.164.

Adatok: f = 15 cm, $t_1 = 20\ cm$, $T_1 = 10\ cm$.

Alkalmazzuk a leképezési törvényt: $\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k} \Rightarrow k_1 = \frac{f \cdot t_1}{t_1 - f} = +60\ \text{cm}.$

A lencsétől 60 cm távol keletkezne a valódi kép, ha a tükör nem lenne a helyén. A tükör erről a lencsétől 60 cm távol hozna létre képet, ami a lencse számára virtuális tárgynak minősül $t_2 = -60\ cm$ tárgytávolsággal.

Ismét alkalmazzuk a leképezési törvényt: $\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k} \Rightarrow k_2 = \frac{f \cdot t_2}{t_2 - f} = +12\ \text{cm}.$

Vizsgáljuk a nagyítást: $N = \frac{K_2}{T_1} = \frac{K_1}{T_1} \cdot \frac{K_2}{T_2}$ Az átalakítás igaz, hiszen $K_1 = T_2$.

Ezek után: $N = \frac{K_1}{T_1} \cdot \frac{K_2}{T_2} = -\frac{k_1}{t_1} \cdot \left(-\frac{k_2}{t_2}\right) = \frac{k_1 \cdot k_2}{t_1 \cdot t_2} = -0{,}6.$

A keletkező kép kicsinyített, valódi, a kép tárggyal fordított állású.

Megjegyzés:

A lencséhez szorosan elhelyezett síktükör fényvisszaverő hatása miatt a jelenségre tekinthetünk úgy, mintha a fény két, azonos, szorosan egymás mellé helyezett lencsén haladna át. Használjuk fel, hogy a szorosan egymás mellé tett, két vékony lencséből álló lencserendszer eredő gyújtótávolságára $\frac{1}{f_e} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$ igaz. Az $f_1 = f_2 = f$ miatt $f_e = \frac{f}{2}$.

Alkalmazzuk a leképezési törvényt: $\frac{1}{f_e} = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{k} \Rightarrow k = \frac{f_e \cdot t_1}{t_1 - f_e} = \frac{\frac{f}{2} \cdot t_1}{t_1 - \frac{f}{2}} = 12\ \text{cm}.$

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT

SZERKESZTETLEN KÉZIRAT

Vizsgáljuk a nagyítást: $N = \frac{K}{T_1} = -\frac{k}{t_1} = -0{,}6$

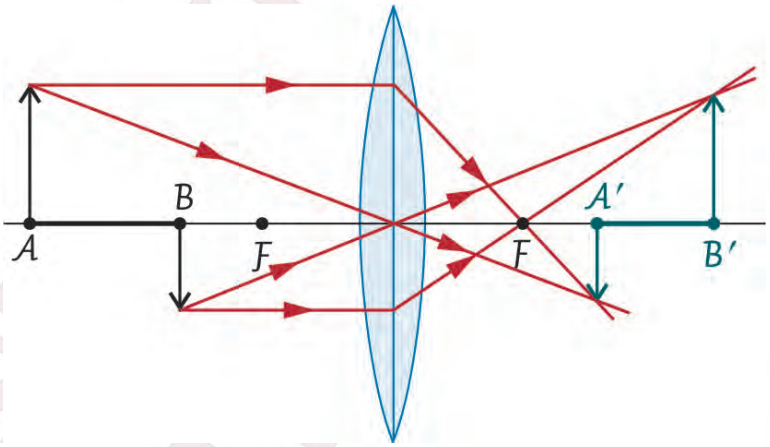
A keletkező kép kicsinyített, valódi, a kép tárggyal fordított állású.

11.165. Az ábrán az *AB* szakasz mentén egy világító LED-sor van.

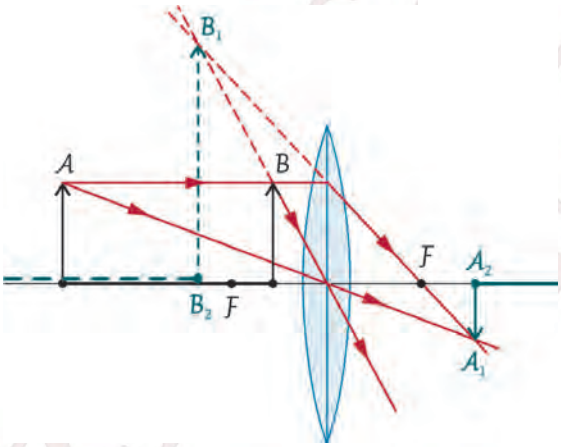
a) Szerkeszd meg az *AB* szakasz képét!

b) Szerkeszd meg az AB szakasz képét úgy is, ha az F fókusz benne van AB szakaszban!

M.11.165.



b)



Az ábrának megfelelően az A és B pontokban felveszünk egy – egy, az optikai tengelyre merőleges, azonos méretű, felfelé mutató nyilat. A nyilak A és B végpontjainak képpontjait a nevezetes sugármenetek segítségével megszerkesztjük: A_1 valódi, B_1 látszólagos kép. A képnyilak merőlegesek az optikai tengelyre, és talppontjaik az A, B pontok A_2 és B_2 képpontjait adják. Minden képpont az optikai tengelyen fog megjelenni.

KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT KÉZIRAT